

УДК: 62-503.56

В. А. Тенев, доктор физико-математических наук, профессор
Л. Ф. Илалетдинов, аспирант
ИжГТУ имени М. Т. Калашникова

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ ТЕЛА С ВИНТОВОЙ СИММЕТРИЕЙ В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Рассматривается задача управления движением тела с винтовой симметрией в вязкой жидкости. Одним из вариантов формы тела является трехлопастной винт с тремя вращающимися роторами внутри.

Ключевые слова: вязкая жидкость, управление, инерционные роботы.

Возможность управляемого движения тел с внутренними роторами в вязкой жидкости представляет большой интерес и заключает в себе потенциал их практического применения. Управление движением тела в виде трехлопастного гребного винта (рис. 1) в идеальной жидкости исследовалось в работе [1].

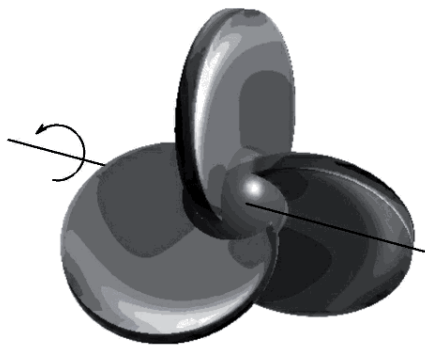


Рис. 1. Трехлопастной гребной винт

Известно, что в идеальной жидкости гребной винт не может создавать тягу в силу парадокса Даламбера. Но свободно вращающийся винт может перемещаться в идеальной жидкости [2]. Вращение винта может быть обеспечено вращением внутреннего ротора. Для возможности движения тела в любом направлении следует установить три ротора. Все роторы одинаковы, осесимметричны, и оси вращения совпадают с их осями симметрии и геометрическими осями оболочки (рис. 2).

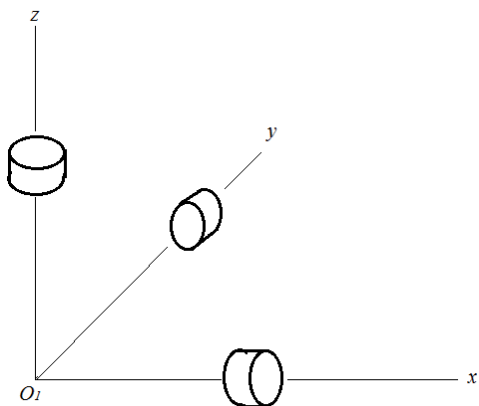


Рис. 2. Схема расположения роторов

Уравнения Кирхгофа, описывающие пространственное движение тела с нулевой плавучестью в идеальной жидкости, имеют вид в подвижной системе координат O_1xyz [3, 4]:

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{P} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{P} \times \mathbf{V}, \quad (1)$$

где импульс:

$$\mathbf{P} = \mathbf{C}\mathbf{V} + \mathbf{B}\boldsymbol{\omega}; \quad (2)$$

кинетический момент:

$$\mathbf{M} = \mathbf{B}^T \mathbf{V} + \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{K}(t). \quad (3)$$

$\mathbf{V} = (v_1, v_2, v_3)^T$ – вектор скорости; $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ – вектор угловой скорости.

Матрицы $\mathbf{C} = m\mathbf{E} + \Lambda_1$, $\mathbf{I} = \mathbf{I}_s + \Lambda_2 + \sum_{i=1}^3 J_i$, \mathbf{B} содержат коэффициенты присоединенных масс $\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \Lambda_2 \end{pmatrix}$, определяемые геометрией движущегося в жидкости тела; $m = m_s + 3m_R$ – масса оболочки и роторов; $\mathbf{K}(t) = \sum_{i=1}^3 J_i \Omega_i(t) \mathbf{n}_i$ – вектор гиросtatического момента; Ω_i – угловые скорости вращения роторов с моментами инерции J_i ; \mathbf{n}_i – орты.

Из (2), (3) можно выразить скорости через импульс и кинетический момент: $\mathbf{V} = \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{P} - \mathbf{B}\boldsymbol{\omega})$, $\boldsymbol{\omega} = (\mathbf{I} - \mathbf{B}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{B})^{-1}(\mathbf{M} - \mathbf{K}(t) - \mathbf{B}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{P})$.

