МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

УДК 517.988

А. Н. Дорохов, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики
Воронежский государственный педагогический университет

О НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧКАХ МОНОТОННЫХ УПЛОТНЯЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ В *F*-ПРОСТРАНСТВЕ С КОНУСОМ

В данной работе приводится теорема существования неподвижных точек монотонных уплотняющих операторов, действующих в F-пространстве с конусом. Непрерывность исследуемых операторов не предполагается.

Ключевые слова: *F*-пространство, пространство Фреше, монотонный оператор, уплотняющий оператор, неподвижная точка, конус.

Приведем вначале вспомогательные утверждения.

Определение. Линейное метрическое пространство X называется F-пространством (пространством Фреше), если его метрика, кроме обычных свойств, обладает еще свойствами:

1) $\rho(x, y) = \rho(x - y, 0) \quad (x, y \in X)$;

2) из $\alpha_n \to \alpha$ следует $\rho(\alpha_n x, \alpha x) \to 0 \ (x \in X)$ и из $x_n \to x$ следует: $\rho(\alpha x_n, \alpha x) \to 0 \ (\alpha \in R)$;

3) пространство X полно по метрике.

В дальнейшем число $\|x\|_\rho = \rho(x, 0)$ будем называть ρ-нормой элемента x.

Пусть оператор A действует в F-пространстве X, полуупорядоченном при помощи конуса $K \subset X$.

Определение. Оператор A называется монотонным на множестве $M \subset X$, если $\forall x, y \in M$ из $x \le y$ следует $Ax \le Ay$.

Теорема Цорна. Если в частично упорядоченном множестве X каждое его подмножество M, являющееся цепью, имеет верхнюю (нижнюю) границу, то для любого элемента $x_0 \in X$ существует такой максимальный (минимальный) элемент $x \in X$, что $x \ge x_0 \ (x \le x_0)$.

Пусть M – множество всех ограниченных по ρ-норме $\|x\|_\rho$ множеств $\Omega \subset X$ F-пространства X, а R_0 – полуинтервал $[0, +\infty)$.

Определение. Функция $\psi : M \to R_0$, обладающая свойствами:

1) равенство $\psi(\Omega) = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда множество $\Omega \subset M$ относительно компактно;

2) выполняется равенство $\psi(\overline{\Omega}) = \psi(\Omega) \quad (\Omega \subset M)$;

3) если $\Omega_1 \subset \Omega_2$, то $\psi(\Omega_1) \le \psi(\Omega_2)$;

4) $\psi(\Omega_1 \cup \Omega_2) = \max\{\psi(\Omega_1), \psi(\Omega_2)\}$;

5) $\psi(\Omega_1 + \Omega_2) \le \psi(\Omega_1) + \psi(\Omega_2)$, где $\Omega_1 + \Omega_2$ – алгебраическая сумма множеств Ω_1 и Ω_2, называется мерой некомпактности в F-пространстве X.

Отметим, что данное определение меры некомпактности в F-пространстве X отличается от определения регулярной меры некомпактности, данного Б. Н. Садовским [1, с. 74].

Также будем использовать определение уплотняемости оператора A, данное И. А. Бахтиным [2, с. 32].

Определение. Ограниченный по ρ-норме $\|x\|_\rho$ оператор A называется ψ-уплотняющим в F-пространстве X, если для любого ограниченного относительно некомпактного множества $\Omega \subset M$ мера некомпактности $\psi(A\Omega) < \psi(\Omega)$.

Теорема. Пусть

1) в F-пространстве X с конусом $K \subset X$ монотонный ψ-уплотняющий на конусном отрезке $\langle x_0, y_0 \rangle \subset X \ (x_0 \le y_0)$ оператор A преобразует $\langle x_0, y_0 \rangle$ в себя;

2) образ $A\langle x_0, y_0 \rangle$ отрезка $\langle x_0, y_0 \rangle$ ограничен по ρ-норме $\|x\|_\rho$.

Тогда оператор A имеет в $\langle x_0, y_0 \rangle$ по крайней мере одну неподвижную точку.

