

УДК 621.391

В. А. Пономарев, доктор технических наук, профессор
 О. В. Пономарева, кандидат технических наук, доцент
 Н. В. Пономарева, аспирант
 ИжГТУ имени М. Т. Калашникова

ИНВЕРСИЯ ДИСКРЕТНОГО ВРЕМЕНИ И ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Рассмотрено применение фундаментального понятия инверсии дискретного времени в векторном анализе сигналов, заданных на конечных интервалах. Исследована взаимосвязь параметрического дискретного преобразования Фурье действительной последовательности с параметрическим дискретным преобразованием Фурье соответствующих ей последовательностей с циклической инверсией дискретного времени и с линейной инверсией дискретного времени. Полученные результаты могут быть использованы при рассмотрении как теоретических, так и практических вопросов цифровой обработки сигналов, например при устранении нелинейности фазочастотных характеристик фильтров с импульсной характеристикой бесконечной длины.

Ключевые слова: дискретный сигнал, конечный интервал, инверсии дискретного времени, параметрические дискретные экспоненциальные функции, параметрическое дискретное преобразование Фурье, периодизация сигналов.

Введение

Фундаментальное понятие инверсии дискретного времени, которое проявляет одно из глубоких различий между дискретными и непрерывными системами, широко используется в цифровой обработке сигналов (ЦОС) при рассмотрении как теоретических, так и практических вопросов. Например, понятие инверсии дискретного времени применяется при изучении математических основ дискретного преобразования Фурье (ДПФ), дискретного параметрического преобразования Фурье (ДПФ-П), при изложении теоретических основ цифровой фильтрации, устранении нелинейности фазочастотной характеристики фильтров (ФЧХ) с импульсной характеристикой бесконечной длины (БИХ-фильтров) [1].

Пусть задана действительная последовательность $x(n); n = \overline{0, (N-1)}$. В ДПФ данная последовательность интерпретируется как один период N -периодической последовательности $x_p(n)$:

$$x_p(n) = x_p(n \pm m \cdot N) = x(n); n = \overline{0, N-1}; m = \overline{1, \infty}; (1)$$

$$x(n) = x(0), x(1), x(2), \dots, x(N-2), x(N-1). (2)$$

Последовательность $x_p(n)$ (1) можно представить либо в линейной форме в виде отсчетов периодической последовательности $x_p(n)$ (рис. 1), либо в круговой форме в виде отсчетов одного периода периодической действительной последовательности $x_p(n)$ на окружности (рис. 2).

В теории ЦОС общепринято за положительное направление дискретного времени при представлении исходной последовательности $x(n)$ в линейной форме принимать движение *слева направо* относительно нулевого отсчета (рис. 1), а при представлении исходной последовательности $x(n)$ в круговой форме – движение *против часовой стрелки* (рис. 2). Соответственно, *инверсия дискретного времени* (отрицательное дискретное время) понимается при ли-

нейной форме представления как движение *справа налево* относительно нулевого отсчета, а при круговой форме представления – как движение *по часовой стрелке*.

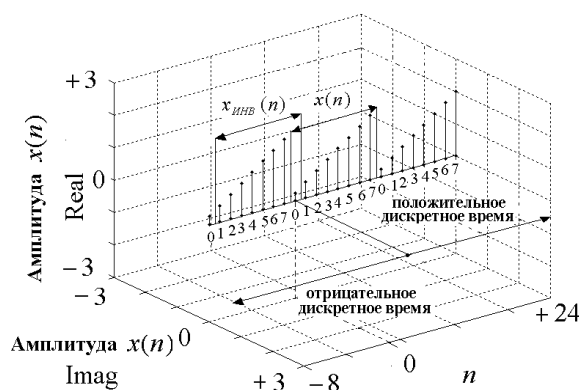


Рис. 1. Линейная форма представления временной последовательности в случае применения ДПФ

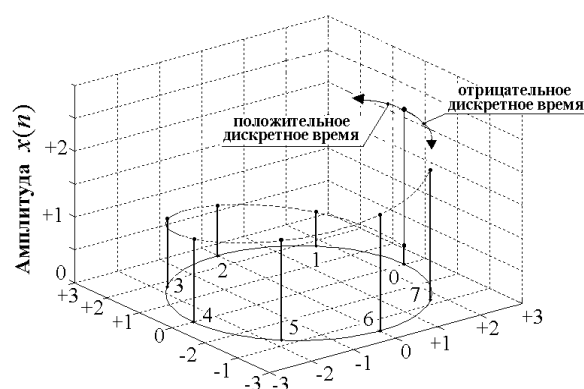


Рис. 2. Круговая форма представления временной последовательности в случае применения ДПФ

В ЦОС различают два вида инверсии дискретного времени действительной периодической последовательности $x_p(n)$ ¹, порождаемой последовательностью $x(n)$ (2): *циклическую инверсию* и *линейную инверсию*,

© Пономарев В. А., Пономарева О. В., Пономарева Н. В., 2016
¹Периодические последовательности отмечены индексом p .

