

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

УДК 004.94

К. А. Иванов, аспирант
ИжГТУ имени М. Т. Калашникова

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ
С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА КРУПНЫХ ЧАСТИЦ

Рассматриваются методы решения задач газовой динамики методом крупных частиц с использованием различных конечно-разностных схем. Анализ схем осуществляется на примере тестовой задачи, позволяющей оценить качество применяемой вычислительной схемы в условиях распространения по плоскому каналу прямой и отраженной ударной волн. Разбиение расчетной области производится ячейками четырехугольной или треугольной формы. Анализ показал высокую эффективность подхода, в котором на эйлеровом этапе метода параметры на границах смежных ячеек устанавливаются по формулам, справедливым для слабого разрыва газодинамических параметров.

Ключевые слова: метод крупных частиц, слабый разрыв, треугольные и четырехугольные ячейки, регулярная и нерегулярная сетки.

Решаемые в инженерных приложениях задачи нестационарной газовой динамики обладают следующими особенностями:

- расчетная область может быть неодносвязная;
- границы течения газов имеют нелинейный характер и точки излома;

- границы расчетной области могут быть проницаемы, частично проницаемы и непроницаемы и др.

Подобные задачи целесообразно решать методами первого порядка точности по времени и по пространственной координате, в частности, решение может быть выполнено методом крупных частиц. Основная схема метода крупных частиц, изложенная в [1], не является оптимальной. В частности, устойчивый счет трансзвуковых течений с использованием этой схемы возможен при числе Куранта менее 0,25...0,30. При малых дозвуковых течениях следует использовать значения числа Куранта $Ku < 0,25$. Кроме того, в окрестности непроницаемых границ при отражении потока развиваются несоответствующие физике колебательные процессы.

В практике применения метода крупных частиц привлекательными являются конечно-разностные схемы, предложенные А. В. Алиевым (например, [2–6]). В этих схемах на эйлеровом этапе метода значения скорости и давления газа на границах расчетных ячеек рассчитываются с использованием формул, справедливых для слабого разрыва газодинамических параметров. В соответствии с [7] в двумерном случае в уравнениях эйлерового этапа метода крупных частиц

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0; \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0; \\ \rho \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial p u}{\partial x} + \frac{\partial p v}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

производные от давления по пространственным координатам аппроксимируются по формулам

$$\frac{\partial p}{\partial x} \approx \frac{\sum (p_{i+1} + p_i)(y_{i+1} - y_i)}{\sum (x_{i+1} + x_i)(y_{i+1} - y_i)}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} \approx \frac{(-1) \cdot \sum (p_{i+1} + p_i)(x_{i+1} - x_i)}{\sum (x_{i+1} + x_i)(y_{i+1} - y_i)}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p u}{\partial x} + \frac{\partial p v}{\partial y} \approx \\ \approx \frac{\sum [(p_{i+1} u_{i+1} + p_i u_i)(y_{i+1} - y_i) - (p_{i+1} v_{i+1} + p_i v_i)(x_{i+1} - x_i)]}{\sum (x_{i+1} + x_i)(y_{i+1} - y_i)}, \end{aligned} \quad (4)$$

где p_i – давление; u_i – скорость на стороне, которые определяются по формулам (5)–(7) для решения задачи о слабом разрыве; x_i , y_i – координаты центра стороны ячейки; индексы I , $I - 1$ соответствуют номерам ячейки (объема).

В записанных уравнениях давления и скорости на границах ячеек определяются решением задачи о распаде слабого разрыва газодинамических параметров:

$$p_i = 0,5(p_{I-1} + p_I + a_i(u_{I-1} - u_I)); \quad (5)$$

$$u_i = 0,5\left(u_{I-1} + u_I + \frac{p_{I-1} - p_I}{a_i}\right); \quad (6)$$

$$a_i = \sqrt{\frac{(k_{I-1} + k_I)(p_{I-1} + p_I)(\rho_{I-1} + \rho_I)}{8}}. \quad (7)$$

Ниже рассматриваются результаты расчетов течения газа (воздуха) в плоском канале, левая половина которого в начальный момент времени заполнена плотным газом (давление в полубласти 505 кПа), а в правой половине давление составляет 101 кПа. Расчетная область – плоский канал шири-

