УДК 621.372.542

Н. В. Пономарева, аспирант
ИжГТУ имени М. Т. Калашникова
В. Ю. Пономарева, аспирант
Ижевская медицинская академия

ЛОКАЛИЗАЦИЯ СПЕКТРАЛЬНЫХ ПИКОВ МЕТОДОМ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Показано, что если частота гармонической компоненты не совпадает с центральной частотой одного из бинов ДПФ, то вследствие эффекта утечки, частота синусоидального сигнала измеряется с погрешностью, равной половине частотного интервала между бинами ДПФ. Известный метод измерения частоты сигнала, основанный на операции дополнения нулями исходного сигнала во временной области, имеет существенные недостатки: необходимость существенного расширения оперативной памяти процессорных измерительных средств (ПрИС) для хранения нулевых значений сигнала; проведение непроизводительных операций ПрИС с нулевыми значениями сигнала; фиксированность шага дискретизации по частоте при измерении частотных спектров; существенное возрастание времени измерения частоты. Предложен эффективный метод измерения частоты сигналов на базе параметрического дискретного преобразования, и кратко даны области его приложений.

Ключевые слова: операция дополнения нулями, процессорные измерительные средства, бин, дискретное преобразование Фурье.

В теории спектрального и векторного анализа[1] изучение дискретных сигналов $x(n)$ проводят как во *временной области* – область дискретной переменной *n*, так и в *частотной области* $S_N(k)$ – область переменной *k*. В данной теории [1–10] доказаны следующие положения:

- определение дискретного сигнала на конечном интервале (*операция взвешивания*) в одной из областей приводит к *свертке* (фильтрации) в другой области с функцией вида $\sin(N\cdot x/2)/(N\sin(x/2))$;
- выполнение операции дискретизации электрического сигнала в одной области приводит к операции периодизации (периодического продолжения) в другой области;
- операции дискретизации и взвешивания являются линейными и коммутативными операциями.

В рамках рассматриваемой теории вводится и используется для описания многих понятий цифровой обработки сигналов (ЦОС), так называемое *дискретно-временное преобразование Фурье* (ДВПФ), которое ставит в соответствие некоторой последовательности $y(n)$, $n=\overline{-\infty,+\infty}$, непрерывное преобразование Фурье:

$$S_y(f)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)\cdot\exp(-j2\pi\cdot f\cdot n)\,,-\infty\le f\le\infty\,. \quad (1)$$

Известное *дискретное преобразование Фурье* (ДПФ) некоторой последовательности $x(n)$, заданной на интервале $n=\overline{0,(N-1)}$ и *взвешенной временным окном* $\omega(n)$:

$$S_N(k)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\omega(n)\cdot x(n)\,W_N^{kn}\,;$$
$$W_N=\exp(-j2\pi/N)\,,\quad k=\overline{0,(N-1)}\,, \quad (2)$$

позволяет находить *взвешенное* ДВПФ (2) в дискретном множестве точек $2\pi\cdot k/N$, $k=\overline{0,(N-1)}$. Отметим, что мы можем находить значения взвешенного ДВПФ, дискретизируя его, путем дополнения исходной последовательности $x(n)$, $n=\overline{0,(N-1)}$, $N\cdot(2^m-1)$; $m=1,2,3,...$ нулевыми отсчетами (*операция дополнения нулями во временной области* – ОДНВ) и выполнения ДПФ полученной последовательности $x_{\text{доп}}(n)$:

$$S_N(k)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N\cdot 2^m-1}\omega(n)\cdot x_{\text{доп}}(n)W_{N\cdot 2^m}^{kn}=\frac{1}{N}\times$$
$$\times\sum_{n=0}^{N-1}\omega(n)\cdot x(n)\,W_{N\cdot 2^m}^{kn}\,;W_{N\cdot 2^m}=\exp(-j2\pi/(N\cdot 2^m))\,; \quad (3)$$
$$k=\overline{0,(N\cdot 2^m-1)}\,.$$

Для выполнения ДПФ обычно применяют алгоритмы быстрого преобразования Фурье (БПФ) по основанию 2, т. е. ($N=2^p$; $p=3,4,...$), и частота исследуемого гармонического сигнала, как правило, находится между центральными частотами бинов[2] БПФ. В результате, вследствие эффекта утечки [11], частота синусоидального сигнала измеряется с погрешностью, равной половине частотного интервала Δf между бинами ДПФ ($\Delta f=f_{\text{кв}}/N$ – частотный

[1] При одной группе измерений требуется получение полной информации о частотах, амплитудах и фазах синусоидальных составляющих исследуемого сигнала. Такого рода анализ сигнала называется **векторным анализом**. Другая, не менее обширная группа измерений не включает определения фазовых соотношений между синусоидальными составляющими. Такого рода анализ сигнала называется **спектральным анализом**.