периоды которых, соответственно, $x_{\text{инв}}(n)$ и $x_{\text{лин.инв}}(n)$ описываются следующими соотношениями [2]:

$$x_{\text{инв}}(n) = x(0), x(N-1), x(N-2), \dots, x(3), x(2), x(1); \quad (3)$$

$$x_{\text{лин.инв}}(n) = x(N-1), x(N-2), \dots, x(3), x(2), x(1), x(0). \quad (4)$$

На рис. 1 и 2 представлены последовательности соответственно $x(n)$ и $x_{\text{инв}}(n)$ для $n = \overline{0, N-1}$.

Отметим, что поскольку последовательность $x(n)$ есть действительная последовательность, то $x_{\text{инв}}(n)$ и $x_{\text{лин.инв}}(n)$, в случае ДПФ, являются также действительными последовательностями, т.к. дискретное преобразование Фурье обладает свойствами периодичности.

ДПФ в алгебраической форме описывается выражением:

$$S_N(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}; \quad W_N = \exp\left(-j \frac{2\pi}{N}\right), \quad k = \overline{0, (N-1)}, \quad (5)$$

где $x(n)$ – дискретный измерительный сигнал, $n = \overline{0, N-1}$; $S_N(k)$ – коэффициенты ДПФ (спектр);

$W_N = \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} k \cdot n\right)$ – дискретные экспоненциальные функции (ДЭФ).

В [3] показано, что ДПФ действительных последовательностей $x(n)$, $n = \overline{0, (N-1)}$ (2) и $x_{\text{инв}}(n)$, $n = \overline{0, (N-1)}$ (3) находятся между собой в следующем соотношении:

$$S_{\text{инв}N}(k) = S_N^*(k), \quad (6)$$

где * – символ комплексного сопряжения.

В работах [4–37] на основе обобщения базисной системы ДЭФ введено параметрическое ДПФ (ДПФ-П), которое наиболее эффективно при векторном анализе сигналов со скрытыми периодичностями и (или) почти периодичностями, исследованы его приложения, рассмотрены аналитические и статистические свойства данного преобразования.

Целью настоящей работы является выявление взаимосвязи параметрического дискретного преобразования Фурье действительных последовательностей, заданных на конечных интервалах, с параметрическим дискретным преобразованием Фурье соответствующих ей последовательностей с циклической инверсией и линейной инверсией дискретного времени.

Периодизация действительных временных последовательностей дискретным преобразованием Фурье и инверсия дискретного времени

Измерительное преобразование – дискретное преобразование Фурье – занимает ведущую роль

среди методов цифровой обработки сигналов, заданных на конечных интервалах во временной, частотной и частотно-временной областях. Каждый коэффициент (бин) ДПФ является результатом измерения частоты, амплитуды и фазы гармонических составляющих исходного электрического сигнала, а совокупность бинов ДПФ определяет амплитудно-частотный и фазочастотный спектры исследуемого сигнала. Отметим, что в зарубежной научной литературе измерения амплитудно-частотного и фазочастотного спектров исследуемого сигнала проводят в рамках так называемого векторного анализа, а измерение только амплитудно-частотного (фазовые соотношения между синусоидальными составляющими не измеряются) – в рамках спектрального анализа. В отечественной научной литературе такого четкого разделения нет, поэтому в дальнейшем, если это не оговорено особо, под спектральным анализом будем понимать измерения амплитудно-частотного и фазочастотного спектров исследуемого сигнала.