При начальных условиях $\mathbf{P}(0) = 0$, $\mathbf{M}(0) = 0$ импульс и кинетический момент для всего времени остаются равными нулю: $\mathbf{P}(t) = 0$, $\mathbf{M}(t) = 0$; скорости движения тела выражаются через скорости вращения роторов:

$$\boldsymbol{\omega} = -(\mathbf{I} - \mathbf{B}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{K}(t); \quad (4)$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{B}\boldsymbol{\omega}. \quad (5)$$

Вращение внутренних роторов приводит к вращению тела любой формы, как это следует из (4). Поступательное движение возможно только при ненулевой матрице \mathbf{B} (5). Матрица \mathbf{B} имеет элемен-

ты, отличные от нуля, для тел с винтовой симметрией. В идеальной жидкости без начального толчка тело движется, пока вращаются внутренние роторы. При их остановке останавливается и тело. Алгоритм управления движением тела по заданной траектории в идеальной жидкости из состояния покоя основан на том, что скорости вращения роторов будут функциями от произвольных направлений $\Omega(\Delta\mathbf{r})$ [5]. В случае вязкой жидкости условие $\mathbf{P}(t) = 0$, $\mathbf{M}(t) = 0$ не выполняется и тело будет двигаться и при остановке роторов.

Для вязкой жидкости уравнения движения тела принимают вид:

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{P} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{F}; \quad (5)$$

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{P} \times \mathbf{V} + \mathbf{G}, \quad (6)$$

где \mathbf{F}, \mathbf{G} – сила и момент, действующие на тело со стороны жидкости.

Для нахождения силы и момента необходимо решать гидродинамическую задачу пространственного движения тела [6].

Преобразуем уравнения (5), (6). Из уравнений (2), (3) при неизменных матрицах $\mathbf{C}, \mathbf{B}, \mathbf{I}$ получим:

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{C}\dot{\mathbf{V}} + \mathbf{B}\dot{\boldsymbol{\omega}},$$

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{B}^T \dot{\mathbf{V}} + \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\mathbf{K}}(t).$$

Разрешив эту систему уравнений относительно производных скоростей $\dot{\mathbf{V}}, \dot{\boldsymbol{\omega}}$, получим систему дифференциальных уравнений для вектора скоростей $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{V} \\ \boldsymbol{\omega} \end{pmatrix}$:

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{Q}, \quad (7)$$

где $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{I} \end{pmatrix}$ – блочная матрица; вектор

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{P}} \\ \dot{\mathbf{M}} - \dot{\mathbf{K}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{F} \\ \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{P} \times \mathbf{V} - \dot{\mathbf{K}}(t) + \mathbf{G} \end{pmatrix}.$$

Для расчета траектории движения тела в неподвижной системе координат $OXYZ$ система дифференциальных уравнений (7) дополняется следующими дифференциальными уравнениями:

$$\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega},$$

$$\frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\omega},$$

$$\frac{d\boldsymbol{\gamma}}{dt} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega},$$

$$\frac{dX}{dt} = (\mathbf{V}, \boldsymbol{\alpha}), \quad (8)$$

$$\frac{dY}{dt} = (\mathbf{V}, \boldsymbol{\beta}),$$

$$\frac{dZ}{dt} = (\mathbf{V}, \boldsymbol{\gamma})$$

и начальными условиями:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}^0, \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^0, \boldsymbol{\alpha}(0) = \boldsymbol{\alpha}^0, \boldsymbol{\beta}(0) = \boldsymbol{\beta}^0, \boldsymbol{\gamma}(0) = \boldsymbol{\gamma}^0, \mathbf{R}(0) = \begin{pmatrix} X(0) \\ Y(0) \\ Z(0) \end{pmatrix} = \mathbf{R}^0.$$

Здесь $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ – направляющие косинусы, образующие матрицу перехода от неподвижной системы координат $OXYZ$ к подвижной O_1xyz : $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{pmatrix}$.

