УДК 517.547(045)

И. В. Дзогий, старший преподаватель
Брянский государственный университет имени академика И. Г. Петровского

ОЦЕНКИ МОДУЛЯ АНАЛИТИЧЕСКОЙ В ПОЛУПЛОСКОСТИ ФУНКЦИИ

Рассмотрены оценки модуля аналитической в правой полуплоскости функции при условии, что есть некоторая оценка убывания модуля функции на мнимой оси или части мнимой оси. Получено расширение класса функций, для которых справедливо утверждение теоремы Ю. И. Маслякова до класса И. И. Привалова.

Ключевые слова: модуль аналитической функции, правая полуплоскость, верхняя полуплоскость, единичный круг, класс функций И. И. Привалова.

Введение

В комплексном анализе при проведении различного рада исследований часто возникает вопрос о том, что, если функция $f(z)$ голоморфна в правой полуплоскости и почти всюду на границе удовлетворяет оценке $|f(iy)|\le e^{-\varphi(|y|)}$, то что можно сказать об убывании $|f(z)|$ по другим направлениям, когда z приближается к бесконечно удаленной точке. Такая постановка задачи классическая и напоминает известную теорему Фрагмена – Линделефа, где, как известно, вместо убывания модуля аналитический функции в правой полуплоскости оценивается его рост исходя из роста на мнимой оси. Подобная оценка возникает при исследовании различных вопросов анализа, начиная с локализуемости замкнутых идеалов аналитических функций и заканчивая теоремой Рисса – Торина в теории операторов. Задачи такого типа впервые были рассмотрены Ю. И. Масляковым и опубликованы в журнале «Математический сборник» в 1966 г., где функция $f(z)$, участвующая в оценке, аналитична в правой полуплоскости и непрерывна вплоть до ее границы, включая бесконечно удаленную точку, и ограничена [1]. Оказалось, что можно усилить этот результат. Установлено, что, если функция $f(z)$ принадлежит классам И. И. Привалова [2], то утверждение теоремы Маслякова остается в силе. То есть во всей правой полуплоскости справедлива следующая оценка: $|f(z)|\le Ke^{-\varphi(|z|)}$, $K=e^{\varphi(1)-\varphi(0)}$ и эта оценка точная [3].

Основной результат

Лемма 1. *Пусть функция $f(z)$ аналитична в верхней полуплоскости $\Pi_+=\{x+iy:y>0\}$; тогда справедлива следующая оценка:*

$$\ln\left|f(z)\right|\le 2r\lim_{R\to\infty}\frac{1}{\pi R}\int_0^{\pi}\ln^+\left|f\left(\mathrm{R}e^{i\theta}\right)\right|d\theta+\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\ln\left|f(t)\right|}{(t-x)^2+y^2}dt,$$

$$z\in\Pi_+ \qquad (1)$$

Доказательство. Представим функцию $f(z)$ с помощью обобщенной формулы Неванлины в верхнем полукруге Q_R [4] *при некотором $R>R^|$, $z=re^{i\psi}\in Q_R$:*

$$\ln\left|f(z)\right|=\sum_{z_k\in Q_R}\ln\left|\frac{R(z-z_k)}{R^2-\overline{z_k}z}\frac{R^2-z_kz}{R\left(z-\overline{z_k}\right)}\right|+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{R^2-|z|^2}{\left|\mathrm{R}e^{i\theta}-z\right|^2}-\frac{R^2-|z|^2}{\left|\mathrm{R}e^{-i\theta}-z\right|^2}\right)\ln\left|f\left(\mathrm{R}e^{i\theta}\right)\right|d\theta+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-R}^{R}\left(\frac{r\sin\psi}{|t-z|^2}-\frac{R^2r\sin\psi}{\left|R^2-zt\right|^2}\right)\ln\left|f(t)\right|dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-R}^{R}\left(\frac{r\sin\psi}{|t-z|^2}-\frac{R^2r\sin\psi}{\left|R^2-zt\right|^2}\right)d\varphi(t). \qquad (2)$$