Пара дискретных преобразований Фурье может задаваться не только в алгебраической форме (5), но и в матричной форме:

$$\text{прямое ДПФ: } S_N = \frac{1}{N} F_N X_{N,(+)}; \quad (7)$$

$$\text{обратное ДПФ (ОДПФ): } X_N = F_N^* S_N, \quad (8)$$

где * – знак комплексного сопряжения; $X_{N,(+)} = [x(0), x(1), \dots, x(N-1)]^T$ – представление последовательности (дискретного сигнала) $x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$, в положительном направлении дискретного времени в виде вектора N -мерного линейного пространства; T – знак транспонирования; $S_N = [s(0), s(1), \dots, s(N-1)]^T$ – вектор коэффициентов разложения $X_{N,(+)}$ по системе ДЭФ, задаваемой матрицей F_N :

$$F_N = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & \dots & (N-1) & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ (N-1) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N^1 & \dots & W_N^{(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & W_N^{(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \quad (9)$$

Для ДПФ матрица сдвигов исходного сигнала $X_{N,(+)}$ в положительном направлении дискретного времени (рис. 1, 2) $C_{N,+}$ является циркулянтной матрицей³ и имеет вид

¹ Бинами называют отдельные коэффициенты (отсчеты) ДПФ («Bin» – в переводе с английского «хранилище», «ларь»), что подчеркивает тот факт, что энергия сигнала под кривой передаточной характеристики фильтра ДПФ попадает в «хранилище» данного коэффициента ДПФ.

² Agilent Application Note 150-15, Vector Signal Analysis Basics.

³ Циркулянтная матрица – это квадратная матрица, в которой каждая последующая строка образуется из предыдущей путем циклического сдвига вправо на один элемент.

$$C_{N,(+)} = \begin{matrix} & & 1 & 0 & \dots & \dots & (N-1) \\ 0 & \left[\begin{array}{cccccc} x(0) & x(1) & & & & x(N-1) \\ x(N-1) & x(0) & \dots & \dots & \dots & x(N-2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (N-1) & x(1) & x(2) & \dots & \dots & x(0) \end{array} \right] \end{matrix} \quad (10)$$

Последовательность (дискретный сигнал) $x(n)$ в отрицательном направлении дискретного времени представим в виде вектора N -мерного линейного пространства: $X_{N,(-)} = [x(0), x(N-1), \dots, x(1)]^T$ (рис. 1, 2), матрица сдвигов которого также является *циркулянтной матрицей* $C_{N,-}$ и описывается следующим выражением:

$$C_{N,(-)} = \begin{matrix} & & 1 & 0 & \dots & \dots & (N-1) \\ 0 & \left[\begin{array}{cccccc} x(0) & x(N-1) & & & & x(2) & x(1) \\ x(N-1) & x(N-2) & \dots & \dots & x(1) & & x(0) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (N-1) & x(1) & x(0) & \dots & \dots & \dots & x(N-1) \end{array} \right] \end{matrix} \quad (11)$$

Матрицами $C_{N,(+)}$ (9) и $C_{N,(-)}$ (10) описываются сдвиги периодических последовательностей $x_p(n)$ и $x_{\text{ринв}}(n)$ на конечном интервале, проиллюстрированные на рис. 1 и 2.

Отметим, что выполнение *операции дискретизации* в одной из областей (временной или частотной) приводит к *периодизации* (периодическому продолжению) в другой области. Таким образом, ДПФ (7) и ОДПФ (8) *навязывают* путем циклического сдвига последовательностей в частотной и во временной областях, их периодическое продолжение.

Несложно видеть, что вектор $X_{N,(+)} = [x(0), x(1), \dots, x(N-1)]^T$ задает один период периодической последовательности $x_p(n)$, а вектор $X_{N,(-)} = [x(0), x(N-1), \dots, x(1)]^T$ – один период периодической последовательности $x_{\text{ринв}}(n)$ (рис. 1 и 2).

Периодизация действительных временных последовательностей параметрическим дискретным преобразованием Фурье и инверсия дискретного времени

Пара параметрических дискретных преобразований Фурье (ДПФ-П) в матричной форме задается следующими соотношениями:

прямое ДПФ: $S_{N,\theta} = \frac{1}{N} F_{N,\theta} X_{N,\theta,(+)}$,

обратное ДПФ (ОДПФ):

$$X_{N,\theta,(+)} = F_{N,\theta}^* S_{N,\theta}, \quad 0 \leq \theta < 1; \quad (12)$$

где $*$ – знак комплексного сопряжения; $X_{N,\theta,(+)} = [x(0), x(1), \dots, x(N-1)]^T$ – представление последовательности (дискретного сигнала) $x(n)$ $n = \overline{0, N-1}$, в положительном направлении дискретного времени в виде вектора N -мерного линейного пространства; T – знак транспонирования; $S_N = [s(0), s(1), \dots, s(N-1)]^T$ – вектор коэффициентов разложения $X_{N,(+)}$ по системе параметрических дискретных экспоненциальных функций (ДЭФ-П), задаваемой матрицей $F_{N,\theta}$:

$$F_{N,\theta} = \begin{matrix} & & 0 & 1 & \dots & \dots & (N-1) \\ 0 & \left[\begin{array}{cccccc} 1 & W_N^\theta & \dots & \dots & & W_N^{\theta(N-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (N-1) & 1 & W_N^{(N-1+\theta)} & \dots & \dots & W_N^{(N-1+\theta)(N-1)} \end{array} \right] \end{matrix}, \quad (13)$$

где $W_N^{kn} = \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} (k + \theta)n\right)$.