Для определения силы и момента, действующих на движущееся тело со стороны жидкости:

$$\mathbf{F} = \int_S [-p\mathbf{E} + \mu(\nabla\mathbf{u} + {}^T\nabla\mathbf{u})] \cdot \mathbf{n} ds,$$

$$\mathbf{G} = \int_S \mathbf{r}_s \times [-p\mathbf{E} + \mu(\nabla\mathbf{u} + {}^T\nabla\mathbf{u})] \cdot \mathbf{n} ds,$$

где \mathbf{u} – вектор абсолютной скорости жидкости; p, μ – давление, плотность и динамический коэффициент вязкости; S – поверхность тела; \mathbf{r}_s – радиус-вектор, решались уравнения Навье – Стокса [7].

В результате анализа численных расчетов установлено, что сила и момент имеют по две составляющих:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_v + \mathbf{F}_\omega,$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_v + \mathbf{G}_\omega.$$

Первая составляющая \mathbf{F}_v зависит от поступательной скорости движения и является силой сопротивления. Вторая составляющая \mathbf{F}_ω связана с образованием тяги при вращении винтообразного тела. Для составляющих силы и момента получены следующие аппроксимирующие зависимости [8, 9]:

$$F_j = -153,6 \frac{\lambda_{j,j}}{\lambda_{1,1}} |v_j| v_j + 3,23 \frac{\lambda_{j,3+j}}{\lambda_{1,4}} |\omega_j| \omega_j;$$

$$G_j = 23,5 \frac{\lambda_{j,3+j}}{\lambda_{1,4}} |v_j| v_j - 0,96 \frac{\lambda_{3+j,3+j}}{\lambda_{4,4}} |\omega_j| \omega_j, j = 1, 2, 3,$$

где λ_{ij} – элементы матрицы присоединенных масс $\boldsymbol{\Lambda}$.

Задача (7), (8) о расчете движения винтообразного тела в вязкой жидкости, индуцируемого вращением внутренних роторов, становится замкнутой. Управление таким движением является нетривиальной проблемой. Заданную траекторию можно ап-

проксимировать кусочно-непрерывными прямыми отрезками [10]. Рассмотрим задачу нахождения управления движением из начала прямого отрезка \mathbf{R}^0 в конечную точку отрезка \mathbf{R}^k за заданное время T_k . Потребуем минимального отклонения δ центра масс тела (точка O_1) от заданного прямолинейного отрезка, где

$$\delta(t) = \frac{\left| (\mathbf{R}^k - \mathbf{R}^0) \times (\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}^0) \right|}{\left| (\mathbf{R}^k - \mathbf{R}^0) \right|}.$$

Минимизируемый функционал имеет следующий вид:

$$\Phi(\Omega) = \frac{1}{T_k} \int_0^{T_k} \delta(t, \Omega) dt \rightarrow \min, \quad (9)$$

при условии попадания в конечную точку:

$$\left| \mathbf{R}(T_k) - \mathbf{R}^k \right| = 0. \quad (10)$$

Функционал (9), ограничение (10) и уравнения движения (7), (8) представляют собой задачу оптимального управления типа Лагранжа. Дифференциальные уравнения движения решаются численно с применением метода Рунге – Кутты четвертого порядка точности. Обозначим оператор численного нахождения траектории тела из решения дифференциальных уравнений (7), (8) при заданном законе скоростей вращения роторов $\Omega(t)$ в виде:

$$\mathbf{R}(t_n) = L(\Omega),$$

где t_n – узлы конечно-разностной сетки по времени.

Примем, что скорости вращения роторов в начальный момент времени равны нулю $\Omega(0) = 0$. Затем каждый ротор раскручивается за заданный отрезок времени ΔT_i до заданной величины $\Theta_i, i = 1, 2, 3$. При достижении конечной точки скорости вращения роторов замедляются до 0 ($\Omega(T_k) = 0$). Законы изменения скоростей вращения роторов во времени представим в виде:

$$\Omega_i(t) = \begin{cases} \Theta_i \sin\left(\frac{\pi t}{2 \Delta T_i}\right) & | t \leq \Delta T_i, \\ \Theta_i & | \Delta T_i < t \leq T_k - \Delta T_i, \\ \Theta_i \cos\left(\frac{\pi t - T_k + \Delta T_i}{2 \Delta T_i}\right) & | T_k - \Delta T_i < t \leq T_k. \end{cases}$$

В этом случае вектор управляющих воздействий \mathbf{W} будет определяться параметрами $\Theta_i, \Delta T_i, i = 1, 2, 3$ и $\mathbf{W} = (\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Delta T_1, \Delta T_2, \Delta T_3)^T$.