[2] Отдельные отсчеты ДПФ часто называют бинами, поскольку вся энергия под кривой $\sin(N\cdot x/2)/(N\sin(x/2))$ (передаточной характеристикой фильтра ДПФ) попадает в «хранилище» конкретного отсчета ДПФ (слово «bin» переводится с английского как «ящик», «ларь», «бункер»).

интервал между бинами ДПФ; $f_{\text{кв}}$ – частота квантования сигнала; N – размерность ДПФ).

Отметим, что если частота гармонической компоненты совпадает с центральной частотой одного из бинов ДПФ, проблемы, связанные с проявлением эффекта утечки, отсутствуют, и частота синусоидального сигнала измеряется с погрешностью, стремящейся к нулю.

Известный метод измерения частоты сигнала, основанный на ОДНВ исходного сигнала $x(n)$, $n=\overline{0,(N-1)}$, число которых определяется соотношением $N\cdot(2^m-1)$; $m=1,2,3,....$, позволяет за счет уменьшения частотного интервала $\Delta f_{\text{ОДНВ}}$ между бинами ДПФ-сигнала $x_{\text{доп}}(n)$; $n=\overline{0,(2^m-1)}$: $\Delta f_{\text{ОДНВ}}=\Delta f/2^m$, уменьшить погрешность измерения частоты исходного синусоидального сигнала. Однако данный метод имеет и *существенные недостатки*, проявляющиеся при его реализации процессорными измерительными средствами (ПрИС):

- необходимость существенного расширения оперативной памяти ПрИС для хранения нулевых значений сигнала;
- проведение непроизводительных операций ПрИС с нулевыми значениями сигнала;
- фиксированность шага дискретизации по частоте при измерении спектров;
- число операций (время измерения частоты) возрастает в $\nu=2^m\cdot(m+p)/p$ раз.

Предлагаемый метод измерения частоты сигналов разработан на базе параметрического дискретного преобразования:

$$S_N(k,\theta)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{(k+\theta)n},\ \ k=\overline{0,N-1},\ \ 0\le\theta<1\,. \quad (4)$$

Пусть задан сигнал $x(n)=\cos(2\pi/32\cdot k\cdot n)$; $n=\overline{0,\ 31}$; $k=5{,}750$; и сигнал $x_{\text{доп}}(n)$; $n=\overline{0,\ 255}$, модули спектров которых приведены на рис. 1, *а* и *б* соответственно.

