МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

УДК 517.988

А. Н. Дорохов, кандидат физико-математических наук
Воронежский государственный педагогический университет

О НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧКАХ ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ОПЕРАТОРОВ В F-ПРОСТРАНСТВЕ

Настоящая работа посвящается развитию теории неподвижных точек вполне непрерывных операторов. Приводятся доказательства новых теорем существования неподвижных точек вполне непрерывных операторов, действующих в F-пространстве (пространстве Фреше). Данный класс пространств, кроме банаховых, включает в себя такие важные пространства, как счетно-нормированные и пространства $Lp(0 < p < 1)$, $lp(0 < p < 1)$.

Ключевые слова: банахово пространство, *F*-пространство, вполне непрерывный оператор, неподвижная точка.

Одним из важных разделов современного анализа является теория нелинейных операторных уравнений в банаховых пространствах с конусами, созданная М. А. Красносельским [1, 2] и его учениками [3, 4].

Ценность этой теории обусловливается ее многочисленными приложениями в различных задачах естествознания: в задаче о критическом режиме ядерного реактора, в теории волн на поверхности тяжелой жидкости, в задачах о формах потери устойчивости упругих систем, в задачах геометрии в целом, в теории устойчивости, в теории нелинейных краевых задач, в математической экономике и т. д.

Естественно возникает вопрос о ее распространении на более широкие классы пространств, чем банаховы, и, в частности, на *F*-пространства (пространства Фреше). Этот класс пространств, кроме банаховых, включает в себя такие важные пространства, как счетно-нормированные и пространства $L_p(0 < p < 1)$, $l_p(0 < p < 1)$.

Развитию теории неподвижных точек вполне непрерывных операторов, действующих в *F*-пространстве, посвящается настоящая работа.

Приведем некоторые необходимые сведения и сформулируем ранее доказанные утверждения [5], которые будем использовать в дальнейшем.

Определение. Линейное метрическое пространство X называется *F*-пространством, если его метрика, кроме обычных свойств, обладает еще свойствами:

1) $\rho(x,y) = \rho(x-y,0) \quad (x,y \in X)$;

2) из $\alpha_n \to \alpha$ следует: $\rho(\alpha_n x, \alpha x) \to 0 \quad (x \in X)$ и из $x_n \to x$ следует: $\rho(\alpha x_n, \alpha x) \to 0 \quad (\alpha \in R)$;

3) пространство X полно по метрике.

В дальнейшем число $\|x\|_\rho = \rho(x,0)$ будем называть ρ-нормой элемента x.

Пусть X – m-мерное *F*-пространство с ρ-нормой $\|x\|_\rho$, а $(l_1,....,l_m)$ – какой-нибудь базис в X. Тогда каждый элемент $x \in X$ единственным образом представляется в виде:

$$x = \sum_{i=1}^{m} \xi_i l_i .$$

Положим $\|x\| = \max_{i \in \overline{1,m}} |\xi_i|$. Число $\|x\|$ является нормой в X.

Лемма 1. В m-мерном *F*-пространстве X для любой последовательности $(x_n) \subset X$ соотношения $\|x_n\|_\rho \to 0$ и $\|x_n\| \to 0$ равносильны.

Определение. Оператор A называется непрерывным на множестве $M \subset X$ *F*-пространства X, если он непрерывен в каждой точке x множества M.

Определение. Оператор A называется компактным на множестве M *F*-пространства X, если он преобразует любое ограниченное по ρ-норме $\|x\|_\rho$ множество $N \subset M$ в относительно компактное множество $AN \subset X$.

Определение. Оператор A называется вполне непрерывным на множестве $M \subset X$ *F*-пространства X, если он непрерывен и компактен на этом множестве.

Пусть X – *F*-пространство. Обозначим через X^* множество всех линейных непрерывных в *F*-пространстве функционалов. Определим в этом множестве операции сложения элементов и умножения элементов на числа по формулам:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)\ ; \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x).$$

С этими операциями множество X^* становится линейным (векторным) пространством, которое называется сопряженным пространством для *F*-пространства X.