ной 0,1 м и длиной 1,0 м. Границы канала непроницаемые. Расчеты выполняются в двухмерной постановке на структурированных и неструктурированных расчетных сетках четырехугольной и треугольной форм. Построение сетки производилось в сеточном генераторе GMSH [8]. Расчеты выполнялись в период времени до 0,0020 с, что соответствует времени, когда сформировалась отраженная ударная волна. Это позволяет оценить качество выбранных конечно-разностных алгоритмов. Для сравнения наряду с выше записанной рассматривается конечно-разностная схема, рассмотренная в [9], в которой для расчета треугольных ячеек применяются уравнения (1)–(4), однако значения давлений и скоростей на границах ячеек рассчитываются по основной схеме метода крупных частиц [10].

Результаты численного расчета показаны на рис. 1 и 2. На рисунках представлены результаты расчета течения в плоском канале при использовании треугольных ячеек (структурированных – *а, б* и неструктурированных – *в, г*). Рис. 1 соответствует результатам, полученным расчетом по методу, предложенному в [11], а рис. 2 – результатам, полученным при использовании схем эйлера этапа по работам [12] (уравнения (1)–(7)). На рис. 1, *а, б*, 2, *а, б* приводятся результаты расчетов, соответствующие моменту времени, когда ударная волна, распространяющаяся от левой границы к правой, приблизилась к непроницаемой границе (момента времени 0,0009 с). На рис. 1 *в, г*, 2, *в, г* приводятся результаты

расчетов, соответствующие моменту времени, когда ударная волна отразилась от непроницаемой границы (момента времени 0,0018 с).

Представленные результаты позволяют сделать следующие выводы:

- конечно-разностная схема, предложенная в [13] (первая схема), обладает меньшей устойчивостью, что требует уменьшения шага интегрирования по сравнению со схемой [14] (вторая схема). В итоге это увеличивает общее время расчета газодинамической задачи более чем в 2,5...4 раза;

- расчеты по первой схеме обнаруживают нефизические колебания давления и скорости во фронте ударной волны (рис. 1, *а*). Эти колебания меньше при использовании неструктурированной сетки, что может быть обусловлено увеличенными значениями аппроксимационной вязкости при использовании такой сетки (рис. 1, *в*);

- расчеты по первой схеме не обеспечивают удовлетворительных результатов при расчете параметров в отраженной ударной волне (рис. 1, *б, г*);

- расчеты по второй схеме обеспечивают надежные и удовлетворительные по точности результаты как во фронте прямой ударной волны (рис. 2, *а, в*), так и во фронте отраженной волны (рис. 2, *б, г*);

- конечно-разностную схему, предложенную в [15] (уравнения (2)–(7)), можно рекомендовать для решения внутренних и внешних задач газовой динамики в областях сложной формы, в том числе для расчета многокомпонентного газа.