Оценим $\displaystyle\sum_{z_k\in Q_R}\ln\left|\frac{R(z-z_k)}{R^2-\overline{z_k}z}\frac{R^2-z_kz}{R\left(z-\overline{z_k}\right)}\right|$. (3)

При $z=\mathrm{R}e^{i\psi}$ имеем:

$$\left|\frac{R\left(\mathrm{R}e^{i\psi}-z_k\right)}{R^2-\overline{z_k}\,\mathrm{R}e^{i\psi}}\right|\left|\frac{R^2-z_k\,\mathrm{R}e^{i\psi}}{R\left(\mathrm{R}e^{i\psi}-\overline{z_k}\right)}\right|=$$

$$=\frac{R\left(\mathrm{R}e^{i\psi}-z_k\right)}{\left|e^{i\psi}\right|\left|R\left(\mathrm{R}e^{-i\psi}-\overline{z_k}\right)\right|}\frac{\left|e^{i\psi}\right|\left|R\left(\mathrm{R}e^{-i\psi}-z_k\right)\right|}{\left|R\left(\mathrm{R}e^{i\psi}-\overline{z_k}\right)\right|}=1. \qquad (4)$$

Пусть теперь $z=t(\cos\psi+i\sin\psi)$, $\psi=0,\pi$, тогда $z=\pm t$, $|t|\le R$:

$$\left|\frac{R(t-z_k)}{R^2-\overline{z_k}t}\frac{R^2-z_kt}{R\left(t-\overline{z_k}\right)}\right|=\left|\frac{t-z_k}{t-\overline{z_k}}\right|\left|\frac{R^2-z_kt}{R^2-\overline{z_k}t}\right|=1. \qquad (5)$$

По принципу максимума модуля, учитывая (4) и (5) в Q_R, получим

$$\sum_{z_k\in Q_R}\ln\left|\frac{R(z-z_k)}{R^2-\overline{z_k}z}\frac{R^2-z_kz}{R\left(z-\overline{z_k}\right)}\right|\le\sum_{z_k\in Q_R}\ln|1|=0. \qquad (6)$$

Рассмотрим выражение

$$\frac{r\sin\psi}{|t-z|^2}-\frac{R^2 r\sin\psi}{|R^2-zt|^2}=\sin\psi\left(\frac{1}{|t-z|^2}-\frac{R^2}{|R^2-zt|^2}\right), \quad (7)$$

где $z = x+i\,y = re^{i\psi}$. Имеем

$$r\sin\psi\left(\frac{1}{(t-r\cos\psi)^2+r^2\sin^2\psi}-\frac{R^2}{(R^2-rt\cos\psi)^2+r^2t^2\sin^2\psi}\right)=$$

$$=r\sin\psi\left(\frac{R^4-r^2t^2-2R^2rt\cos\psi-R^2t^2-r^2R^2+2R^2rt\cos\psi}{\left((t-r\cos\psi)^2+r^2\sin^2\psi\right)\left((R^2-rt\cos\psi)^2+r^2t^2\sin^2\psi\right)}\right)=$$

$$=r\sin\psi\left(\frac{R^2(R^2-r^2)-t^2(R^2-r^2)}{\left((t-r\cos\psi)^2+r^2\sin^2\psi\right)\left((R^2-rt\cos\psi)^2+r^2t^2\sin^2\psi\right)}\right)=$$

$$=\frac{r\sin\psi(R^2-r^2)(R^2-t^2)}{\left((t-r\cos\psi)^2+r^2\sin^2\psi\right)\left((R^2-rt\cos\psi)^2+r^2t^2\sin^2\psi\right)}\geq 0, \quad (8)$$

откуда следует, что

$$\frac{1}{\pi}\int_{-R}^{R}\left(\frac{r\sin\psi}{|t-z|^2}-\frac{R^2r\sin\psi}{|R^2-zt|^2}\right)d\varphi(t)\leq 0, \quad (9)$$