Задача оптимального управления (7)–(10) редуцируется к конечномерной задаче математического программирования с целевой функцией:

$$\Phi(\mathbf{W}) \rightarrow \min \quad (11)$$

и ограничениями:

$$\begin{aligned} \left| L(\Omega(\mathbf{W})) \Big|_{t=T_k} - \mathbf{R}^k \right| &= 0; \\ \left| \Theta_i \right| &\leq \Theta^{\max}; \end{aligned} \quad (12)$$

$$0 < \Delta T_i \leq 0,5 T_k, i = 1, 2, 3.$$

Для численного решения задачи (11) с ограничениями (12) применим базовый генетический алгоритм, описанный в [11] с дополнительной селекцией, изложенной в [12]. Генетический алгоритм из [13] для скрещивания применяет операторы вещественного кодирования и классический бинарный оператор Холланда. Эти операторы выбираются при каждой процедуре скрещивания случайным образом, что расширяет их возможности.

При селекции применяется турнирный метод отбора с выполнением следующих дополнительных правил:

1. Если обе сравниваемые особи допустимые, то есть удовлетворяющие ограничениям, то выбирается с лучшим показателем целевой функции.
2. Если одна особь допустимая, а вторая нет, то выбирается допустимая.
3. Если обе особи недопустимые, то выбирается та, у которой меньшее количество невыполненных ограничений.
4. Если обе особи недопустимые и имеют одинаковое количество нарушенных ограничений, то выбирается та, у которой минимальное количественное нарушение ограничений.

Приведем пример расчета управления при движении винтообразного тела сначала из точки

$$\mathbf{R}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ в точку } \mathbf{R}^k = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,4 \\ 0,3 \end{pmatrix}, \text{ а затем обратно при}$$

следующих характеристиках тела:

$$J_i = 0,0639, i = 1, 2, 3;$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 43,02 & 0 & 0 \\ 0 & 29,35 & 0 \\ 0 & 0 & 29,35 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1,142 & 0 & 0 \\ 0 & 0,767 & 0 \\ 0 & 0 & 0,767 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -4,203 & 0,0711 & -0,0711 \\ -0,0711 & 2,17 & 0,0711 \\ 0,0711 & -0,0711 & 2,17 \end{pmatrix}.$$

Время движения в одну сторону $T_k = 50$.

Начальные условия:

$$\mathbf{V}(0) = 0, \boldsymbol{\omega}(0) = 0, \boldsymbol{\alpha}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\gamma}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{\gamma}^0, \mathbf{R}(0) = \mathbf{R}^0.$$

После достижения точки \mathbf{R}^k осуществляется новое управление для движения в обратную сторону. Начальные условия при этом соответствуют полученным значениям в точке \mathbf{R}^k .

Зависимости скоростей вращения от времени, полученные в результате решения задачи оптимального управления, приведены на рис. 3.

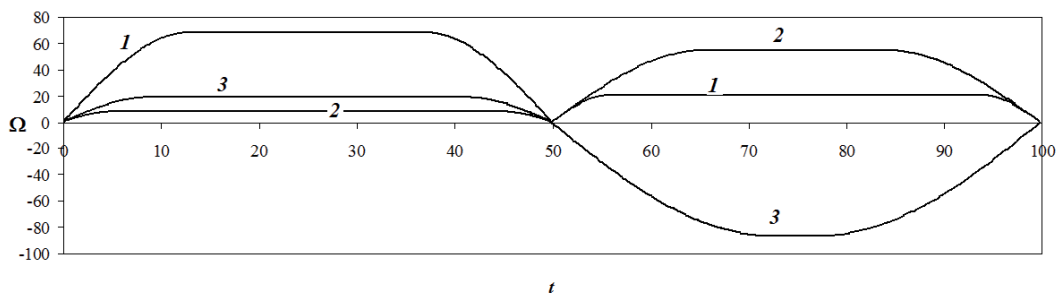


Рис. 3. Зависимость скорости вращения от времени

Номера кривых на рис. 3 соответствуют номерам

роторов. При движении от точки $\mathbf{R}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ до точки