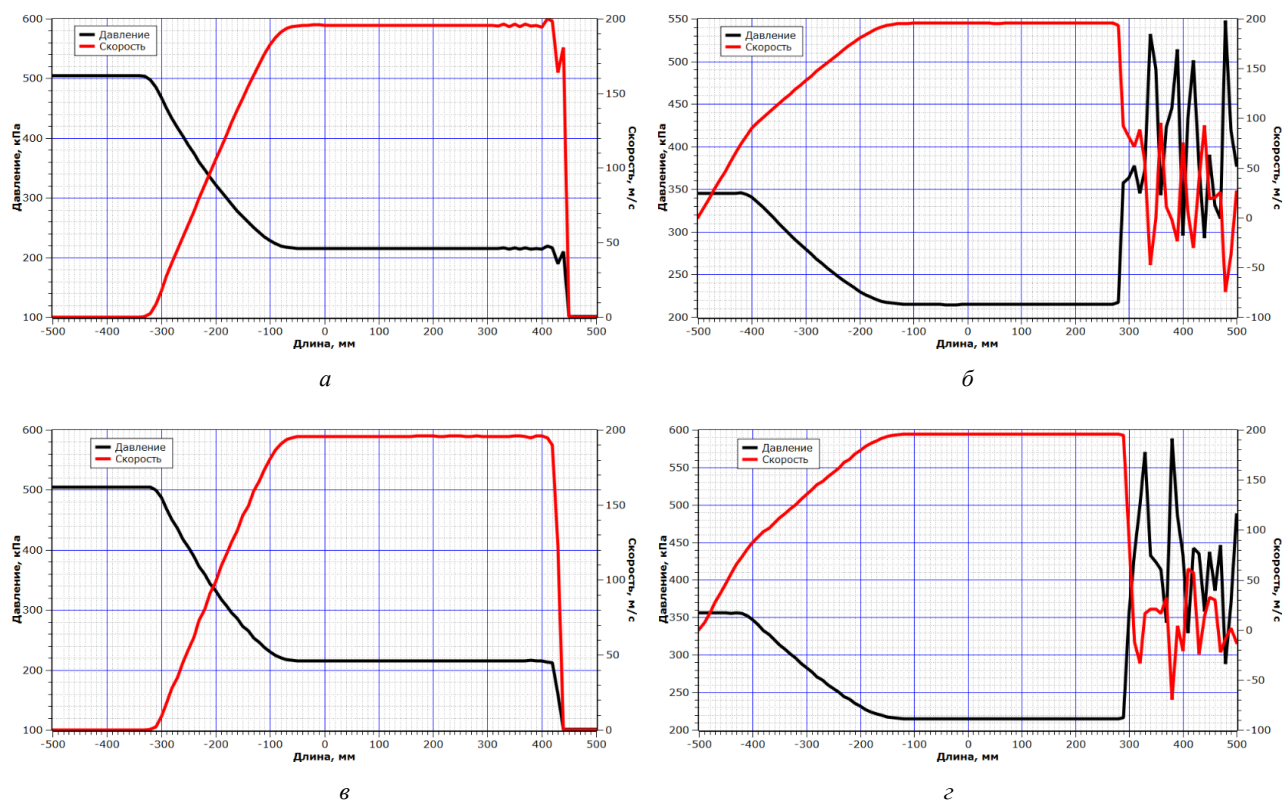


Рис. 1. Распределение давления и скорости для различных моментов времени, полученные с помощью метода [16]