Несложно видеть, что ДПФ (5), (7) является частным случаем ДПФ-П при значении параметра θ , равном нулю.

Для ДПФ-П матрица сдвигов исходного сигнала $X_{N,(+)}$ в положительном направлении дискретного времени является *параметрической циркулянтной матрицей* [28–29] и определяется следующим образом:

$$C_{N,\theta,(+)} = \begin{matrix} & & 0 & 1 & \dots & \dots & (N-1) \\ 0 & \left[\begin{array}{cccccc} x(0) & x(1) & \dots & \dots & & x(N-1) \\ x(N-1)W_N^{N\theta} & x(0) & \dots & \dots & \dots & x(N-2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (N-1) & x(1)W_N^{N\theta} & x(2)W_N^{N\theta} & \dots & \dots & x(0) \end{array} \right] \end{matrix} \quad (14)$$

Если использовать квадратную матрицу размерности N параметрического сдвига

$$M_\theta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ W_N^{N\theta} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

то выражение (16) можно представить следующим образом:

$$C_{N,\theta,(+)} = \begin{bmatrix} X_{N,\theta,(+)}^T M_\theta^0 \\ X_{N,\theta,(+)}^T M_\theta \\ \vdots \\ X_{N,\theta,(+)}^T M_\theta^{N-1} \end{bmatrix}, \quad (16)$$

где M_θ^0 – единичная матрица; $M_\theta^k, k = \overline{1, N-1}$ – обозначает возведение в степень матрицы M_θ (14).

В силу того что теория спектрального анализа дискретных сигналов на конечных интервалах в любом дискретном, полном и ортогональном базисе определяет сдвиг сигнала как некоторую операцию перестановки его отсчетов, то этот сдвиг, в свою очередь, определяет и некоторую операцию периодического продолжения исходного сигнала. Другими словами, любая базисная система ДЭФ-П при определенном θ задает продолжение исходного сигнала в виде *параметрической N-периодической последовательности*:

$$x_\theta(n) = x(n \bmod N) W_N^{\theta \cdot N \cdot \text{ent}[n/N]}, \quad (17)$$

где $\text{ent}[\cdot]$ – символ взятия целой части.

Таким образом, описать *циклическую инверсию* и *линейную инверсию* в случае применения ДПФ-П при $\theta \neq 0$ соотношениями, аналогичными соотношениям (3) и (4), нельзя, поскольку сдвиг последовательности при ДПФ-П *представляет собой не просто перестановку отсчетов*, как в случае ДПФ, а *перестановку отсчетов с фазовым поворотом на угол $\varphi = -j2\pi\theta$ при каждом сдвиге последовательности*. Сказанное проиллюстрировано на рис. 3 и 4.

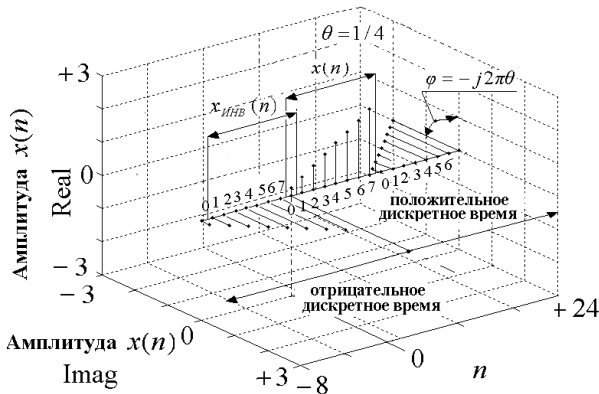


Рис. 3. Линейная форма представления временной последовательности в случае применения ДПФ-П