Доказательство. Возьмем произвольный вперед идущий элемент $z_0 \in \langle x_0, y_0 \rangle$ оператора A: $z_0 \le Az_0$. Методом трансфинитной индукции докажем, что существует цепь $(z_\alpha)_{\alpha < \omega_1}$, где

$$z_\alpha = \begin{cases} z_0, \ \alpha = 0; \\ Az_{\alpha-1}, \ \alpha \text{ первого рода}; \\ \sup(z_\gamma)_{\gamma < \alpha}, \ \alpha \text{ второго рода}; \end{cases} \qquad (1)$$

а ω_1 – первое несчетное трансфинитное число.

Пусть существует цепь $(z_\gamma)_{\gamma < \alpha}$ для некоторого порядкового числа $\alpha < \omega_1$. Покажем, что она состоит из вперед идущих элементов оператора A и возрастает.

Методом трансфинитной индукции вначале докажем, что цепь $\left(z_\gamma\right)_{\gamma<\alpha}$ состоит из одних вперед идущих элементов. По условию теоремы элемент z_0 идет вперед. Пусть для некоторого $\delta<\gamma$ все члены цепи $\left(z_s\right)_{s<\delta}$ идут вперед. Тогда если δ первого рода, то $z_\delta = Az_{\delta-1} \geq z_{\delta-1}$ и в силу монотонности оператора A будет $Az_\delta \geq Az_{\delta-1} = z_\delta$, то есть z_δ идет вперед.

Если же δ второго рода, то $z_s \leq z_\delta = \sup\left(z_s\right)_{s<\delta}$ и, значит, $z_s \leq Az_s \leq Az_\delta \ (s<\delta)$.

Следовательно, и в этом случае $z_\delta \leq Az_\delta$, то есть z_δ идет вперед и содержится в конусном отрезке $\left\langle x_0, y_0 \right\rangle$.

Итак, цепь $\left(z_\gamma\right)_{\gamma<\alpha}$ состоит из одних вперед идущих элементов.

Теперь докажем возрастание цепи $\left(z_\gamma\right)_{\gamma<\alpha}$. Допустим, что существуют порядковые числа $\gamma_1, \gamma_2 < \alpha;\ \gamma_1 < \gamma_2$, такие что $z_{\gamma_1} \not\leq z_{\gamma_2}$. Обозначим через γ_0 наименьшее число, такое что $\gamma_0 > \gamma_1$, однако $z_{\gamma_0} \not\geq z_{\gamma_1}$. Тогда если γ_0 первого рода, то $z_{\gamma_0} = Az_{\gamma_0 - 1} \geq z_{\gamma_0-1} \geq z_{\gamma_1}$, что противоречит неравенству $z_{\gamma_0} \not\geq z_{\gamma_1}$.

Если же γ_0 второго рода, то $z_{\gamma_0} = \sup\left(z_\gamma\right)_{\gamma<\gamma_0} \geq z_{\gamma_1}$, что противоречит неравенству $z_{\gamma_0} \not\geq z_{\gamma_1}$. Следовательно, цепь $\left(z_\gamma\right)_{\gamma<\alpha}$ возрастает.

Теперь докажем существование цепи $\left(z_\alpha\right)_{\alpha<\omega_1}$. Пусть существует цепь $\left(z_\gamma\right)_{\gamma<\alpha}$ для некоторого порядкового числа $\alpha<\omega_1$. По доказанному она состоит из вперед идущих элементов и возрастает. Если α первого рода, то элемент $z_\alpha = Az_{\alpha-1} \geq z_{\alpha-1}$. Поэтому направление $\left(z_\gamma\right)_{\gamma<\alpha+1}$ существует и является цепью. Пусть теперь α второго рода. Покажем, что в множестве $W(\alpha) = \left\{\gamma<\alpha\right\}$ порядковых чисел существует конфинальная последовательность $\gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_n < \ldots < \alpha$, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_{\gamma_n} = z_\alpha = \sup\left(z_\gamma\right)_{\gamma<\alpha}$.