$\mathbf{R}^k = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,4 \\ 0,3 \end{pmatrix}$ получены следующие значения управляющих воздействий:

$$\Theta_1 = 68,8; \Theta_2 = 8,2; \Theta_3 = 18,8;$$

$$\Delta T_1 = 0,2662T_k; \Delta T_2 = 0,1076T_k; \Delta T_3 = 0,1794T_k.$$

При движении в обратном направлении:

$$\Theta_1 = 20,6; \Theta_2 = 49,6; \Theta_3 = -62,1;$$

$$\Delta T_1 = 0,1218T_k; \Delta T_2 = 0,3223T_k; \Delta T_3 = 0,4517T_k.$$

Проекция траектории тела на плоскость OXY показана на рис. 4.

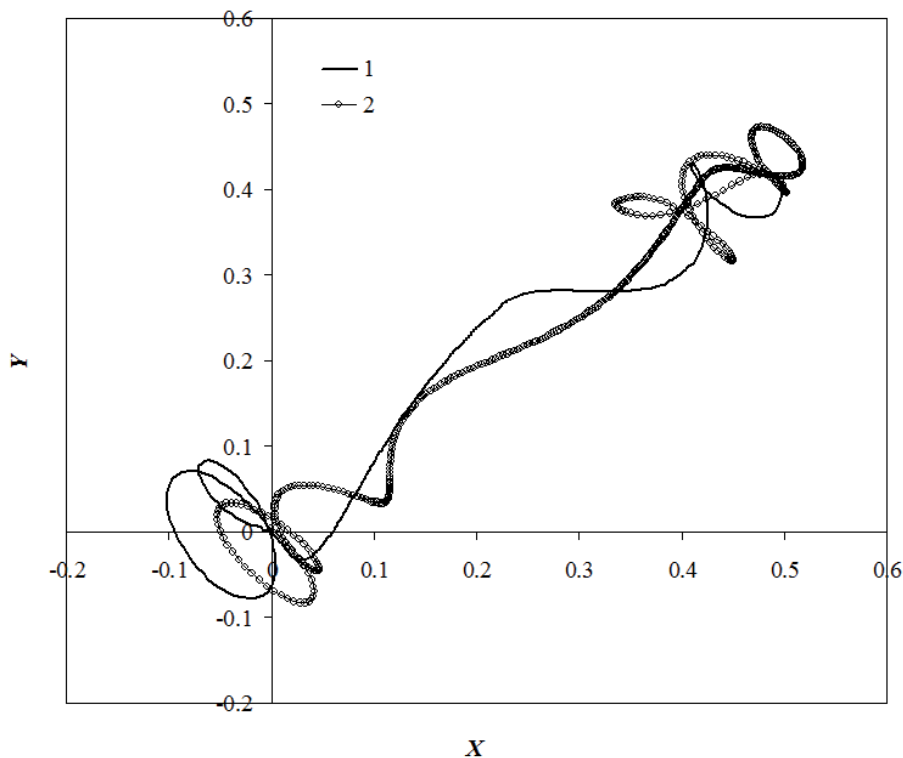


Рис. 4. Проекция траектории тела на плоскости OXY

Траектория под номером 1 соответствует движению от точки \mathbf{R}^0 до точки \mathbf{R}^k , под номером 2 – в обратном направлении. Особенностью траекторий является сложное перемещение тела в начале и в конце движения. Это связано с ориентацией тела в начале движения. В конце движения для достижения точки \mathbf{R}^k с заданной точностью 0,005 также осуществляется маневрирование.

На последующих рисунках показаны кинематические характеристики управляемого движения. На рис. 5 представлено изменение проекции скорости на ось $O_1x - v_1$ во времени, а на рис. 6 – зависимость ω_1 от времени.