Определение. Сопряженное пространство X^* называется достаточным в *F*-пространстве X, если для любых элементов $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ существует функционал $f \in X^*$ такой, что $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Легко видеть, что если в *F*-пространстве X существует норма $\|x\|$, подчиненная ρ-норме $\|x\|_\rho$: суще-

© Дорохов А. Н., 2015

ствует число $a > 0$ такое, что $a\|x\| \le \|x\|_\rho$ $(x \in X)$, то сопряженное пространство X^* достаточно в X.

Пусть в F-пространстве X множество $M \subset X$ относительно компактно. Тогда множество $co\,M$ также будет относительно компактно, если в X ρ-норма $\|x\|_\rho$ эквивалентна некоторой норме $\|x\|$: существуют числа $a > 0, b > 0$ такие, что $a\|x\| \le \|x\|_\rho \le b\|x\|$ $(x \in X)$.

Теорема 1. Пусть:

1) в F-пространстве X для каждого относительно компактного множества $M \subset X$ множество $co\,M$ также относительно компактно;

2) сопряженное пространство X^* достаточно в F-пространстве X;

3) вполне непрерывный оператор A преобразует непустое замкнутое ограниченное по ρ-норме $\|x\|_\rho$ выпуклое множество $V \subset X$ в себя: $AV \subset V$.

Тогда существует элемент $x_* \in V$ такой, что $Ax_* = x_*$.

Теорема 2. Пусть:

1) в F-пространстве X при каждом $x \in X \setminus 0$ функция $\varphi_x(t) = \|tx\|_\rho$ возрастает по переменной t в промежутке $[0, +\infty)$;

2) существует число $b > 0$ такое, что при всех $t \in [0,1]$ и $x \in X$ выполняется неравенство $\|tx\|_\rho \le bt\|x\|_\rho$;

3) в X существует норма $\|x\|$ и числа $a > 0$ и $r_0 > 0$ такие, что $a\|x\| \le \|x\|_\rho$ $(x \in X,\ \|x\|_\rho \le r_0)$;

4) вполне непрерывный оператор A преобразует непустое замкнутое ограниченное по ρ-норме $\|x\|_\rho$ выпуклое множество $V \subset X$ в себя.

Тогда существует элемент $x_0 \in V$ такой, что $Ax_0 = x_0$.

Приведем доказательства новых теорем существования неподвижных точек вполне непрерывных операторов, действующих в F-пространстве X.

Определение. Конус $K \subset X$ F-пространства X называется псевдонормальным, если для любых элементов $u, v \in X$ $(u \le v)$ конусной отрезок $\langle u, v\rangle$ ограничен по ρ-норме $\|x\|_\rho$.

Теорема 3. Пусть:

1) в F-пространстве X конус K псевдонормален;

2) для любого относительно компактного множества $M \subset X$ множество $co\,M$ также относительно компактно;

3) сопряженное пространство X^* достаточно в X;

4) вполне непрерывный оператор A преобразует конусной отрезок $\langle u, v\rangle$, где $u \le v$ – фиксированные элементы в X, в себя.

Тогда существует элемент $x_* \in \langle u, v\rangle$ такой, что $Ax_* = x_*$.

Доказательство. Так как в X конусной отрезок $\langle u, v\rangle$ в силу псевдонормальности конуса K является замкнутым ограниченным по ρ-норме $\|x\|_\rho$ выпуклым множеством, то в условиях настоящей теоремы выполняются все условия теоремы 1. Теорема доказана.

Определение. Оператор A, действующий в F-пространстве X, называется усиленно непрерывным, если из $x_n \xrightarrow{\text{сл}} x$ следует $Ax_n \to Ax$ по ρ-норме $\|x\|_\rho$.

В следующей теореме не предполагается, что для любого относительно компактного множества M в F-пространстве X множество $co\,M$ также относительно компактно.

Теорема 4. Пусть:

1) в F-пространстве X оператор A усиленно непрерывен;

2) вполне непрерывный оператор A преобразует непустое замкнутое ограниченное по ρ-норме $\|x\|_\rho$ выпуклое множество $V \subset X$ в себя: $AV \subset V$.

Тогда существует элемент $x_* \in V$ такой, что $Ax_* = x_*$.

Доказательство. В силу компактности оператора A множество $M = AV$ относительно компактно. Поэтому $\forall \varepsilon > 0$ в M существует конечная ε-сеть $(y_1, \ldots, y_n)$: $\forall y \in M = AV$ существует элемент $y_i \in (y_1, \ldots, y_n)$ такой, что $\|y - y_i\|_\rho < \varepsilon$.