Допустим, что такой последовательности $\left(\gamma_n\right)$ не существует. Докажем, что тогда цепь $\left(z_\gamma\right)_{\gamma<\alpha}$ состоит из попарно различных элементов. В самом деле, пусть в предположении противного при некоторых $\gamma_1<\gamma_2<\alpha$ верно $z_{\gamma_1} = z_{\gamma_2}$. Тогда в силу возрастания направления $\left(z_\gamma\right)_{\gamma<\alpha}$: $z_{\gamma_1} \leq z_\gamma \leq z_{\gamma_2} \ (\gamma_1 \leq \gamma \leq \gamma_2)$. Поэтому $z_\gamma = z_{\gamma_1} \ (\gamma_1 \leq \gamma \leq \gamma_2)$ и, в частности, $z_{\gamma_1+1} = Az_{\gamma_1} = z_{\gamma_1}$. Но тогда $z_\gamma = z_{\gamma_1} \ (\gamma_1 \leq \gamma < \alpha)$ и, значит, $z_\alpha = \sup\left(z_\gamma\right)_{\gamma<\alpha} = z_{\gamma_1}$.

Далее, так как множество $\left\{\gamma \,\middle|\, \gamma_1 \leq \gamma < \alpha\right\}$ счетно, то его можно представить в форме последовательности $\left\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \ldots\right\}$. Положим $\gamma_{n_1} = \gamma_1$ и обозначим через γ_{n_2} наименьшее число $\gamma_n > \gamma_{n_1}$ последовательности $\left(\gamma_n\right)$, через γ_{n_3} – наименьшее число $\gamma_n > \gamma_{n_2}$ последовательности $\left(\gamma_n\right)$ и т. д. Получим последовательность $\left(\gamma_{n_k}\right)$, которой конфинально множество $W(\alpha)$, такую что $\lim\limits_{n\to\infty} z_{\gamma_{n_k}} = z_\alpha = \sup\left(z_\gamma\right)_{\gamma<\alpha}$, что противоречит нашему предположению.

Итак, цепь $\left(z_\gamma\right)_{\gamma<\alpha}$ состоит из попарно различных элементов.

Покажем, что цепь $\left(z_\gamma\right)_{\gamma<\alpha}$ не компактна. Действительно, пусть в предположении противного множество $\left\{z_\gamma\right\}_{\gamma<\alpha}$ относительно компактно. Представим цепь $\left(z_\gamma\right)_{\gamma<\alpha}$ в форме последовательности $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ и положим $v_n = u_1 \vee u_2 \vee \ldots \vee u_n$ $(n \in N)$. Очевидно, каждый элемент v_n совпадает с одним из элементов $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Поэтому возрастающая последовательность $\left(v_n\right)$ компактна и, значит, сходится. Пусть $v = \lim\limits_{n\to\infty} v_n$. Легко видеть, что $v = \sup\left(z_\gamma\right)_{\gamma<\alpha} = z_\alpha$.

Поскольку в цепи $\left(z_\gamma\right)_{\gamma<\alpha}$ нет наибольшего элемента, то без ограничения общности последовательность $\left(v_n\right)$ можно считать строго возрастающей. Пусть $v_n = z_{\gamma_n}$. Поскольку $z_{\gamma_n} < z_{\gamma_{n+1}}$, то $\gamma_n < \gamma_{n+1}$. Множество $W(\alpha)$ конфинально последовательности $\left(\gamma_n\right)$. Действительно, в предположении противного существует число $\gamma<\alpha$ такое, что $\gamma_n < \gamma \ (n \in N)$. Поэтому $z_{\gamma_n} \leq z_\gamma < z_{\gamma+1} \ (n\in N)$ и, значит, $v < z_{\gamma+1}$, что противоречит $v = \sup\left(z_\gamma\right)_{\gamma<\alpha}$.

Итак, $\lim z_{\gamma_n} = \sup\left(z_\gamma\right)_{\gamma<\alpha} = z_\alpha$ и $W(\alpha)$ конфинально последовательности $\left(\gamma_n\right)$, что противоречит нашему предположению.

