

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

УДК 539.374: 620.178.3

Д. С. Добровольский, магистрант
ИжГТУ имени М. Т. Калашникова

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ
И УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ
ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ С ТРЕЩИНАМИ

Предлагается инженерный метод определения главных местных напряжений и упругопластических деформаций, основанный на выявленных энергетических закономерностях деформирования материала вблизи вершины трещин в упругом и пластическом состояниях.

Ключевые слова: интенсивности напряжений и деформаций, удельная энергия изменения формы, оценка приемлемости метода.

Создание высокопрочных материалов, обладающих, как правило, пониженной пластичностью, хрупкие разрушения элементов конструкций, работающих, главным образом, в северных регионах, выдвинули проблему повышения трещиностойкости (вязкости разрушения) материалов в число важнейших.

Разработка инженерных методов определения напряженно-деформированного состояния (НДС) имеет существенное значение, в частности, при формулировании критериев трещиностойкости. При разработке предлагаемого метода использовали системный анализ НДС, положили в основу: упругие решения рассматриваемых задач [1, 2], выявленные энергетические закономерности деформирования материала в окрестности вершины трещины при упругом и пластическом состояниях, теорию упругопластических деформаций, метод переменных параметров упругости и оценку приемлемости предлагаемого метода.

При нагружении элемента конструкции в окрестности вершины трещины возникает трехосное НДС. При этом взаимосвязь главных напряжений σ_j ($j = 1, 2, 3$) и упругопластических деформаций e_j неоднозначна, поскольку зависит от траектории нагружения в пространстве $\sigma_j - e_j$. Это обстоятельство затрудняет разработку инженерных методов анализа НДС элементов конструкций с трещинами. В связи с этим напряженное состояние близи трещин обычно рассматривается как одноосное, когда влияние главных напряжений σ_2 и σ_3 не учитывается, что снижает достоверность получаемых результатов. Так, в работе [3] для взаимосвязи первых главных напряжений и деформаций в вершине надреза при пластическом σ_1 , e_1 и упругом σ_{1e} , e_{1e} состояниях предложена зависимость:

$$\frac{\sigma_1 e_1}{\sigma_{1e} e_{1e}} = 1. \quad (1)$$

Применение (1) приводит к заметным погрешностям при определении напряжений σ_1 и до 50 % за-

вышает упругопластические деформации e_1 в вершине концентратора.

В соответствии с теорией упругопластических деформаций [4] экспериментальная кривая деформирования материала в интенсивностях напряжений σ_i и упругопластических деформаций e_i не зависит от траектории нагружения и с достаточной точностью аппроксимируется линейной и степенной функциями:

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \sigma_{it} e_i / e_{it} \quad \text{при } \sigma_i \leq \sigma_{it}, \\ \sigma_i &= \sigma_{it} (e_i / e_{it})^{m_i} \quad \text{при } \sigma_i \geq \sigma_{it}, \end{aligned} \quad (2)$$

где σ_{it} , e_{it} – интенсивности напряжений и деформаций, соответствующие пределу текучести материала; m_i – показатель упрочнения. Аналогичным образом взаимосвязаны интенсивности номинальных напряжений σ_{in} и деформаций e_{in} :

$$\begin{aligned} \sigma_{in} &= \sigma_{it} e_{in} / e_{it} \quad \text{при } \sigma_{in} \leq \sigma_{it}, \\ \sigma_{in} &= \sigma_{it} (e_{in} / e_{it})^{m_i} \quad \text{при } \sigma_{in} \geq \sigma_{it}. \end{aligned} \quad (3)$$

Площади под кривыми $\sigma_i - e_i$ и $\sigma_{in} - e_{in}$ также являются независимыми величинами от траектории нагружения и представляют собой местную (в рассматриваемой точке) и номинальную (в вершине трещины, но без учета эффекта концентрации) энергии изменения формы при упругом ($\sigma_i, \sigma_{in} < \sigma_{it}$):

$$u_{Fe} = 0,5 \sigma_i e_i, \quad u_{nFe} = 0,5 \sigma_{in} e_{in} \quad (4)$$

и упругопластическом ($\sigma_i, \sigma_{in} \geq \sigma_{it}$) деформировании:

$$\begin{aligned} u_F &= \int_0^{e_i} \sigma_i de_i = 0,5 \sigma_{it} e_{it} \left[1 + \frac{2}{1+m_i} \left(\frac{\sigma_i e_i}{\sigma_{it} e_{it}} - 1 \right) \right], \quad (5) \\ u_{nF} &= \int_0^{e_{in}} \sigma_{in} de_{in} = 0,5 \sigma_{it} e_{it} \left[1 + \frac{2}{1+m_i} \left(\frac{\sigma_{in} e_{in}}{\sigma_{it} e_{it}} - 1 \right) \right]. \quad (6) \end{aligned}$$