так как $d\varphi(t)\leq 0$. Рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{\pi}\int_{-R}^{R}\left(\frac{r\sin\psi}{|t-z|^2}-\frac{R^2r\sin\psi}{|R^2-zt|^2}\right)\ln|f(t)|\,dt, \quad (10)$$

учитывая (8), получим, что это выражение представимо следующим образом:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-R}^{R}\left(\frac{r\sin\psi(R^2-r^2)(R^2-t^2)}{\left((t-r\cos\psi)^2+r^2\sin^2\psi\right)\left((R^2-rt\cos\psi)^2+r^2t^2\sin^2\psi\right)}\right)\ln|f(t)|\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-R}^{R}\left(\frac{R^4r\sin\psi+r^2t^3\sin\psi-R^2rt^2\sin\psi-R^2r^3\sin\psi}{\left((t-r\cos\psi)^2+r^2\sin^2\psi\right)R^4+\left((t-r\cos\psi)^2+r^2\sin^2\psi\right)\left(r^2t^2-2R^2tr\cos\psi\right)}\right)\ln|f(t)|\,dt. \quad (11)$$

Далее, имеем:

$$\frac{R^2-r^2}{|\mathrm{Re}^{i\theta}-re^{i\psi}|^2}-\frac{R^2-r^2}{|\mathrm{Re}^{-i\theta}-re^{i\psi}|^2}=\frac{(R^2-r^2)\left((R\cos\theta-r\cos\psi)^2+(R\sin\theta+r\sin\psi)^2-(R\cos\theta-r\cos\psi)^2-(R\sin\theta-r\sin\psi)^2\right)}{\left((R\cos\theta-r\cos\psi)^2+(R\sin\theta-r\sin\psi)^2\right)\left((R\cos\theta-r\cos\psi)^2+(R\sin\theta+r\sin\psi)^2\right)}=$$

$$=\frac{(R^2-r^2)4Rr\sin\theta\sin\psi}{(R^2+r^2)^2-4Rr(R^2+r^2)\cos\theta\cos\psi-4R^2r^2\left(\sin^2\theta\sin^2\psi-\cos^2\theta\cos^2\psi\right)}=$$

$$=\frac{1}{R}\frac{4R^3r\sin\theta\sin\psi-4Rr^3\sin\theta\sin\psi}{R^3+2Rr^2+\frac{r^4}{R}-4r(R^2+r^2)\cos\theta\cos\psi-4Rr^2\left(\sin^2\theta\sin^2\psi-\cos^2\theta\cos^2\psi\right)}. \quad (12)$$

Тогда можно записать

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{R^2-|z|^2}{|\mathrm{Re}^{i\theta}-z|^2}-\frac{R^2-|z|^2}{|\mathrm{Re}^{-i\theta}-z|^2}\right)\ln|f(\mathrm{Re}^{i\theta})|\,d\theta=\frac{1}{2\pi R}\int_0^{\pi}\frac{\left(4R^3r\sin\theta\sin\psi-4Rr^3\sin\theta\sin\psi\right)\ln|f(\mathrm{Re}^{i\theta})|\,d\theta}{R^3+2Rr^2+\frac{r^4}{R}-4r(R^2+r^2)\cos\theta\cos\psi-4Rr^2\left(\sin^2\theta\sin^2\psi-\cos^2\theta\cos^2\psi\right)}. \quad (13)$$

Учитывая (6), (9), (11) и (13), получим:

$$\ln|f(z)|\leq\frac{1}{2\pi R}\int_0^{\pi}\frac{\left(4R^3r\sin\theta\sin\psi-4Rr^3\sin\theta\sin\psi\right)\ln|f(\mathrm{Re}^{i\theta})|\,d\theta}{R^3+2Rr^2+\frac{r^4}{R}-4r(R^2+r^2)\cos\theta\cos\psi-4Rr^2\left(\sin^2\theta\sin^2\psi-\cos^2\theta\cos^2\psi\right)}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-R}^{R}\frac{\left(R^4r\sin\psi+r^2t^3\sin\psi-R^2rt^2\sin\psi-R^2r^3\sin\psi\right)\ln|f(t)|\,dt}{\left((t-r\cos\psi)^2+r^2\sin^2\psi\right)R^4+\left((t-r\cos\psi)^2+r^2\sin^2\psi\right)\left(r^2t^2-2R^2tr\cos\psi\right)}. \quad (14)$$