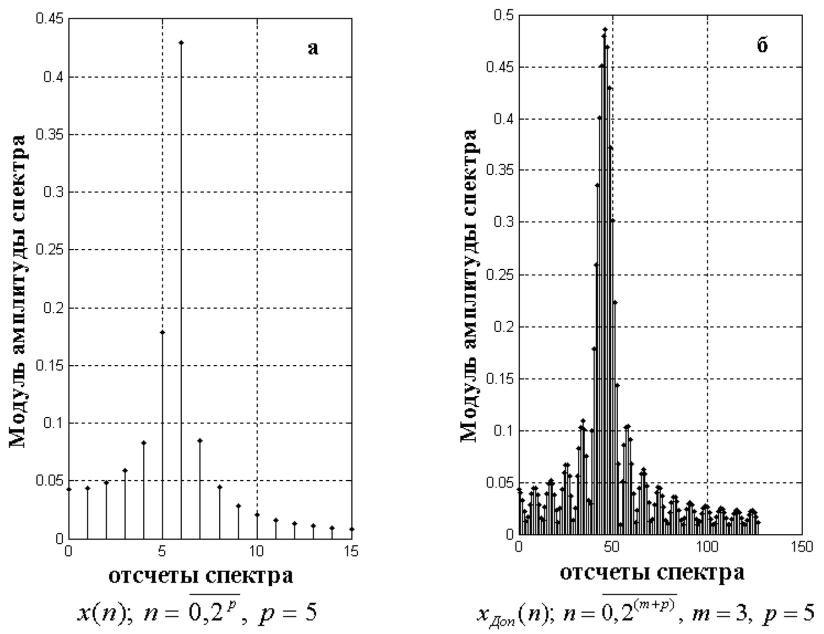

Рис. 1. Модули спектров сигналов $x(n)$ и $x_{\text{доп}}(n)$

Математическая формулировка задачи

Задана передаточная характеристика фильтра ДПФ: $F(x)=\sin(N\cdot x/2)/(N\sin(x/2))$ и два ее отсчета n_1 и n_2, между которыми находится $\max\ F(x)$. Необходимо найти значение x_1, доставляющее максимум функции $F(x)$ на интервале $[n_1,n_2]$ с заданной точностью, т. е. найти:

$$x_1=\arg\ \max\ F(x),\ \ x_1\in[n_1,n_2]\,. \quad (5)$$

Алгоритм метода

В силу структуры функции $F(x)$ из рис. 1, *а* следует, что $\max\ F(x)$ находится между пятым и шестым отсчетами, а из рис. 2 – между сороковым и сорок восьмым отсчетами (жирные линии).

Поскольку амплитуда шестого бина больше пятого (рис 1, *а*) и сорок восьмой отсчет ДПФ больше сорокового, несложно сделать вывод о том, что частота гармонического сигнала находится между $5{,}5f_{\text{кв}}/32$ Гц и $6f_{\text{кв}}/32$ Гц (пунктирная линия на рис. 2). Следовательно, погрешность измерения частоты гармонического сигнала равна $0{,}5f_{\text{кв}}/32$ Гц. Дополняя 32-точечный сигнал 224 нулевыми отсчетами, мы уменьшаем погрешность измерения в 4 раза, естественно, мирясь с существенными недостатками данного подхода, которые приведены выше.

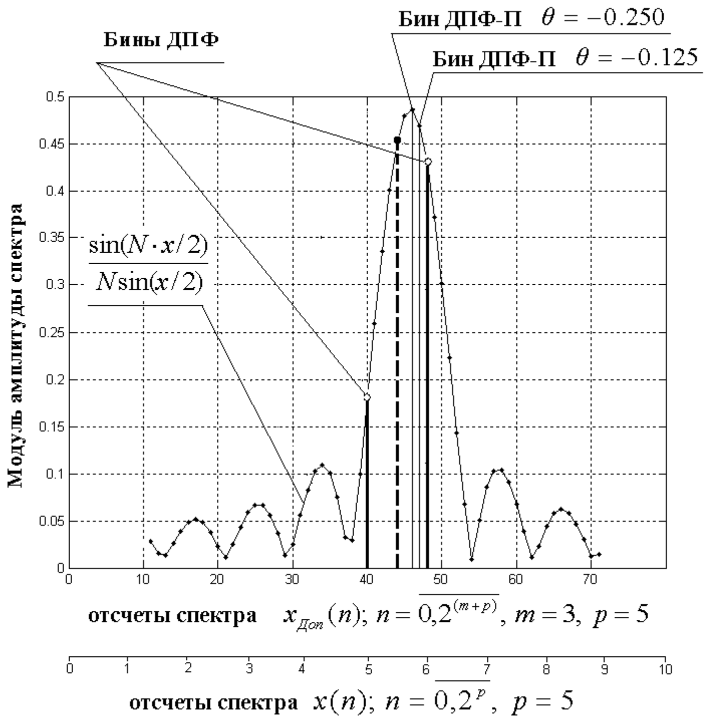

Рис. 2. Иллюстрация работы алгоритма измерения частоты сигналов на базе параметрического дискретного преобразования

В предлагаемом методе, выполнив всего два измерения частотного спектра взвешенного ДВПФ методом ДПФ-П при $\theta = 0{,}125$ и $\theta = 0{,}250$ (рис. 2, тонкие линии), мы получаем тот же результат, сократив при этом время измерения частоты гармонического сигнала, в сравнении с методом ОДНВ, в $\gamma = 2^{m-1}(p+m)/p$ раз.