Рассмотрим закономерности деформирования материала в окрестности трещины с энергетических позиций. При упругом деформировании накапливаются энергии изменения формы u_{Fe} и объема:

$$u_{Ve} = \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_{1e} + \sigma_{2e} + \sigma_{3e})^2, \quad (7)$$

где μ – коэффициент С. Пуассона; E – модуль упругости. По мере развития пластических деформаций вблизи вершины трещины коэффициент $\mu \rightarrow 0,5$, а значение $u_{Ve} \rightarrow 0$. При этом величины главных напряжений σ_j уменьшаются. За счет этого происходит некоторая разгрузка пластической зоны и соответствующие догрузка и увеличение энергии в упругой области нетто-сечения элемента конструкции. В упоминаемой выше работе Г. Нейбера отмечается, что в вершинах концентраторов напряжений энергии изменения формы при упругом и пластическом деформировании равны. С учетом изложенного равенство энергий изменения формы при упругом и пластическом деформировании:

$$u_{Fe} = u_F \quad (8)$$

справедливо и для материала в окрестности вершины трещины как своего рода концентратора. С учетом изложенного взаимосвязь напряжений и деформаций в рассматриваемой точке нетто-сечения элемента конструкции с трещиной при пластическом и упругом состояниях можно представить в независимой от траектории нагружения форме:

$$\frac{\sigma_i e_i}{\sigma_{ie} e_{ie}} = F, \quad (9)$$

где F – искомая функция. Совместно рассматривая (2)–(6), (8), (9) и заменяя в (5) $\sigma_i e_i = F \sigma_{ie} e_{ie}$, после преобразований получаем: для номинально упругого деформирования:

$$F = 0,5(1+m_i) + 0,5(1-m_i) / (\sigma_{ie}/\sigma_{it})^2 \quad \text{при } \sigma_{in} \leq \sigma_{it}; \quad (10)$$

для номинального упругопластического деформирования:

$$F_1 = 1 - \frac{(1-m_i)\sigma_{it}e_{it}}{4u_{itF}} \left[1 - \left(\frac{\sigma_{in}}{\sigma_{ie}} \right)^2 \right] \quad \text{при } \sigma_{in} \geq \sigma_{it}. \quad (11)$$

Анализ формулы (10) показал, что с ростом e_{in} до e_{it} значение F снижается от 1 до $\sim 0,5$. Из формулы (11) следует, что при дальнейшем росте $e_{in} > e_{it}$ величина F_1 от $\sim 0,5$ возрастает и в пределе стремится к 1. Используя соотношения (2), (3) и (9), получаем формулы для определения интенсивностей напряжений σ_i и упругопластических деформаций e_i в рассматриваемой точке нетто-сечения элемента конструкции с трещиной, выраженные через аналогичные величины σ_{ie} , e_{ie} в предположении упругого деформирования: при $\sigma_{in} \leq \sigma_{it}$:

$$\sigma_i = \sigma_{in} \left[(\sigma_{ie}/\sigma_{in})^2 F \right]^{1/m_i} (\sigma_{in}/\sigma_{it})^{m_i-1}, \quad (12)$$

$$e_i = e_{in} \left[(\sigma_{ie}/\sigma_{in})^2 F \right]^{1/m_i} (\sigma_{in}/\sigma_{it})^{1-m_i}; \quad (13)$$

при $\sigma_{in} \geq \sigma_{it}$

$$\sigma_i = \sigma_{in} \left[(\sigma_{ie}/\sigma_{in})^2 F_1 \right]^{1/m_i}, \quad (14)$$

$$e_i = e_{in} \left[(\sigma_{ie}/\sigma_{in})^2 F_1 \right]^{1/m_i}. \quad (15)$$

Для определения главных напряжений σ_j и упругопластических деформаций e_j при известных σ_i и e_i используется метод переменных параметров упругости [5]:

$$e_1 = [\sigma_1 - \mu_*(\sigma_2 + \sigma_3)]/E_*, \dots, (1; 2; 3), \quad (16)$$

где (1; 2; 3) – знак круговой перестановки индексов. Для переменных параметров упругости рекомендуются формулы:

$$\mu_* = \frac{0,5 - (0,5 - \mu)\bar{\sigma}_i / (1 + \mu)\bar{e}_i}{1 + (0,5 - \mu)\bar{\sigma}_i / (1 + \mu)\bar{e}_i}, \quad (17)$$

$$E_* = \frac{3\bar{\sigma}_i / 2(1 + \mu)\bar{e}_i}{1 + (0,5 - \mu)\bar{\sigma}_i / (1 + \mu)\bar{e}_i} E,$$

где $\bar{\sigma}_i = \sigma_i/\sigma_{it}$, $\bar{e}_i = e_i/e_{it}$.