При $R \to \infty$ имеем:

$$\ln\left|f(z)\right| \le 2r \lim_{R\to\infty} \frac{1}{\pi R} \int_0^{\pi} \sin\theta \sin\psi \ln\left|f\left(\mathrm{Re}^{i\theta}\right)\right| d\theta +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{r \sin\psi \ln\left|f(t)\right| dt}{\left(t - r\cos\psi\right)^2 + r^2 \sin^2\psi},$$

учитывая, что $x = r\cos\psi$, $y = r\sin\psi$, а также $0 \le \sin\theta \le 1$ при $\theta \in [0,\pi]$ и $0 \le \sin\psi \le 1$ при $\psi \in [0,\pi]$, получим

$$\ln\left|f(z)\right| \le 2r \lim_{R\to\infty} \frac{1}{\pi R} \int_0^{\pi} \ln\left|f\left(\mathrm{Re}^{i\theta}\right)\right| d\theta + \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln\left|f(t)\right| dt}{\left(t-x\right)^2 + y^2}. \tag{15}$$

Представим функцию $\ln a$ следующим образом:

$$\ln a = \ln^+ a - \ln^- a, \tag{16}$$

где

$$\ln^+ a = \begin{cases} \ln a, \text{ при } a > 1 \\ 0, \text{при } 0 < a \le 1 \end{cases} \text{ и } \ln^- a = \begin{cases} 0, \text{ при } a > 1 \\ -\ln a, \text{ при } 0 < a \le 1 \end{cases} \tag{17}$$

тогда

$$\ln a \le \ln^+ a. \tag{18}$$

Учитывая (18), неравенство (15) примет вид

$$\ln\left|f(z)\right| \le 2r \lim_{R\to\infty} \frac{1}{\pi R} \int_0^{\pi} \ln^+\left|f\left(\mathrm{Re}^{i\theta}\right)\right| d\theta + \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln\left|f(t)\right|}{\left(t-x\right)^2 + y^2} dt.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть функция $f(z)$ аналитична в правой полуплоскости $\Pi^+ = \{x + i\,y : x > 0\}$; тогда справедлива следующая оценка:*

$$\ln\left|f(z)\right| \le 2r \lim_{R\to\infty} \frac{1}{\pi R} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \ln^+\left|f\left(Re^{i\theta}\right)\right| d\theta + \frac{x}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln\left|f(it)\right|}{\left(t-y\right)^2 + x^2} dt, z \in \Pi^+. \tag{19}$$

Доказательство. По лемме 1 функция $\tilde{f}(w)$ аналитическая в верхней полуплоскости $\Pi_+ = \{u + i\,v : v > 0\}$ имеет оценку:

$$\ln\left|\tilde{f}(w)\right| \le 2r \lim_{R\to\infty} \frac{1}{\pi R} \int_0^{\pi} \ln^+\left|\tilde{f}\left(\mathrm{Re}^{i\tilde{\theta}}\right)\right| d\tilde{\theta} + \frac{v}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln\left|\tilde{f}(t)\right|}{\left(t-u\right)^2 + v^2} dt, w \in \Pi_+. \tag{20}$$

Конформно отобразим Π_+ на Π^+ при помощи функции

$$-i\,w = z. \tag{21}$$

Делая замену

$$w = i\,z,\ u = -y,\ v = x, \tag{22}$$

получим

$$\ln\left|\tilde{f}(w)\right| = \ln\left|\tilde{f}(i\,z)\right| = \ln\left|f(z)\right|, -\frac{\pi}{2} < \theta < +\frac{\pi}{2}. \tag{23}$$

Учитывая (22) и (23), неравенство (20) примет вид

$$\ln\left|f(z)\right| \le 2r \lim_{R\to\infty} \frac{1}{\pi R} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \ln^+\left|f\left(\mathrm{Re}^{i\theta}\right)\right| d\theta + \frac{x}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln\left|f(it)\right|}{\left(t-y\right)^2 + x^2} dt.$$

Лемма доказана.

