УДК 621.372.542

Н. В. Пономарева, аспирант
Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

ПРЕДОБРАБОТКА ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ ПРИ СПЕКТРАЛЬНОМ АНАЛИЗЕ В СИСТЕМЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ – MATLAB

Рассмотрены операции предобработки дискретных сигналов в системе компьютерной математики – MATLAB для реализации алгоритма быстрого преобразования Фурье. Выявлены достоинства и недостатки этих процедур. Дан их анализ с точки зрения вычислительных затрат, затрат оперативной памяти и разрешающей способности спектрального анализа.

Ключевые слова: дискретный временной сигнал, дискретно-временное преобразование Фурье, непрерывный частотный спектр, коэффициенты Фурье, дополнение нулями, дискретное преобразование Фурье, быстрое преобразование Фурье.

Среди стремительно развивающихся систем компьютерной математики (СКМ) [1] особую роль играет матричная математическая система *MATLAB* (***MAT****rix* ***LAB****oratory* – матричная лаборатория). Благодаря открытости и расширяемости, мощным средствам диалога, графики и комплексной визуализации вычислений, система MATLAB широко применяется в спектральном и векторном анализе дискретных временных сигналов в различных областях научных исследований. При этом ядром многих методов и алгоритмов цифровой спектральной обработки является дискретное преобразование Фурье (ДПФ) и метод его быстрого вычисления – быстрое преобразование Фурье (БПФ) [2–21]. Для быстрой реализации ДПФ система MATLAB [22] содержит в своем составе функцию $\mathrm{fft}(x,N)$, реализующую особый пирамидальный, по основанию 2 алгоритм БПФ (*англ.* Fast Fourier Transform – FFT), который позволяет резко сократить число вычислений (в $N/\log_2 N$ раз) при выполнении ДПФ одномерного массива $x(n)$ длиной N. Вычисление коэффициентов ДПФ осуществляются согласно следующей формуле:

$$X(k)=\sum_{n=1}^{N} x(n)\exp\left(-j\frac{2\pi}{N}(n-1)(k-1)\right);\ k=\overline{1,N}. \quad (1)$$

Для корректного выполнения функции $\mathrm{fft}(x,N)$ длина массива $x(n)$ должна быть равна 2^m, где m – целое положительное число, поскольку только в этом случае функция $\mathrm{fft}(x,N)$ возвращает N-точечное преобразование Фурье исходного массива $x(n)$. Однако на практике длина исходного массива $x_1(n)$ (обозначим ее через N_1), как правило, не равна степени 2, т. е. $N_1 \neq 2^m$. В результате при обращении к функции $\mathrm{fft}(x,N)$ возникает проблема выполнения ДПФ методом БПФ. Для решения указанной проблемы в MATLAB предусмотрено (*автоматическое)* выполнение одной из двух операций предобработки исходного массива $x_1(n)$ (процедур приведения длительности исходного сигнала к степени двух):

– если длина N_1 массива $x_1(n)$ меньше N, то P элементов массива $x_1(n)$ ($P=N-N_1$) заполняются нулями и формируется новый массив $x_2(n)$:

$$x_2(n)=\{x_1(0),x_1(1),...,x_1(N-1),\underbrace{0,0,...,0}_{N-N_1}\}; \quad (2)$$

– если длина массива $x_1(n)$ N_1 больше N, то P элементов массива $x_1(n)$ ($P=N_1-N$) удаляются и формируется новый массив $x_3(n)$:

$$x_3(n)=\{x_1(0),x_1(1),...,x_1(N-1)\}, \quad (3)$$

где $\underbrace{x_1(N),...,x_1(N_1-1)}_{N_1-N}$ – удаленные элементы.

Целью данной работы является выявление достоинств и недостатков операций предобработки дискретных временных сигналов при реализации быстрого преобразования Фурье в системе компьютерной математике MATLAB с точки зрения вычислительных затрат, затрат оперативной памяти и разрешающей способности спектрального анализа.

Представим соотношение (1) в форме, общепринятой в отечественной научной литературе для ДПФ:

$$S(k)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\exp\left(-j\frac{2\pi}{N}nk\right);\ k=\overline{0,N-1}. \quad (4)$$

Нетрудно видеть, что выбор одной из выше отмеченных процедур предобработки исходного дискретного временного сигнала $x_1(n)$ длительностью N_1 предопределяется выбором параметра N в функции $\mathrm{fft}(x,N)$, точнее, соотношением величин N_1 и N. Отметим, что при анализе указанных выше операций предобработки MATLAB необходимо учитывать, что разности соседних длительностей массивов $x(n)$, равных степени 2 (высоты «ступенек» на рис. 1), при росте m возрастают по закону 2^m.

Применив метод дискретно-временного преобразования Фурье (ДВПФ), можно показать [23], что каждому сигналу $x(n)$ конечной длительности N во временной области соответствует в частотной области на единичной окружности *непрерывный частотный спектр* $S(f)$ согласно соотношениям:

$$S(f)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\exp(-j2\pi fn)\;; \qquad (5)$$

$$S(f)=\sum_{n=0}^{N-1}S(k)\cdot\frac{\exp(-j2\pi f)[[N-1)/2]}{\exp(j\pi k/N)}\cdot\frac{\sin(\pi fN)}{\sin(\pi(f-k/N))}, \qquad (6)$$

где $S(k)$ определяется формулой (4).