Аналогичным образом показывается, что для любой последовательности $\gamma_n \uparrow$, которой конфинально $W(\alpha)$, последовательность $\left(z_{\gamma_n}\right)$ не является компактной. Поэтому для множества $\left\{z_{\gamma_n+k-1}\right\}_{n,k=1}^{\infty} \supset \left\{z_{\gamma_n}\right\}$ число $r = \psi\left(\left\{z_{\gamma_n+k-1}\right\}_{n,k=1}^{\infty}\right) > 0$.

Пусть $d = \inf\{r\}$, где инфимум берется по всем последовательностям $\gamma_n \uparrow$, которым конфинально $W(\alpha)$. Число $d = 0$. Действительно, пусть в предположении противного число $d > 0$. Очевидно, существует последовательность $\gamma_n \uparrow$, которой конфинально $W(\alpha)$, такая, что $d \le \psi\left(\left\{ z_{\gamma_n + k - 1}\right\}_{n,k=1}^{\infty}\right) \le d + \frac{1}{2}$.

Возьмем в множестве $\{\gamma_n + k - 1\}_{n,k=1}^{\infty}$ произвольную последовательность $\beta_n \uparrow$, которой конфинально $W(\alpha)$. Поскольку $d \le r = \psi\left(\left\{ z_{\beta_n + k - 1}\right\}_{n,k=1}^{\infty}\right) \le d + \frac{1}{2}$, то число $d_1 = \inf\{r\}$, где инфимум берется по всем возрастающим последовательностям $\{\beta_n\} \subset \{\gamma_n + k - 1\}_{n,k=1}^{\infty}$, которым конфинально $W(\alpha)$, удовлетворяет неравенству $d \le d_1 \le d + \frac{1}{2}$. В силу определения числа d_1 существует возрастающая последовательность $\{\beta_n\} \subset \{\gamma_n + k - 1\}_{n,k=1}^{\infty}$ которой конфинально $W(\alpha)$, такая, что

$$d_1 \le \psi\left(\left\{ z_{\beta_n + k - 1}\right\}_{n,k=1}^{\infty}\right) \le d_1 + \frac{1}{4} < d + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}.$$

Далее возьмем в множестве $\{\beta_n + k - 1\}_{n,k=1}^{\infty}$ произвольную последовательность $\delta_n \uparrow$, которой конфинально $W(\alpha)$. Поскольку $d_1 \le r = \psi\left(\left\{ z_{\delta_n + k - 1}\right\}_{n,k=1}^{\infty}\right) \le$ $\le d_1 + \frac{1}{4}$, то число $d_2 = \inf\{r\}$, где инфимум берется по всем возрастающим последовательностям $\{\delta_n\} \subset \{\beta_n + k - 1\}_{n,k=1}^{\infty}$, которым конфинально $W(\alpha)$, удовлетворяет неравенству $d_1 \le d_2 \le d_1 + \frac{1}{4}$. Продолжая этот процесс так далее, мы построим возрастающую последовательность $d_1 \le d_2 \le ... \le d + 1$ и возрастающие последовательности:

$$\{\beta_n\} \subset \{\gamma_n + k - 1\}_{n,k=1}^{\infty}, \quad \{\delta_n\} \subset \{\beta_n + k - 1\}_{n,k=1}^{\infty}, \ldots$$

которые конфинальны $W(\alpha)$, такие, что

$$d \le \psi\left(\left\{ z_{\gamma_n + k - 1}\right\}_{n,k=1}^{\infty}\right) \le d + \frac{1}{2},$$

$$d_1 \le \psi\left(\left\{ z_{\beta_n + k - 1}\right\}_{n,k=1}^{\infty}\right) \le d_1 + \frac{1}{4},$$

$$d_2 \le \psi\left(\left\{ z_{\delta_n + k - 1}\right\}_{n,k=1}^{\infty}\right) \le d_2 + \frac{1}{8}, \ldots$$

Пусть $d_0 = \lim d_n$. Нетрудно видеть, что

$$\{z_\gamma\}_{\gamma<\alpha} \supset \left\{ z_{\gamma_n + k - 1}\right\}_{n,k=1}^{\infty} \supset \left\{ z_{\beta_n + k - 1}\right\}_{n,k=1}^{\infty} \supset \left\{ z_{\delta_n + k - 1}\right\}_{n,k=1}^{\infty} \supset \ldots$$