Построим на множестве M оператор шаудеровского проектирования

$$P_\varepsilon(y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_i(y)\, y_i}{\sum_{i=1}^{n} \mu_i(y)}, \qquad (1)$$

где

$$\mu_i(y) = \begin{cases} \varepsilon - \|y - y_i\|_\rho, & \text{если } \|y - y_i\|_\rho \le \varepsilon, \\ 0, & \text{если } \|y - y_i\|_\rho > \varepsilon. \end{cases}$$

Легко видеть, что функционалы $\mu_i(y)$ $(i \in \overline{1,m})$ неотрицательны и непрерывны на множестве M. Далее, так как для любого $y \in M$ существует элемент $y_i \in (y_1, \ldots, y_n)$ такой, что $\|y - y_i\|_\rho < \varepsilon$, то значение $\mu_i(y) = \varepsilon - \|y - y_i\|_\rho > 0$. Следовательно, $\sum_{i=1}^{m} \mu_i(y) > 0$ $(y \in M)$. Поэтому оператор $P_\varepsilon(y)$, заданный формулой (1), непрерывен на M.

Нетрудно видеть, что конечномерные операторы $A_\varepsilon x = P_\varepsilon Ax$ $(\varepsilon > 0)$ непрерывны на множестве V.

Обозначим через X_ε конечномерное пространство, натянутое на ε-сеть $(y_1,....,y_m)$, и положим $V_\varepsilon = V \bigcap X_\varepsilon$. Поскольку множество V выпукло и $AV \subset V$, то

$$P_\varepsilon Ax = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_i(Ax) y_i}{\sum_{i=1}^{n} \mu_i(Ax)} \in V \bigcap X_\varepsilon = V_\varepsilon \quad (x \in V,\ \varepsilon > 0). \quad (2)$$

Поэтому $A_\varepsilon V_\varepsilon = P_\varepsilon A V_\varepsilon \subset V_\varepsilon$.

Далее, так как в силу леммы 1 непрерывность оператора $A_\varepsilon = P_\varepsilon A$ в конечномерном *F*-пространстве X_ε равносильна его непрерывности в X_ε по норме, то в силу теоремы Боля – Брауэра существуют элементы $x_\varepsilon \in V_\varepsilon$ такие, что $A_\varepsilon x_\varepsilon = P_\varepsilon A x_\varepsilon = x_\varepsilon \quad (\varepsilon > 0)$. Полагая $\varepsilon = \frac{1}{n} \ (n \in N)$, построим элементы $x_n \in V_{\frac{1}{n}} \ (n \in N)$ такие, что $A_{\frac{1}{n}} x_n = P_{\frac{1}{n}} A x_n = x_n \ (n \in N)$.

В силу компактности оператора *A* без ограничения общности можно считать, что последовательность $Ax_n \to x_* \in V$ по ρ-норме $\|x\|_\rho$.

Возьмем произвольный функционал $f \in X^*$. Из определения оператора $P_{\frac{1}{n}}(y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_i(y) y_i}{\sum_{i=1}^{n} \mu_i(y)}$ непосредственно следует, что если $\mu_i(y) \neq 0$, то $\|y - y_i\|_\rho < \frac{1}{n}$. Поэтому

$$\left| f\left(P_{\frac{1}{n}} Ax_n - Ax_n \right) \right| \leq \sup_{\mu_i(Ax_n) \neq 0} \left| f(y_i - Ax_n) \right| \to 0.$$

Отсюда и из $\|Ax_n - x_*\|_\rho \to 0$ непосредственно следует, что $f(x_n) = f\left(P_{\frac{1}{n}} Ax_n \right) \to f(x_*)$.

Следовательно, $x_n = P_{\frac{1}{n}} Ax_n \xrightarrow{\text{сл}} x_*$. Поэтому в силу усиленной непрерывности оператора *A* последовательность $Ax_n \to Ax_*$ по ρ-норме $\|x\|_\rho$.

Отсюда и из $\|Ax_n - x_*\|_\rho \to 0$ и следует, что $Ax_* = x_*$. Теорема доказана.