До времени $t = 50$ движение происходит от точки \mathbf{R}^0 до точки \mathbf{R}^k , при $t > 50$ движение от \mathbf{R}^k до \mathbf{R}^0 .

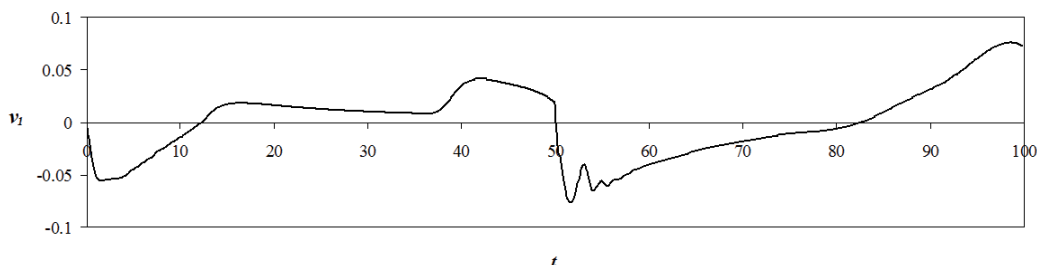


Рис. 5. Изменение проекции скорости на ось $O_1x - v_1$ во времени

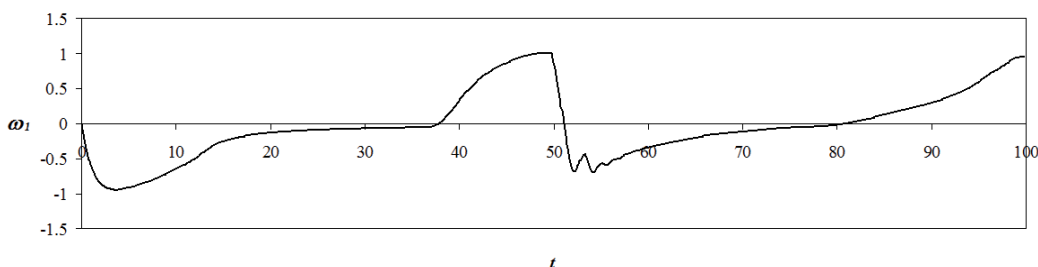


Рис. 6. Зависимость угловой скорости ω_1 от времени

На начальных участках поступательная скорость и скорость вращения изменяются немонотонно. На участках, где скорость вращения роторов постоянная и $\dot{\mathbf{K}}(t) = 0$, под действием вязкого трения движение

замедляется. На конечных отрезках опять происходит заметное изменение скорости.

На рис. 7 приведена зависимость длины пройденного пути от времени $S(t)$ при движении от точки \mathbf{R}^0 до точки \mathbf{R}^k .

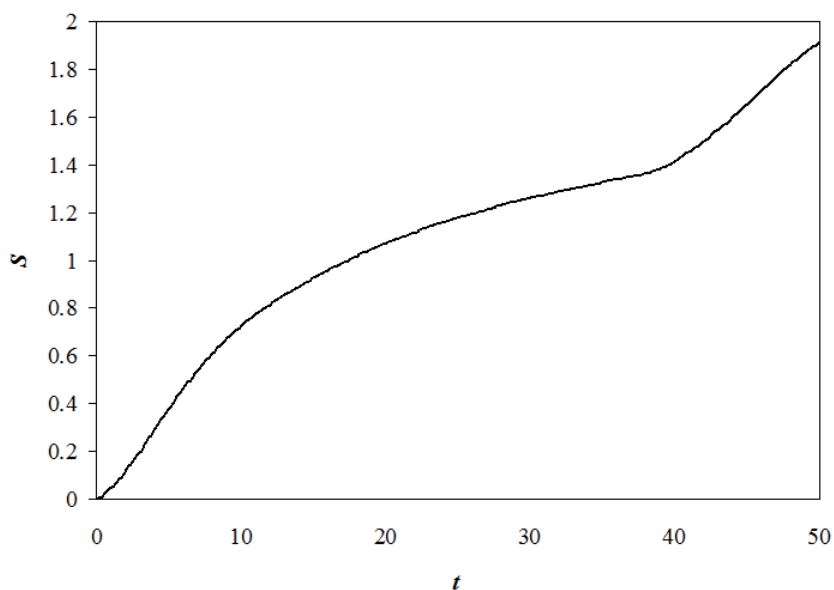


Рис. 7. Зависимость длины пройденного пути от времени

Максимальная длина пути составляет $S = 1,915$, что в 2,7 раза больше расстояния между точками $|\mathbf{R}^k - \mathbf{R}^0|$. Это свидетельствует о сложном криволинейном характере движения между двумя точками.