Поэтому множества

$$\left\{ z_{\gamma_{n_1} + k - 1}\right\}_{k=1}^{\infty} \subset \left\{ z_{\gamma_n + k - 1}\right\}_{n,k=1}^{\infty} \quad (\gamma_{n_1} > \gamma_1),$$

$$\left\{ z_{\beta_{n_2} + k - 1}\right\}_{k=1}^{\infty} \subset \left\{ z_{\beta_n + k - 1}\right\}_{n,k=1}^{\infty} \quad (\beta_{n_2} > \gamma_2,\ \beta_{n_2} > \gamma_{n_1}),$$

$$\left\{ z_{\delta_{n_3} + k - 1}\right\}_{k=1}^{\infty} \subset \left\{ z_{\delta_n + k - 1}\right\}_{n,k=1}^{\infty} \quad (\delta_{n_3} > \gamma_3,\ \delta_{n_3} > \beta_{n_2}), \ldots$$

и построим сумму

$$G = \left\{ z_{\gamma_{n_1} + k - 1}\right\}_{k=1}^{\infty} \cup \left\{ z_{\beta_{n_2} + k - 1}\right\}_{k=1}^{\infty} \cup \left\{ z_{\delta_{n_3} + k - 1}\right\}_{k=1}^{\infty} \cup \ldots$$

Поскольку каждое из слагаемых множеств относительно компактно, то в силу полуаддитивности меры некомпактности ψ:

$$d_s \le \psi(G) \le d_s + \frac{1}{2^s} \quad (s \in N).$$

И, значит, $\psi(G) = d_0 > 0$. С другой стороны, так как в силу уплотняемости оператора A и свойств меры ψ: $d_s \le \psi(AG) < \psi(G) = d_0$ $(s \in N)$, то $d_0 \le \psi(AG) < \psi(G) = d_0$, что невозможно. Итак, число $d = 0$.

Аналогичным образом показывается, что для любой последовательности $(\gamma_n) \subset W(\alpha)$, $\gamma_n \uparrow$, которой конфинально $W(\alpha)$, число $d_1 = \inf\, \psi\left(\left\{ z_{\beta_n + k - 1}\right\}_{n,k=1}^{\infty}\right) = 0$, где инфимум берется по всем возрастающим последовательностям $(\beta_n) \subset \{\gamma_n + k - 1\}_{n,k=1}^{\infty}$, которым конфинально $W(\alpha)$.

Теперь для произвольного числа $\varepsilon > 0$ легко строятся такие возрастающие последовательности $\{\beta_n\} \subset \{\gamma_n + k - 1\}_{n,k=1}^{\infty}$, $\{\delta_n\} \subset \{\beta_n + k - 1\}_{n,k=1}^{\infty}, \ldots$, которые конфинальны $W(\alpha)$, что $\psi\left(\left\{ z_{\gamma_n + k - 1}\right\}_{n,k=1}^{\infty}\right) < \varepsilon$, $\psi\left(\left\{ z_{\beta_n + k - 1}\right\}_{n,k=1}^{\infty}\right) < \frac{\varepsilon}{2}$, $\psi\left(\left\{ z_{\delta_n + k - 1}\right\}_{n,k=1}^{\infty}\right) < \frac{\varepsilon}{4}, \ldots$

Возьмем множества

$$\left\{ z_{\gamma_{n_1} + k - 1}\right\}_{k=1}^{\infty} \subset \left\{ z_{\gamma_n + k - 1}\right\}_{n,k=1}^{\infty} \quad (\gamma_{n_1} > \gamma_1),$$

$$\left\{ z_{\beta_{n_2} + k - 1}\right\}_{k=1}^{\infty} \subset \left\{ z_{\beta_n + k - 1}\right\}_{n,k=1}^{\infty} \quad (\beta_{n_2} > \gamma_2,\ \beta_{n_2} > \gamma_{n_1}),$$

$$\left\{ z_{\delta_{n_3} + k - 1}\right\}_{k=1}^{\infty} \subset \left\{ z_{\delta_n + k - 1}\right\}_{n,k=1}^{\infty} \quad (\delta_{n_3} > \gamma_3,\ \delta_{n_3} > \beta_{n_2}), \ldots$$