Последовательность (дискретный сигнал) $x(n)$ в отрицательном направлении дискретного времени представим в виде вектора N -мерного линейного пространства: $X_{N,\theta,(-)} = [x(0), x(N-1) \cdot W_N^{-N\theta}, \dots, x(1) \cdot W_N^{-N\theta}]^T$ (рис. 3, 4), матрица сдвигов которого также является *параметрической циркулянтной матрицей* $C_{N,\theta,(-)}$ и описывается следующим выражением:

$$C_{N,\theta,(-)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & (N-1) \\ x(0) & x(N-1)W_N^{-N\theta} & \dots & x(1)W_N^{-N\theta} \\ 1 & x(N-1)W_N^{-N\theta} & x(N-2)W_N^{-N\theta} & \dots & x(0)W_N^{-N\theta} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (N-1) & x(1)W_N^{-N\theta} & x(0)W_N^{-N\theta} & \dots & x(N-1)W_N^{-N\theta} \end{bmatrix}. \quad (18)$$

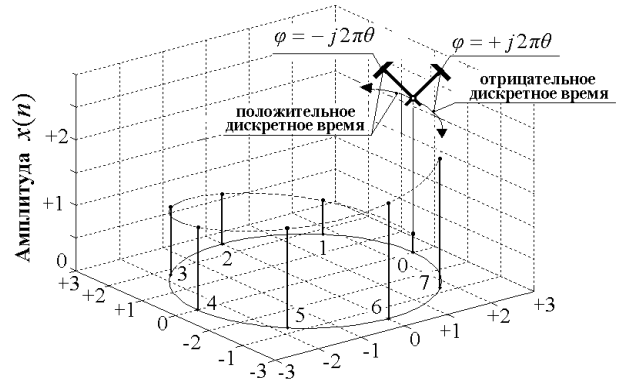


Рис. 4. Круговая форма представления временной последовательности в случае применения ДПФ-П

Аналогично (16) выражение (18) можно представить в следующем виде:

$$C_{N,\theta,(-)} = \begin{bmatrix} X_{N,\theta,(-)}^T M_\theta^0 \\ X_{N,\theta,(-)}^T M_\theta \\ \vdots \\ X_{N,\theta,(-)}^T M_\theta^{N-1} \end{bmatrix}, \quad (19)$$

Матрицами $C_{N,\theta,(+)}$ (14) и $C_{N,\theta,(-)}$ (18) задаются сдвиги параметрических периодических последовательностей $x_{p,\theta}(n)$ и $x_{p,\theta,\text{инв}}(n)$.

Несложно видеть, что вектор $X_{N,\theta,(+)} = [x(0), x(1), \dots, x(N-1)]^T$ задает один период периодической последовательности $x_{p,\theta}(n)$, а вектор $X_{N,\theta,(-)} = [x(0), x(N-1), \dots, x(1)]^T$ – один период периодической последовательности $x_{p,\theta,\text{инв}}(n)$ (рис. 3 и рис. 4).

Если обозначить ДПФ-П параметрической периодической последовательности $x_{p,\theta}(n)$ через $S_{N,\theta,(+)}$, а ДПФ-П параметрической периодической последовательности $x_{p,\theta,\text{инв}}(n)$ через $S_{N,\theta,(-)}$, то несложно установить, что:

$$S_{N,\theta,(+)} = S_{N,\theta,(-)}^* \quad (20)$$

Рассмотрим еще один вид инверсии дискретного времени – *линейную инверсию*, которая для действительной последовательности $x(n), n = \overline{0, (N-1)}$ задается соотношением (4):

$$x_{\text{лин.инв}}(n) = x(N-1), x(N-2), \dots, x(3), x(2), x(1), x(0).$$

Отметим, что ДПФ «рассматривает» последовательность $x_{\text{лин.инв}}(n)$ как один период периодической последовательности $x_{p\text{лин.инв}}(n)$, а ДПФ-П задает продолжение последовательности $x_{\text{лин.инв}}(n)$ в виде параметрической N -периодической последовательности $x_{p\theta\text{лин.инв}}(n)$, определяемой соотношением (17).

Если обозначить ДПФ-П параметрической периодической последовательности $x_{p\theta\text{лин.инв}}(n)$ через

$S_{N\theta\text{лин.инв}}$, а ДПФ-П периодической последовательности $x_p(n)$ через $S_{N,\theta}$, то

$$S_{N\theta\text{лин.инв}} = S_{N,\theta}^* \cdot W_N^{(N-1+\theta)}. \quad (21)$$

Проиллюстрируем полученные результаты на модельном действительном сигнале, отсчеты которого приведены в табл. 1 (кстати, график именно этого сигнала приведен на рис. 1–4).

В табл. 2–4 приведены результаты проведенного эксперимента.