При переходе от упругого к местному пластическому деформированию отношения главных напряжений $\bar{\sigma}_2 = \sigma_2/\sigma_1$ и $\bar{\sigma}_3 = \sigma_3/\sigma_1$ вблизи вершины трещины изменяются. Для определения $\bar{\sigma}_3$ рекомендуется предварительно использовать упругое решение соответствующей задачи, а для получения $\bar{\sigma}_2$ реализовано предложение Г. Нейбера о выполнении в концентраторе условия местной плоской деформации для «дополнительного» напряжения $\sigma_{1д} = \sigma_1 - \sigma_{in}$:

$$\bar{\sigma}_2 = \mu(1 + \bar{\sigma}_3) - \mu E_* / E (\sigma_i/\sigma_{in}). \quad (18)$$

С учетом этого можно определить главные напряжения в рассматриваемой точке нетто-сечения вблизи вершины трещины:

$$\sigma_1 = \sigma_i / \sqrt{0,5 \left[(1 - \bar{\sigma}_2)^2 + (\bar{\sigma}_2 - \bar{\sigma}_3)^2 + (\bar{\sigma}_3 - 1)^2 \right]}, \quad (19)$$

$$\sigma_2 = \bar{\sigma}_2 \sigma_1, \quad \sigma_3 = \bar{\sigma}_3 \sigma_1.$$

Главные упругопластические деформации e_j ($j = 1, 2, 3$) в этой же точке вычисляются по соотношениям (16).

Пример реализации предлагаемого метода

Постановка задачи: определить главные напряжения σ_i и упругопластические деформации e_i в заданной координатой $r = 5 \cdot 10^{-4}a$ точке нетто-сечения балки с трещиной (рисунок). Относительный размер трещины $\lambda = l/a = 0,3$. Материал балки сталь 45 ($\sigma_T = 480$ МПа; $\sigma_B = 675$ МПа; $\delta = 6,7$ %; $\psi = 46,2$ %; $E = 2,04 \cdot 10^5$ МПа; $\mu = 0,3$).

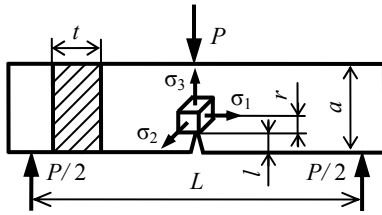


Схема нагружения балки в условиях поперечного изгиба

По методике [6] вычисляем параметры аппроксимации (1): $\sigma_{\text{г}} = \sigma_{\text{г}} = 480$ МПа, $e_{\text{г}} = 2(1+\mu)\sigma_{\text{г}}/3E = 0,204\%$, интенсивности напряжений и деформаций при разрушении образца стали 45: $S_{\text{ик}} = (1+1,4\psi)\sigma_{\text{в}} = 1112$ МПа, $e_{\text{ик}} = \ln(1-\psi)^{-1} = 61,99\%$, $m_i = \lg S_{\text{ик}}/\lg e_{\text{ик}} = 0,147$. Интенсивности номинальных напряжений и деформаций: $\sigma_{\text{ин}} = 6M_{\text{н}}/t(a-l)^2 = 240$ МПа, $\bar{\sigma}_{\text{ин}} = \sigma_{\text{ин}}/\sigma_{\text{г}} = 0,5$; $e_{\text{ин}} = 2(1+\mu)\sigma_{\text{ин}}/3E = 0,102\%$, $\bar{e}_{\text{ин}} = e_{\text{ин}}/e_{\text{г}} = 0,5$. В соответствии с упругим решением [7] при $\lambda = 0,3$ по формулам (13) получаем коэффициент интенсивности напряжений $K_1 = 0,513\sigma_{\text{н}}\sqrt{\pi l}$. Зная координату рассматриваемой точки $r/a = 5 \cdot 10^{-4}$, вычисляем отношение $l/r = (1-\lambda)a/\lambda r = 1167$. Представляем главные напряжения в предположении упругого деформирования и справедливости условия местной плоской деформации $\sigma_{1e} = K_1/\sqrt{2\pi r} = 2974$ МПа, $\sigma_{2e} = \mu\sigma_{1e} = 892$ МПа, $\sigma_{3e} \approx 0$ и их интенсивность $\sigma_{ie} = \sqrt{1-\mu+\mu^2}\sigma_{1e} = 2643$ МПа. По формуле (10) получаем $F = 0,592$. По решениям (12) и (13) вычисляем интенсивности напряжений $\sigma_i = 694$ МПа ($\bar{\sigma}_i = 1,444$) и упругопластических деформаций $e_i = 2,52\%$ ($\bar{e}_i = 12,2$). Используя формулы (17), находим значения переменных параметров упругости: $\mu^* = 0,473$; $E^* = 0,274 \cdot 10^5$ МПа. По формуле (18) получаем $\bar{\sigma}_2 = 0,459$. Главные напряжения вычисляем по формулам (19): $\sigma_1 = 800$ МПа; $\sigma_2 = 367$ МПа; $\sigma_3 = 0$. Главные упругопластические деформации находим по соотношениям (16): $e_1 = 2,29\%$; $e_2 = 0$; $e_3 = -1,83\%$.