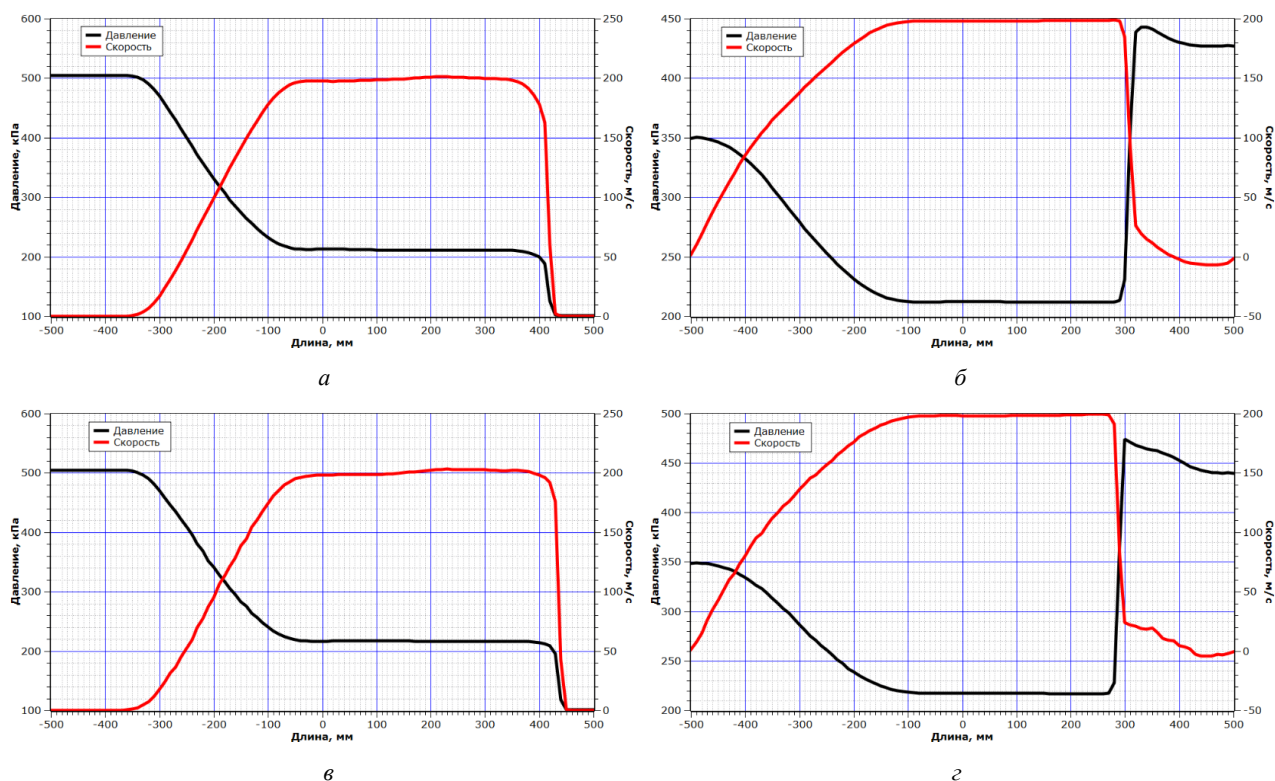


Рис. 2. Распределение давления и скорости для различных моментов времени, полученные при использовании метода [17]

Библиографические ссылки

1. Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М. Метод крупных частиц в газовой динамике. – М.: Наука, 1982. – 392 с.
2. Численный эксперимент в теории РДТТ / А. М. Липанов, В. П. Бобрышев, А. В. Алиев и др. – Екатеринбург: Наука, 1994. – 303 с.
3. Алиев А. В., Андреев В. В. Разработка параллельных алгоритмов расчета задач газовой динамики методом крупных частиц // Интеллектуальные системы в производстве. – 2006. – № 1 (7). – С. 4–17.
4. Алиев А. В., Блинов Д. С. Решение газодинамических задач в областях сложной формы с использованием конечно-объемных алгоритмов метода крупных частиц // Вестник ИжГТУ. – 2009. – № 1 (41). – С. 151–154.
5. Алиев А. В., Миронов А. В. Моделирование газодинамических процессов в несимметричных сопловых блоках // Известия РАН. – 2013. – № 3. – С. 40–45.
6. Алиев А. В., Мищенко О. В. Математическое моделирование в технике. – М.: Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2012. – 476 с.
7. Там же.

8. Geuzaine C. and Remacle J.-F. Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 79(11), pp. 1309–1331, 2009.
9. Ливеровский Р. И., Шевырев С. П. Численное моделирование плоских задач сверхзвуковой газовой динамики на треугольной сетке // Вестник РУДН. Сер. Математика. Информатика. Физика. – 2014. – № 4. – С. 23–32.
10. Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М. Указ. соч. – 392 с.
11. Ливеровский Р. И., Шевырев С. П. Численное моделирование плоских задач сверхзвуковой газовой динамики на треугольной сетке. – С. 23–32.
12. Алиев А. В., Мищенко О. В. Указ. соч. – 476 с.
13. Ливеровский Р. И., Шевырев С. П. Численное моделирование плоских задач сверхзвуковой газовой динамики на треугольной сетке. – С. 23–32.
14. Алиев А. В., Мищенко О. В. Указ. соч. – 476 с.
15. Там же.
16. Ливеровский Р. И., Шевырев С. П. Численное моделирование плоских задач сверхзвуковой газовой динамики на треугольной сетке. – С. 23–32.
17. Алиев А. В., Мищенко О. В. Указ. соч. – 476 с.

K. A. Ivanov, Post-graduate, Kalashnikov ISTU

Numerical Simulation of Plane Cases of Gas Dynamics by Discrete Element Method

This article presents the methods for solving the gas dynamic cases with different finite difference schemes of the discrete element method. Scheme analysis was performed by a test case, which made possible to assess the used computational scheme properties for plane flow propagation in straight channel with direct and reflected shock waves. Mesh discretization was performed with quad and triangular cells. Results showed the high quality of the computational algorithm, which incorporates at the Euler stage parameters at the side boundaries calculated with the equations of gas properties of small decay.

Keywords: discrete element method, weak decay, quadrangular and triangular meshes, regular and irregular meshes.