Таблица 1. $x(n)$

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$x(n)$	0,2500	0,5000	0,7500	1,0000	1,2500	1,5000	1,7500	2,0000

Таблица 2. ДПФ $x(n)$, ДПФ $x_{\text{инв}}(n)$

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$x(n)$	0,2500	0,5000	0,7500	1,0000	1,2500	1,5000	1,7500	2,0000
S_N^T	1,1250	-0,1250 +0,3018i	-0,1250 +0,1250i	-0,1250 +0,0518i	-0,1250	-0,1250 -0,0518i	-0,1250 -0,1250i	-0,1250 -0,3018i
$x_{\text{инв}}(n)$	0,2500	2,0000	1,7500	1,5000	1,2500	1,0000	0,7500	0,5000
S_N^T	1,1250	-0,1250 -0,3018i	-0,1250 -0,1250i	-0,1250 -0,0518i	-0,1250	-0,1250 +0,0518i	-0,1250 +0,1250i	-0,1250 +0,3018i

Таблица 3. ДПФ-П $x_{N,(+)}(n)$, ДПФ-П $x_{N,(-)}(n)$, параметр $\theta = 1/4$

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$X_{N,\theta,(+)}$	0,2500	0,5000	0,7500	1,0000	1,2500	1,5000	1,7500	2,0000
$S_{N,\theta,(+)}^T$	0,6302 -0,8312i	0,2436 +0,0762i	0,1180 +0,1147i	0,0498 +0,1274i	-0,0061 +0,1343i	0,0696 +0,1389i	0,0696 +0,1389i	-0,5407 +0,0994i
$X_{N,\theta,(-)}$	0,2500	0,0000 +2,0000i	0,0000 +1,7500i	0,0000 +1,5000i	0,0000 +1,2500i	0,0000 +1,0000	0,0000 +0,7500i	0,0000 +0,5000i
$S_{N,\theta,(-)}^T$	0,6302 +0,8312i	0,2436 -0,0762i	0,1180 -0,1147i	0,0498 -0,1274i	-0,0061 -0,1343i	0,0696 -0,1389i	0,0696 -0,1389i	-0,5407 -0,0994i

Таблица 4. ДПФ-П $x_{N,(+)}(n)$, ДПФ-П $x_{N,(-)}(n)$, параметр $\theta = 1/3$

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$X_{N,\theta,(+)}$	0,2500	0,5000	0,7500	1,0000	1,2500	1,5000	1,7500	2,0000
$S_{N,\theta,(+)}^T$	0,3231 -0,9281i	0,2500 -0,0541i	0,1608 +0,0451i	0,1060 +0,0915i	0,0580 +0,1262i	0,0000 +0,1624i	-0,1044 +0,2155i	-0,5435 +0,3415i
$X_{N,\theta,(-)}$	0,2500	1,0000 +1,7321i	-0,8750 +1,5155i	-0,7500 +1,2990i	-0,6250 +1,0825i	-0,5000 +0,8660i	-0,3750 +0,6495i	0,2500 +0,4330i
$S_{N,\theta,(-)}^T$	0,3231 +0,9281i	0,2500 +0,0541i	0,1608 -0,0451i	0,1060 -0,0915i	0,0580 -0,1262i	0,0000 -0,1624i	-0,1044 -0,2155i	-0,5435 -0,3415i

Из анализа табл. 1–4 непосредственно следует вывод о подтверждении экспериментом полученных в работе теоретических результатов.

Заключение

В настоящее время, благодаря целому ряду преимуществ ЦОС (гарантированная точность, идеальная воспроизводимость результатов, высокая производительность и экономичность), цифровой спектральный анализ Фурье получил самое широкое распространение в различных областях науки и техники. В различных предметных областях проводятся интенсивные научные исследования по поиску и

применению новых базисных систем, обеспечивающих наиболее эффективное решение конкретного круга практических задач.

Результаты проведенных в данной работе исследований по выявлению взаимосвязи ДПФ-П действительной последовательности $x(n)$, $n = 0, (N-1)$, с ДПФ-П соответствующей ей последовательности с циклической инверсией дискретного времени могут быть использованы при рассмотрении как теоретических, так и практических вопросов цифровой обработки сигналов. Например, при изучении математических основ параметрического дискретного преоб-

разования Фурье, при изложении теоретических основ цифровой фильтрации, при решении задач по уменьшению нелинейности фазочастотных характеристик БИХ-фильтров.