Обозначим через $N_p\left(\Pi^+\right)$ класс аналитических в правой полуплоскости $\Pi^+ = \{x + iy : x > 0\}$ функций $f(z)$, удовлетворяющих условиям:

1) $\sup\limits_{x>0}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(\ln^+\left|f(x+iy)\right|\right)^p}{1+y^2} dy\right\} < +\infty$, $p > 0$, где

$$\ln^+ a = \begin{cases} \ln a, \text{ при } a > 0; \\ 0, \text{ при } 0 < a \le 1. \end{cases}$$

2) $\lim\limits_{R\to\infty} \frac{1}{\pi R} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \ln^+\left|f\left(\mathrm{Re}^{i\theta}\right)\right| d\theta = 0.$

Такой класс функций называют классом И. И. Привалова в правой полуплоскости.

Лемма 3. *Если функция $f(z) \in N_p\left(\Pi^+\right)$, то*

$$\ln\left|f(z)\right| \le \frac{x}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln\left|f(it)\right|}{\left(t-y\right)^2 + x^2} dt \tag{24}$$

при всех $z \in \Pi^+ = \{x + i\,y : x > 0\}$.

Доказательство. По лемме 2. Функция $\ln\left|f(z)\right|$ имеет оценку

$$\ln\left|f(z)\right| \le 2r \lim_{R\to\infty} \frac{1}{\pi R} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \ln^+\left|f\left(\mathrm{Re}^{i\theta}\right)\right| d\theta + \frac{x}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln\left|f(it)\right|}{\left(t-y\right)^2 + x^2} dt.$$

Так как $f(z) \in N_p\left(\Pi^+\right)$, то $\lim\limits_{R\to\infty} \frac{1}{\pi R} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \ln^+\left|f\left(\mathrm{Re}^{i\theta}\right)\right| d\theta = 0$, и справедливо следующее неравенство: $\ln\left|f(z)\right| \le \frac{x}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln\left|f(it)\right|}{\left(t-y\right)^2 + x^2} dt$.

Лемма доказана.

Обозначим через A класс положительных возрастающих непрерывных функций $\varphi(t)$ на $[0,+\infty)$, удовлетворяющих условиям:

a) $\varphi\left(e^t\right)$ выпукла вниз при $t \ge 0$;

b) $\int_0^{\infty} \frac{\varphi(t)}{1+t^2} dt < +\infty$;

c) $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{\varphi\left(e^t\right)}{t} = +\infty$.

Теорема 1. *Пусть функция*

$$f(z) \in N_p(\Pi^+),\ p > 1, \tag{25}$$

и на границе Π^+ *почти всюду удовлетворяет условию*

$$|f(iy)| \le e^{-\varphi(|y|)} (-\infty < y < +\infty), \tag{26}$$

где $\varphi(t) \in A$*. Тогда всюду в* Π^+ *справедлива оценка*

$$|f(z)| \le Ke^{-\varphi(|z|)},\ K = e^{\varphi(1)-\varphi(0)}. \tag{27}$$

Доказательство. Из леммы 3 и условия (26) следует, что

$$\ln|f(z)| \le \frac{x}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln|f(it)|}{(t-y)^2+x^2}dt \le -\frac{x}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(|t|)}{(t-y)^2+x^2}dt. \tag{28}$$

Перепишем это неравенство следующим образом:

$$\ln|f(z)| \le -\left(\frac{x}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\ln e^{\varphi(t)}}{(t-y)^2+x^2}dt + \frac{x}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\ln e^{\varphi(t)}}{(t+y)^2+x^2}dt\right). \tag{29}$$

Рассмотрим функцию

$$m(s) = \max_{t\ge1} \frac{t^s}{e^{\varphi(t)}}. \tag{30}$$

Функция $m(s)$ определена при всех $s \ge 0$, так как для таких s, с учетом того, что $\varphi(t) \in A$, существует

$$\ln m(s) = \max_{t\ge1}\left(s\ln t - \varphi(t)\right) = \max_{\tau\ge0}\left(s\tau - \varphi(e^\tau)\right). \tag{31}$$

$\ln m(s)$ является функцией, двойственной по Юнгу к функции $\varphi(e^\tau)$.