и составим сумму $H = \left\{ z_{\gamma_{n_1} + k - 1}\right\}_{k=1}^{\infty} \cup \left\{ z_{\beta_{n_2} + k - 1}\right\}_{k=1}^{\infty} \cup \ldots$

Поскольку каждое из слагаемых множеств относительно компактно, то $0 \le \psi(H) < \dfrac{\varepsilon}{2^n}$ $(n \in N)$ и, значит, $\psi(H) = 0$. Отсюда, в частности, следует, что для последовательности $\gamma_{n_1}, \beta_{n_2}, \delta_{n_3}, \ldots$ которой конфинально $W(\alpha)$, последовательность $z_{\gamma_{n_1}}, z_{\beta_{n_2}}, z_{\delta_{n_3}}, \ldots$. компактна, что невозможно, так как по предположению она не является компактной.

Итак, искомая последовательность $(\gamma_n)\uparrow$, которой конфинально $W(\alpha)$, существует. Поэтому существует цепь $(z_\gamma)_{\gamma<\alpha+1}$.

Существование цепи $(z_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ установлено.

Построим для всех чисел $\alpha < \omega_1$ убывающее направление $(G_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$, где

$$G_\alpha = \begin{cases} \langle x_0, y_0 \rangle, \ \alpha = 0; \\ \overline{AG_{\alpha-1}}, \ \alpha \text{ первого рода}; \\ \bigcap\limits_{\gamma<\alpha} G_\gamma, \ \alpha \text{ второго рода}. \end{cases}$$

Покажем, что $G_\alpha \ne \varnothing$ $(\alpha < \omega_1)$. Возьмем произвольный вперед идущий элемент $z_0 \in \langle x_0, y_0 \rangle$ и по формуле (1) построим цепь $(z_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$. Покажем, что $z_\alpha \in G_\alpha (\alpha < \omega_1)$. Очевидно, $z_0 \in \langle x_0, y_0 \rangle = G_0$. Пусть элементы $z_\gamma \in G_\gamma (\gamma < \alpha)$. Если α – первого рода, то $z_{\alpha-1} \in G_{\alpha-1}$ и, значит, $z_\alpha = Az_{\alpha-1} \in \overline{AG_{\alpha-1}} = G_\alpha$.

Пусть α – второго рода. Тогда по доказанному существует последовательность $\gamma_n \uparrow$, которой конфинально $W(\alpha)$, такая, что

$$\lim_{n\to\infty} z_{\gamma_n} = z_\alpha. \qquad (2)$$

Поскольку $G_{\gamma_n} \supset G_{\gamma_n+1} (n \in N)$ и $z_{\gamma_n} \in G_{\gamma_n}$ $(n \in N)$, то в силу равенства (2): $z_\alpha \in G_{\gamma_n}$ $(n \in N)$.

С другой стороны, так как для любого $\gamma < \alpha$ существует число $\gamma_n : \gamma < \gamma_n < \alpha$, то каждое $G_\gamma (\gamma < \alpha)$ содержит в себе z_α и потому $z_\alpha \in G_\alpha = \bigcap\limits_{\gamma<\alpha} G_\gamma$.

Непустота множеств $G_\alpha (\alpha < \omega_1)$ установлена.

Далее, так как в силу ψ-уплотняемости оператора A для любого относительно некомпактного множества $G_\alpha (\alpha < \omega_1)$: $\psi(G_{\alpha+1}) = \psi(AG_\alpha) < \psi(G_\alpha)$, то для любых $\alpha_1 < \alpha_2 < \omega_1$ и относительно некомпактного G_{α_1}:

$$\psi(G_{\alpha_2}) \le \psi(AG_{\alpha_1}) = \psi(G_{\alpha_1+1}) < \psi(G_{\alpha_1}).$$

Существует число $\alpha_0 < \omega_1$ такое, что $\psi(G_{\alpha_0}) = 0$. Действительно, пусть в предположении противного все $G_\alpha (\alpha < \omega_1)$ относительно не компактны. Тогда $\psi(G_\alpha) - \psi(G_{\alpha+1}) > 0$ $(\alpha < \omega_1)$. Поэтому существует число $c > 0$ и возрастающая последовательность (α_n) $(\alpha_n < \omega_1, n \in N)$ такие, что $\psi(G_{\alpha_n}) - \psi(G_{\alpha_n+1}) \ge$ $\ge c$ $(n \in N)$.