Определение. Оператор *A*, действующий в *F*-пространстве *X*, называется слабо непрерывным в *X*, если из $x_n \xrightarrow{\text{сл}} x$ следует $Ax_n \xrightarrow{\text{сл}} Ax$.

Теорема 5. Пусть:

1) сопряженное пространство X^* достаточно в *F* пространстве *X*;

2) слабо непрерывный и вполне непрерывный оператор *A* преобразует непустое замкнутое ограниченное по ρ-норме $\|x\|_\rho$ выпуклое множество $V \subset X$ в себя.

Тогда существует элемент $x_* \in V$ такой, что $Ax_* = x_*$.

<u>Доказательство.</u> Точно так же, как и при доказательстве теоремы 4, показывается, что существуют элементы $x_n \in V_{\frac{1}{n}} = V \bigcap X_{\frac{1}{n}}$, где $X_{\frac{1}{n}}$ – конечномерное пространство, натянутое на $\frac{1}{n}$-сеть $(y_1,...,y_n) \subset M = AV$ такие, что $P_{\frac{1}{n}} Ax_n = x_n \ (n \in N)$.

Так как последовательность (Ax_n) относительно компактна, то без ограничения общности можно считать, что $Ax_n \to x_*$ по ρ-норме $\|x\|_\rho$.

Возьмем произвольный функционал $f \in X^*$. Из определения оператора $P_{\frac{1}{n}}(y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_i(y) y_i}{\sum_{i=1}^{n} \mu_i(y)} \quad (y \in M)$ непосредственно следует, что если $\mu_i(y) \neq 0$, то $\|y - y_i\|_\rho < \frac{1}{n}$. Поэтому

$$\left| f\left(P_{\frac{1}{n}} Ax_n - Ax_n \right) \right| \leq \sup_{\mu_i(Ax_n) \neq 0} \left| f(y_i - Ax_n) \right| \to 0.$$

Отсюда и из $\|Ax_n - x_*\|_\rho \to 0$ непосредственно следует, что $f(x_n) = f\left(P_{\frac{1}{n}} Ax_n \right) \to f(x_*)$.

Следовательно, $x_n \xrightarrow{\text{сл}} x_*$. Поэтому в силу слабой непрерывности оператора *A* последовательность $Ax_n \xrightarrow{\text{сл}} Ax_*$.

Отсюда и из $\|Ax_n - x_*\|_\rho \to 0$ ввиду достаточности X^* в *X* следует, что $Ax_* = x_*$.

Действительно, из $\|Ax_n - x_*\|_\rho \to 0$ следует, что $\forall f \in X^*$ последовательность $f(Ax_n) \to f(x_*)$, а из $Ax_n \xrightarrow{\text{сл}} Ax_*$ следует $f(Ax_n) \to f(Ax_*)$. Поэтому $f(x_*) = f(Ax_*) \quad (f \in X^*)$. Но тогда в силу достаточности X^* в *X* верно $Ax_* = x_*$. Теорема доказана.

Библиографические ссылки

1. *Красносельский М. А.* Положительные решения операторных уравнений. – М. : Физматгиз, 1962. – 394 с.

2. *Красносельский М. А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. – М. : Гостехиздат, 1956. – 392 с.

3. *Бахтин И. А.* Положительные решения нелинейных уравнений с вогнутыми операторами : учебное пособие для спецкурса. – Воронеж : ВГПИ, 1985. – 82 с.

4. *Бахтин И. А.* Нелинейные уравнения с монотонными операторами: учебное пособие для спецкурса. – Воронеж : ВГПИ, 1988. – 64 с.

5. *Дорохов А. Н.* Неподвижные точки вполне непрерывных операторов в *F*-пространстве // Известия ВГПУ 80 лет. – Т. 257. – Воронеж : Воронежский госпедуниверситет, 2011. – С. 8–15.

* * *

Dorokhov A. N., PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Voronezh State Pedagogical University

To fixed points of completely continuous operators in F-space

This work is dedicated to the development of the theory of fixed points of completely continuous operators. Proofs are given for new existence theorems of fixed points of completely continuous operators in F-space (Frechet space). This class of spaces (besides Banach ones) includes such important spaces as countably normed and spaces $L_p(0 < p < 1)$, $l_p(0 < p < 1)$.

Keywords: Banach space, *F*-space, completely continuous operator, fixed point.

Получено: 09.11.15