Заметим также, что функция $m(s)$ – возрастающая при $s \ge 0$ и

$$m(0) = e^{-\varphi(1)}. \tag{32}$$

Далее, с использованием функции $m(s)$, построим функцию Карлемана–Островского:

$$T(t) = \max_{s\ge0} \frac{t^s}{m(s)}. \tag{33}$$

Функция $T(t)$ существует для любого $t \ge 1$, поскольку существует

$$\ln T(t) = \max_{s\ge0}\left(s\ln t - \ln m(s)\right). \tag{34}$$

Функция $\ln T(e^\tau)$ – двойственная по Юнгу к функции $\ln m(s)$, а следовательно, $\ln T(t)$ существует для всех $t \ge 1$.

Рассмотрим случай, когда $0 \le t < 1$. При этих значениях функция $T(t)$ тоже определена, так как в этом случае с ростом s функция $\frac{t^s}{m(s)}$ убывает и поэтому $T(t) = \frac{1}{m(0)}$ $(0 \le t < 1)$. Из соотношения (32) получим

$$T(t) = e^{\varphi(1)},\ 0 \le t < 1. \tag{35}$$

Учитывая, что $\varphi(e^\tau)$ выпукла вниз, имеем

$$\varphi(e^\tau) \equiv \ln T(e^\tau), \tau \ge 0, \tag{36}$$

откуда

$$e^{\varphi(t)} \equiv T(t),\ t \ge 1, \tag{37}$$

и

$$e^{\varphi(t)} \ge K_1 T(t),\ K_1 = e^{\varphi(0)-\varphi(1)},\ e^{\varphi(t)} \le T(t). \tag{38}$$

Пусть s_0 – неотрицательное число, такое, что

$$\frac{r^{s_0}}{m(s_0)} = T(r). \tag{39}$$

Оценим интегралы, стоящие в правой части неравенства (29).

Из (37)–(39) имеем

$$\ln|f(z)| \le -\left(\frac{x}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\ln e^{\varphi(t)}}{(t-y)^2+x^2}dt + \frac{x}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\ln e^{\varphi(t)}}{(t+y)^2+x^2}dt\right) \le -\left(\frac{x}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\ln(K_1T(t))}{(t-y)^2+x^2}dt + \frac{x}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\ln(K_1T(t))}{(t+y)^2+x^2}dt\right) =$$

$$= -\left(\frac{x}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{(\ln K_1 - \ln m(s_0) + \ln t^{s_0})}{(t-y)^2+x^2}dt + \frac{x}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{(\ln K_1 - \ln m(s_0) + \ln t^{s_0})}{(t+y)^2+x^2}dt\right) =$$

$$= -\left(\frac{x}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\ln\frac{K_1}{m(s_0)}}{(t-y)^2+x^2}dt + \frac{x}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\ln\frac{K_1}{m(s_0)}}{(t+y)^2+x^2}dt\right) - \left(\frac{x}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{s_0\ln t}{(t-y)^2+x^2}dt + \frac{x}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{s_0\ln t}{(t+y)^2+x^2}dt\right). \tag{40}$$