Вывод

Разработанный алгоритм управления движением жесткого винтообразного тела в вязкой жидкости посредством изменения скоростей вращения внутренних роторов позволяет осуществлять перемещение тела в заданную точку с минимальным отклонением от прямолинейного отрезка.

Библиографические ссылки

1. Тенев В. А., Ветчинин Е. В., Илалетдинов Л. Ф. Аппроксимация управления движением в жидкости тела с винтовой симметрией с внутренними роторами // Интеллектуальные системы в производстве. – 2014. – № 2. – С. 143–147.
2. Воинов О. В. Инерциальное движение тела в идеальной жидкости из состояния покоя // Прикл. мех. и техн. физ. – 2008. – Т. 49, № 4. – С. 214–219.
3. Тенев В. А., Ветчинин Е. В., Илалетдинов Л. Ф. Аппроксимация управления движением в жидкости тела с винтовой симметрией с внутренними роторами // Интеллектуальные системы в производстве. – 2014. – № 2. – С. 143–147.
4. Vetchanin E. V., Kilin A. A., Tenenev V. A., Shaura A. S. Numerical simulation of motion in the viscous fluid of a three-axial ellipsoid controlled by three rotors // Fourth International Conference Geometry, Dynamics, Integrable Systems GDIS

2013: Book of abstracts. – Moscow-Izhevsk : Publishing Center “Institute of Computer Science”, 2013, pp. 54–55.

5. Тенев В. А., Ветчинин Е. В., Илалетдинов Л. Ф. Аппроксимация управления движением в жидкости тела с винтовой симметрией с внутренними роторами // Интеллектуальные системы в производстве. – 2014. – № 2. – С. 143–147.

6. Evgeny V. Vetchanin, Ivan S. Mamaev, Valentin A. Tenenev. The self-propulsion of a body with moving internal masses in a viscous fluid // Regular and Chaotic Dynamics, January 2013, Volume 18, Issue 1-2, pp 100–117.

7. Илалетдинов Л. Ф., Пономарев М. И., Тенев В. А. Планирование численного эксперимента для определения гидродинамических характеристик тела с винтовой симметрией // Интеллектуальные системы в производстве. – 2014. – № 2. – С. 16–20.

8. Там же.

9. Тенев В. А., Ветчинин Е. В., Илалетдинов Л. Ф. Хаотическая динамика в задаче о падении тела винтовой формы в жидкости // Нелинейная динамика. – 2016. – Т. 12, № 1. – С. 99–120.

10. Ветчинин Е. В., Тенев В. А., Шаура А. С. Управление движением жесткого тела в вязкой жидкости // Компьютерные исследования и моделирование. – 2013. – Т. 5, № 4. – С. 659–675.

11. Тенев В. А., Якимович Б. А. Генетические алгоритмы в моделировании систем. – Ижевск : Изд-во ИжГТУ, 2010. – 308 с.

12. Deb K. An efficient constraint handling method for genetic algorithms/ Computer methods in applied mechanics and engineering, 186 (2000). – Pp. 311–338.

13. Тенев В. А., Якимович Б. А. Генетические алгоритмы в моделировании систем. – Ижевск : Изд-во ИжГТУ, 2010. – 308 с.

V. A. Tenenev, DSc (Physics and Mathematics), Professor, Kalashnikov ISTU
L. F. Ilalaitdinov, Post-graduate, Kalashnikov ISTU

Solution of the problem of motion control of a helical device in a viscous fluid

The problem of controlling the motion of a helical device in a viscous fluid is considered. One of the alternative forms of the device is a three-bladed propeller with turning rotors.

Keywords: viscosity fluid, control, inertia robots.

Получено: 17.05.16