Отметим, что, применив в предлагаемом методе метод однопараметрической безусловной оптимизации на основе методов половинного деления и хорд, можно повысить сходимость предлагаемого алгоритма.

В заключение отметим, что разработанный метод измерения параметров скрытых периодичностей может найти свои приложения в таких предметных областях, как анализ речевых сигналов в кибернетике и связи, анализ биомедицинских сигналов в компьютерной медицинской диагностике и в других областях научных исследований.

Библиографические ссылки

1. *Пономарева О. В., Пономарев А. В.* Восстановление значений непрерывных частотных спектров дискретных сигналов методом параметрического дискретного преобразования Фурье // Вестник Ижевского государственного технического университета. – 2015. – № 3 (67). – С. 88–91.

2. *Пономарева О. В.* Неинвариантность скользящего энергетического параметрического фурье-спектра действительных тональных сигналов // Цифровая обработка сигналов. – 2014. – № 2. – С. 7–14.

3. *Пономарева О. В.* Быстрое параметрическое дискретное преобразование Фурье действительных последовательностей // Цифровая обработка сигналов. – 2012. – № 2. – С. 2–5.

4. *Пономарева О. В.* Измерение временных спектров дискретных сигналов методом модифицированного параметрического дискретного преобразования Фурье // Интеллектуальные системы в производстве. – 2014. – № 2 (24). – С. 132–138.

5. *Пономарева О. В., Пономарев В. А., Пономарев А. В.* Иерархическая морфологическо-информационная модель системы функционального диагностирования объектов на основе цифровой обработки сигналов // Датчики и системы. – 2014. – № 1 (176). – С. 2–8.

6. *Пономарева О. В., Пономарев А. В., Пономарева Н. В.* Метод быстрого вычисления дискретного преобразования Фурье действительных последовательностей // Цифровая обработка сигналов. 2013. – № 2. – С. 10–15.

7. *Пономарева О. В., Алексеев В. А., Пономарев А. В.* Цифровой периодограмманализ и проблемы его практического применения // Вестник Ижевского государственного технического университета. – 2013. – № 2 (58). – С. 130–133.

8. *Пономарева О. В., Пономарев А. В., Пономарев В. А.* Обобщение алгоритма Герцеля для решения задач выявления скрытых периодичностей // Интеллектуальные системы в производстве. – 2013. – № 1 (21). – С. 41–46.

9. *Пономарева О. В.* Быстрое параметрическое дискретное преобразование Фурье действительных последовательностей // Цифровая обработка сигналов. – 2012. –№ 2. – С. 2–5.

10. *Пономарева О. В., Пономарева Н. В.* Модификация фильтра на основе частотной выборки для решения задач цифровой обработки случайных процессов со скрытыми периодичностями // Интеллектуальные системы в производстве. – 2012. – № 2 (20). – С. 122–129.

11. *Пономарева О. В., Алексеев В. А., Пономарев А. В.* Цифровой периодограмманализ и проблемы его практического применения // Вестник Ижевского государственного технического университета. – 2013. – № 2 (58). – С. 130–133.

* * *

N. V. Ponomareva, Post-graduate, Kalashnikov ISTU
V. Yu. Ponomareva, Post-graduate, Izhevsk State Medical Academy

Localization of spectral peaks by method of parametric discrete Fourier transform

In practice, the frequency of the investigated harmonic signal is usually located between the center frequencies of FFT bins. As a result, due to leakage effect, the frequency of the sinusoidal signal is measured with an error equal to half of frequency interval between the DFT bins. It is shown that if the frequency of a harmonic component is the same as the center frequency of one of the bins of the DFT, there are no problems associated with manifestation of the leakage effect, and frequency of a sinusoidal signal is measured with an error tending to zero. The known method of frequency signal measuring based on supplementing original signal with zeros in the time domain allows reducing the error of measuring frequency of the original signal due to reducing the frequency interval between the bins of the DFT. The disadvantages of this method are: the need for a substantial expansion of RAM for storing zero signal values; performing unproductive operations with zero signal values; frequency discretization step fixity in the measurement of frequency spectra; a significant increase of frequency measurement time. An efficient method of signal frequency measurement based on the parametric discrete transformation is proposed and its application areas are shortly described.

Keywords: zero padding operation, processor measuring means, bin, discrete Fourier transform.

Получено: 29.03.16