Вычислим интегралы, стоящие в правой части неравенства (40):

$$\frac{x}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\ln\dfrac{K_1}{m(s_0)}}{(t-y)^2+x^2}dt=\frac{\ln\dfrac{K_1}{m(s_0)}}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{d\left(\dfrac{t-y}{x}\right)}{\left(\dfrac{t-y}{x}\right)^2+1}=$$

$$=\frac{\ln\dfrac{K_1}{m(s_0)}}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{t-y}{x}\right)\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{\ln\dfrac{K_1}{m(s_0)}}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right); \quad (41)$$

$$\frac{x}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\ln\dfrac{K_1}{m(s_0)}}{(t+y)^2+x^2}dt=\frac{\ln\dfrac{K_1}{m(s_0)}}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{d\left(\dfrac{t+y}{x}\right)}{\left(\dfrac{t+y}{x}\right)^2+1}=$$

$$=\frac{\ln\dfrac{K_1}{m(s_0)}}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{t+y}{x}\right)\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{\ln\dfrac{K_1}{m(s_0)}}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right). \quad (42)$$

Рассмотрим функцию

$$u_1(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right). \quad (43)$$

Это гармоническая функция на всей комплексной плоскости, кроме точки $(0,0)$, так как

$$\frac{\partial\ln\left(x^2+y^2\right)}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2};\ \frac{\partial^2\ln\left(x^2+y^2\right)}{\partial x^2}=\frac{2y^2-2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2};$$

$$\frac{\partial\ln\left(x^2+y^2\right)}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2};\ \frac{\partial^2\ln\left(x^2+y^2\right)}{\partial y^2}=\frac{2x^2-2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2};$$

$$\frac{\partial^2u_1(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u_1(x,y)}{\partial y^2}=\frac{2y^2-2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{2x^2-2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=0. \quad (44)$$

На границе правой полуплоскости Π^+ функция $u_1(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$ равна

$$\ln\left(0+t^2\right)=2ln|t|. \quad (45)$$

Представим функцию $u_1(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)=$ $=2\ln r$ через ядро Пуассона для $\operatorname{Re}z\ge 0$:

$$2\ln r=\frac{x}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2ln|t|}{(t-y)^2+x^2}dt. \quad (46)$$

Умножим обе части этого равенства на $\dfrac{s_0}{2}$, получим

$$\ln r^{s_0}=\frac{x}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{s_0\,ln|t|}{(t-y)^2+x^2}dt=$$

$$=\frac{x}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{s_0\ln t}{(t-y)^2+x^2}dt+\frac{x}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{s_0\ln t}{(t+y)^2+x^2}dt. \quad (47)$$

Правая часть равенства (47) содержится в правой части неравенства (40), таким образом, получим

$$ln|f(z)|\le-\left(\ln r^{s_0}-\ln m(s_0)+\ln K_1\right)=$$

$$=-\left(\ln\frac{r^{s_0}}{m(s_0)}+\ln K_1\right). \quad (48)$$

Из соотношений (41) и (42) следует

$$|f(z)|\le Ke^{-\varphi(|z|)},\quad K=K_1^{-1}=e^{\varphi(1)-\varphi(0)}. \quad (49)$$

Теорема доказана.

Библиографические ссылки

1. *Масляков Ю. И.* Об убывании функций, аналитических в полуплоскости // Математический сборник. – 1966. – Т. 69, № 4. – С. 658–662.

2. *Привалов И. И.* Граничные значения однозначных аналитических функций. – М. ; Л. : Гостехиздат, 1950. – 336 с.

3. *Щербенко И. В., Яшина Е. В.* О некоторых оценках в одном пространстве аналитических в полуплоскости функций // Материалы Воронежской весенней математический школы. Современные методы теории краевых задач. – Воронеж, 2003. – С. 161–162.

.

* * *

I. V. Dzogij, Senior Teacher, Bryansk State University n.a. Academician I. G. Petrovski

Estimation of Module for the Function Which Is Analytic at Half-Plane

The paper considers the estimation of module for the function which is analytic at the right half-plane provided that there is some estimation for the decrease in the function module at an imaginary axis or at its part. The extension of the function class to the class of Privalov I. I. has been obtained, the statement of the theorem by Maslyakov Y. I. being valid for this extension.

Keywords: module of the analytic function, right half-plane, upper half-plane, unit circle, function class by Privalov I. I.

Получено: 02.11.16