Известное [8] решение Дж. Хатчинсона, Дж. Райса и Г. Розенгрена, основанное на концепции независимости джей-интеграла и единой модели нелинейно упругого материала при активном нагружении и раз-

грузке, неприемлемо для проверки предлагаемого метода, поскольку в последнем используется модель упругопластического деформирования (1) реальных материалов. С учетом этого для оценки приемлемости предлагаемого метода использованы известные формулы Н. А. Махутова, полученные путем аналитического описания результатов экспериментов. В интенсивностях напряжений и упругопластических деформаций формулы можно представить следующим образом:

$$\sigma_i = \frac{\sigma_{\text{ин}} (\sigma_{ie}/\sigma_{\text{ин}})^{2m_i/(1+m_i)}}{(\sigma_{\text{ин}}/\sigma_{\text{г}})^{(1-m_i)/(1+m_i)} (\sigma_{ie}/\sigma_{\text{г}})^{n_i(1-m_i)(1-\sigma_{\text{ин}}/\sigma_{\text{г}}+\sigma_{\text{ин}}/\sigma_{ie})m_i/(1+m_i)}}, \quad (20)$$

$$\sigma_i = \frac{e_{\text{ин}} (\sigma_{ie}/\sigma_{\text{ин}})^{2/(1+m_i)} (\sigma_{\text{ин}}/\sigma_{\text{г}})^{(1-m_i)/(1+m_i)}}{(\sigma_{ie}/\sigma_{\text{г}})^{n_i(1-m_i)(1-\sigma_{\text{ин}}/\sigma_{\text{г}}+\sigma_{\text{ин}}/\sigma_{ie})/(1+m_i)}}, \quad (21)$$

где $n_i = 0,56$ – параметр. Для принятых исходных данных, используя (20) и (21), получаем $\sigma_i = 699$ МПа и $e_i = 2,62\%$, что хорошо согласуется с ранее полученными значениями $\sigma_i = 694$ МПа, $e_i = 2,52\%$ и подтверждает приемлемость предлагаемого метода.

Библиографические ссылки

1. Irwin G. R. Analysis of stress and strain near the end of crack traversing a plate // Journal of Applied Mechanics. – 1957. – Vol. 24. – № 4. – P. 32–38.
2. Добровольский Д. С. Теоретическое обоснование методики оценки трещиностойкости в условиях мелких и глубоких трещин // Вестник ИжГТУ. – 2016. – № 1. – С. 6–8.
3. Нейбер Г. Теория концентрации напряжений в призматических стержнях, работающих в условиях сдвига, для любого нелинейного закона, связывающего напряжения и деформации // Механика. – 1961. – № 4. – С. 117–130 с.
4. Ильющин А. А. Пластичность. – Ч. 1. – М. ; Л. : Гостехиздат, 1948. – 378 с.
5. Биргер И. А., Демьянушко И. В. Теория пластичности при неизотермическом нагружении // Изв. АН СССР, МТТ. – 1968. – № 6. – С. 70–76.
6. Махутов Н. А. Деформационные критерии разрушения и расчет элементов конструкций на прочность. – М. : Машиностроение, 1981. – 272 с.
7. Добровольский Д. С. Теоретическое обоснование методики оценки трещиностойкости в условиях мелких и глубоких трещин // Вестник ИжГТУ. – 2016. – № 1. – С. 6–8.
8. Партон В. В. Механика разрушения: от теории к практике. – М. : Наука, 1990. – 242 с.

Dobrovolsky D. S., Master's degree student, Kalashnikov ISTU

Energy method for determination of stresses and elastic plastic deformations of structural elements with cracks

An engineering method for determining principal local stresses and elastic plastic deformations is proposed based on the detected energy patterns of the material deformation near the crack tip in the elastic and plastic states.

Keywords: intensities of stresses and strains, specific energy of shape change, evaluation of the method acceptability

Получено: 14.01.16