Библиографические ссылки

1. Лайонс Р. Цифровая обработка сигналов. – 2-е изд. / пер. с англ. – М.: Бино-Пресс, 2007. – 656 с.
2. Там же.
3. Там же.
4. Пономарева О. В., Пономарев А. В. Восстановление значений непрерывных частотных спектров дискретных сигналов методом параметрического дискретного преобразования Фурье // Вестник ИжГТУ имени М. Т. Калашникова. – 2015. – № 3 (67). – С. 88–91.
5. Пономарев В. А., Пономарева О. В., Пономарев А. В. Метод эффективного измерения скользящего параметрического спектра Фурье // Автометрия. – 2014. – Т. 50. – № 2. – С. 31–38.
6. Обобщение алгоритмов Герцеля и скользящего параметрического дискретного преобразования Фурье / В. А. Пономарев, О. В. Пономарева, А. В. Пономарев, Н. В. Пономарева // Цифровая обработка сигналов. – 2014. – № 1. – С. 3–11.
7. Пономарева О. В. Неинвариантность скользящего энергетического параметрического фурье-спектра действительных тональных сигналов // Цифровая обработка сигналов. – 2014. – № 2. – С. 7–14.
8. Пономарева О. В., Пономарев В. А., Пономарев А. В. Иерархическая морфологическо-информационная модель системы функционального диагностирования объектов на основе цифровой обработки сигналов // Датчики и системы. – 2014. – № 1 (176). – С. 2–8.
9. Пономарева О. В. Инвариантность скользящего энергетического спектра Фурье дискретных сигналов в базисной системе параметрических экспоненциальных функций // Вестник ИжГТУ имени М. Т. Калашникова. – 2014. – № 2 (62). – С. 102–106.
10. Пономарева О. В., Алексеев В. А., Пономарев А. В. Быстрый алгоритм измерения спектра действительных сигналов методом аperiodического дискретного преобразования Фурье // Вестник ИжГТУ имени М. Т. Калашникова. – 2014. – № 2 (62). – С. 106–109.
11. Пономарева О. В. Измерение спектров комплексных сигналов на конечных интервалах методом аperiodического дискретного преобразования Фурье // Интеллектуальные системы в производстве. – 2014. – № 1 (23). – С. 100–107.
12. Пономарева О. В., Пономарев А. В., Пономарев В. А. Измерение скользящего взвешенного энергетического дискретно-временного спектра тональных компонент // Интеллектуальные системы в производстве. – 2014. – № 2 (24). – С. 126–132.
13. Пономарева О. В. Измерение временных спектров дискретных сигналов методом модифицированного параметрического дискретного преобразования Фурье // Интеллектуальные системы в производстве. – 2014. – № 2 (24). – С. 132–138.
14. Пономарев В. А., Пономарева О. В. Инвариантность текущего энергетического спектра Фурье комплексных дискретных сигналов на конечных интервалах // Известия высших учебных заведений России. Радиоэлектроника. – 2014. – Т. 2. – С. 8–16.
15. Пономарев В. А., Пономарева О. В. Инвариантность текущего энергетического фурье-спектра действительных дискретных сигналов на конечных интервалах // Технология и конструирование в электронной аппаратуре. – 2014. – № 1. – С. 15–22.
16. Пономарев В. А., Пономарева О. В., Пономарева Н. В. Метод быстрого вычисления дискретного преобразования Гильберта в частотной области // Современные информационные и электронные технологии. – 2014. – Т. 1. – № 15. – С. 183–184.
17. Пономарева О. В., Тюрикова Е. Ф. Методы и алгоритмы спектрально-корреляционной компьютерной обработки электроэнцефалограмм // Современные информационные и электронные технологии. – 2014. – Т. 1. – № 15. – С. 70–71.
18. Пономарева О. В., Пономарев А. В., Пономарева Н. В. Метод быстрого вычисления дискретного преобразования Фурье действительных последовательностей // Цифровая обработка сигналов. – 2013. – № 2. – С. 10–15.
19. Пономарева О. В., Алексеев В. А., Пономарев А. В. Цифровой периодограммный анализ и проблемы его практического применения // Вестник ИжГТУ имени М. Т. Калашникова. – 2013. – № 2 (58). – С. 130–133.
20. Пономарева О. В., Пономарев В. А. Измерение текущего энергетического фурье-спектра комплексных и действительных сигналов на конечных интервалах // Интеллектуальные системы в производстве. – 2013. – № 2 (22). – С. 149–157.
21. Пономарева О. В., Пономарев А. В., Пономарев В. А. Обобщение алгоритма Герцеля для решения задач выявления скрытых периодичностей // Интеллектуальные системы в производстве. – 2013. – № 1 (21). – С. 41–46.
22. Пономарев В. А., Пономарева О. В., Пономарев А. В. Обобщенная функционально-структурная модель информационно-измерительных систем функционального диагностирования объектов // Современные информационные и электронные технологии. – 2013. – Т. 1. – № 14. – С. 115–118.
23. Пономарева О. В., Пономарев А. В., Пономарева Н. В. Иерархическое морфологическо-информационное описание систем функционального диагностирования объектов // Современные информационные и электронные технологии. – 2013. – Т. 1. – № 14. – С. 121–124.
24. Пономарева О. В., Пономарева Н. В. Модификация фильтра на основе частотной выборки путем обобщения разностного уравнения нерекурсивного гребенчатого фильтра // Современные информационные и электронные технологии. – 2013. – Т. 1. – № 14. – С. 244–247.
25. Пономарева О. В., Пономарев А. В., Пономарева Н. В. Формализованное описание погрешностей измерения вероятностных характеристик случайных процессов процессорными измерительными средствами // Современные информационные и электронные технологии. – 2013. – Т. 1. – № 14. – С. 90–93.
26. Пономарева О. В., Пономарева Н. В. Повышение точности и расширение функциональных возможностей цифровых фильтров на основе частотной выборки // Приборы и методы измерений. – 2013. – № 2 (7). – С. 114–119.
27. Пономарева О. В. Быстрое параметрическое дискретное преобразование Фурье действительных последовательностей // Цифровая обработка сигналов. – 2012. – № 2. – С. 2–5.
28. Пономарева О. В., Пономарев А. В., Пономарева Н. В. Скользящее параметрическое ДПФ в задачах обнаружения тональных компонент // Цифровая обработка сигналов. – 2012. – № 4. – С. 2–7.
29. Пономарева О. В., Пономарева Н. В. Модификация фильтра на основе частотной выборки для решения задач цифровой обработки случайных процессов со скрытыми периодичностями // Интеллектуальные системы в производстве. – 2012. – № 2 (20). – С. 122–129.