Но тогда

$$\psi(G_{\alpha_1}) \ge \psi(G_{\alpha_1+1}) + c \ge \psi(G_{\alpha_2}) + c \ge \psi(G_{\alpha_2+1}) + 2c \ge$$

$$\ge \psi(G_{\alpha_3}) + 2c \ge \ldots \ge \psi(G_{\alpha_{k+1}}) + kc \ge kc \quad (k \in N),$$

что при достаточно больших k невозможно.

Обозначим через M_0 множество всех инвариантных отрезков $\langle x, y \rangle \subset \langle x_0, y_0 \rangle$. $A\langle x, y \rangle \subset \langle x, y \rangle$ $(x \le y)$. Введем в M_0 частичный порядок по правилу: $\langle x_1, y_1 \rangle <$ $< \langle x_2, y_2 \rangle$, если $\langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle \in M_0, \langle x_1, y_1 \rangle \supset \langle x_2, y_2 \rangle$ и $\langle x_1, y_1 \rangle \ne \langle x_2, y_2 \rangle$.

Покажем, что частично упорядоченное множество M_0 удовлетворяет всем условиям теоремы Цорна. Возьмем произвольную цепь $P = \{\langle x_\beta, y_\beta \rangle\}_{\beta \in B} \subset M_0$. Для каждого элемента $z_{0,\beta} = x_\beta$ $(\beta \in B)$ построим элемент $z_{\alpha_0,\beta} \in G_{\alpha_0}$. Очевидно, $x_\beta \le z_{\alpha_0,\beta} \le y_\beta$ $(\beta \in B)$ и цепь $(z_{\alpha_0,\beta})_{\beta \in B} \subset G_{\alpha_0}$ относительно компактна. Поэтому существует элемент $u_0 = \sup (z_{\alpha_0,\beta})_{\beta \in B}$, причем $Au_0 \ge u_0$ и $x_\beta \le u_0 \le y_\beta$. Аналогичным образом показывается, что существует элемент $v_0 \in \langle x_0, y_0 \rangle$ такой, что $u_0 \le v_0 \le y_\beta$ $(\beta \in B)$ и $Av_0 \le v_0$. Следовательно, $\langle u_0, v_0 \rangle \ge \langle x_\beta, y_\beta \rangle$ $(\beta \in B)$.

По теореме Цорна в M_0 существует максимальный элемент $\langle x_*, y_* \rangle$. Поскольку $x_* \le Ax_* \le Ay_* \le y_*$, то $\langle Ax_*, Ay_* \rangle \ge \langle x_*, y_* \rangle$, и, значит, в силу максимальности $\langle x_*, y_* \rangle$ отрезок $\langle Ax_*, Ay_* \rangle = \langle x_*, y_* \rangle$. Следовательно, $Ax_* = x_*$. Теорема доказана.

Библиографические ссылки

1. *Садовский Б. Н.* Об одном принципе неподвижной точки // Функц. анализ и его прил. – 1967. – Т. 1, вып. 2. – С. 74–76.

2. *Бахтин И. А.* Нелинейные уравнения с монотонными операторами : учеб. пособие для спецкурса. – Воронеж : ВГПИ, 1988. – 64 с.

* * *

Dorokhov A. N., PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Voronezh State Pedagogical University

On fixed points of monotone condensing operators in F-space with a cone

The paper presents the theorem on the existence of fixed points of monotone condensing operators in F-space with a cone. The continuity of the operators under investigation is not assumed.

Keywords: F-space, Frechet space, monotone operator, condensing operator, fixed point, cone.

Получено: 07.07.15