30. Пономарев В. А., Пономарева О. В. Теория и применение параметрического дискретного преобразования Фурье // Цифровая обработка сигналов. – 2011. – № 1. – С. 2–6.

31. Пономарева О. В. Развитие теории спектрального анализа дискретных сигналов на конечных интервалах в базисе параметрических экспоненциальных функций // Цифровая обработка сигналов. – 2010. – № 2. – С. 7–11.

32. Пономарева О. В. Вероятностные свойства спектральных оценок, полученных методом параметрического дискретного преобразования Фурье // Интеллектуальные системы в производстве. – 2010. – № 2 (16). – С. 36–41.

33. Алексеев В. А., Пономарев В. А., Пономарева О. В. Методология определения погрешностей измерения вероятностных характеристик случайных процессов, реализуемых процессорными измерительными средствами // Интеллектуальные системы в производстве. – 2010. – № 2 (16). – С. 91–99.

34. Пономарев В. А., Пономарева О. В. Модификация дискретного преобразования Фурье для решения задач интерполяции и свертки функций // Радиотехника и электроника. – 1984. – Т. 29. – № 8. – С. 1561–1570.

35. Пономарев В. А., Пономарева О. В. Временные окна при оценке энергетических спектров методом параметрического дискретного преобразования Фурье // Автометрия. – 1983. – № 4. – С. 39–45.

36. Пономарев В. А., Пономарева О. В. Обобщение дискретного преобразования Фурье для интерполяции во временной области // Известия вузов. Радиотехника. – 1983. – Т. XXVI, № 9. – С. 67–68.

37. Пономарев В. А., Пономарева О. В. Виброакустическое диагностирование коробок передач станков цифровыми методами // СТИН. – 1983. – № 9. – С. 18–21.

V. A. Ponomarev, DSc in Engineering, Professor, Kalashnikov ISTU

O. V. Ponomareva, PhD in Engineering, Associate Professor, Kalashnikov ISTU

N. V. Ponomareva, Post-graduate, Kalashnikov ISTU

Discrete Time Inversion and Parametric Discrete Fourier Inversion

The paper describes the application of the fundamental concepts of discrete time inversion in vector analysis of signals defined on finite intervals. The interrelation of parametric discrete Fourier transform of a real sequence and the parametric discrete Fourier transform of the corresponding sequence with a cyclic inversion of discrete time and sequence with linear inversion of discrete time is investigated. The results can be used in consideration of both theoretical and practical problems of digital signal processing, e.g. eliminating non-linearity of the phase-frequency characteristics of the filter with the impulse characteristic having infinite length.

Keywords: discrete signal, finite interval, discrete time inversion, parametric discrete exponential functions, parametric discrete Fourier transform, periodization of signals.

Получено: 09.11.16