Исходя из выражения (5) ДВПФ исходного дискретного сигнала $x_1(n)$ равно:

$$S_1(f)=\sum_{n=0}^{N-1}x_1(n)\exp(-j2\pi fn)\,, \qquad (7)$$

а ДПФ (4) исходного дискретного сигнала $x_1(n)$ дает возможность определения $S_1(f)$ (7) на единичной окружности в дискретном множестве точек, мощность которого равна N_1:

$$S_1(k)=\frac{1}{N_1}\sum_{n=0}^{N-1}x_1(n)\exp\left(-j\frac{2\pi}{N_1}nk\right)\;;\; k=\overline{0,N_1-1}\,. \qquad (8)$$

Первая из процедур предобработки MATLAB заключается в формировании нового дискретного временного сигнала $x_2(n)$ длительностью N (2), ДПФ которого (обозначим его через $S_2(k)$) равно

$$S_2(k)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x_2(n)\exp\left(-j\frac{2\pi}{N}nk\right)=$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N_1-1}x_1(n)\exp\left(-j\frac{2\pi}{N}nk\right)\,.$$

Вычислим $S_1(f)$ (7) на частотах $f=k/N$; $k=\overline{0,(N-1)}$:

$$S_1(k/N)=\sum_{n=0}^{N-1}x_1(n)\exp(-j(2\pi/N)kn)\,. \qquad (9)$$

Сравнивая $S_1(k/N)$ и $S_2(k)$, получим

$$S_1(k/N)=S_2(k)\,. \qquad (10)$$

Таким образом, доказано, что процедура MATLAB по приведению длительности исходного дискретного сигнала $x_1(n)$ к степени двух (дополнение исходного сигнала $P=(N-N_1)$ нулями (2)), по сути дела, дает возможность определения ДВПФ $S_1(f)$ (соответствующего исходному дискретному сигналу $x_1(n)$) на множестве точек равномерно расположенных на единичной окружности, мощность которого увеличена в N/N_1 раз по сравнению с ДПФ $x_1(n)$ (8), что принципиально улучшает условия различения гармонических компонент на фоне шума [24]. Недостатком данной операции предобработки исходного дискретного сигнала является увеличение необходимой оперативной памяти N/N_1 раз.

Вторая процедура MATLAB по приведению длительности исходного дискретного сигнала $x_1(n)$ MATLAB к степени двух (удаление из исходного сигнала $x_1(n)$ P элементов ($P=(N_1-N)$) приводит к уменьшению длительности дискретного сигнала $x_3(n)$ (3), потере информации и к уменьшению частотного разрешения в N/N_1 раз (поскольку частотное разрешение определяется только длительностью исследуемого сигнала), что является первым существенным недостатком данной операции. Вторым ее недостатком является то, что ДПФ $x_3(n)$ дает значения не ДВПФ исходного сигнала $x_1(n)$, а ДВПФ вновь сформированного дискретного временного сигнала $x_3(n)$, полученного путем удаления из исходного сигнала $x_1(n)$ P элементов (обозначим ДВПФ дискретного временного сигнала $x_3(n)$ через $S_3(f)$). Очевидно, что ДВПФ $S_3(f)$ и $S_1(f)$ не равны друг другу, и можно показать, что $S_3(f)$ представляет собой свертку $S_1(f)$ с прямоугольным окном длительностью в N отсчетов.

В заключение отметим, что выбор операции предобработки дискретных временных сигналов при реализации быстрого преобразования Фурье в системе компьютерной математике MATLAB должно приниматься исследователем исходя не только из условий решения конкретной задачи в той или иной предметной области, но и с учетом выявленных в данной работе достоинств и недостатков этих процедур.

Библиографические ссылки

1. *Дьяконов В. П.* Компьютерная математика. Теория и практика. – М. : Но-лидж, 2000. – 1296 с.

2. *Пономарева О. В., Пономарев А. В.* Восстановление значений непрерывных частотных спектров дискретных сигналов методом параметрического дискретного преобразования Фурье // Вестник ИжГТУ имени М. Т. Калашникова. – 2015. – № 3 (67). – С. 88–91.

3. *Пономарева О. В.* Неинвариантность скользящего энергетического параметрического фурье-спектра действительных тональных сигналов // Цифровая обработка сигналов. – 2014. – № 2. – С. 7–14.

4. *Пономарева О. В.* Быстрое параметрическое дискретное преобразование Фурье действительных последовательностей // Цифровая обработка сигналов. –2012. – № 2. – С. 2–5.

5. *Пономарева О. В.* Измерение временных спектров дискретных сигналов методом модифицированного параметрического дискретного преобразования Фурье // Интеллектуальные системы в производстве. – 2014. – № 2 (24). – С. 132–138.

6. *Пономарева О. В., Пономарев В. А., Пономарев А. В.* Иерархическая морфологическо-информационная модель системы функционального диагностирования объектов на основе цифровой обработки сигналов // Датчики и системы. – 2014. – № 1 (176). – С. 2–8.

7. *Пономарева О. В., Пономарев А. В., Пономарева Н. В.* Метод быстрого вычисления дискретного преобразования Фурье действительных последовательностей // Цифровая обработка сигналов. – 2013. – № 2. -С. 10–15.

8. *Пономарева О. В., Алексеев В. А., Пономарев А. В.* Цифровой периодограмманализ и проблемы его практического применения // Вестник ИжГТУ имени М. Т. Калашникова. – 2013. – № 2 (58). – С. 130–133.

9. *Пономарева О. В., Пономарев А. В., Пономарев В. А.* Обобщение алгоритма Герцеля для решения задач выявления скрытых периодичностей // Интеллектуальные системы в производстве. – 2013. – № 1 (21). – С. 41–46.

10. *Пономарева О. В.* Быстрое параметрическое дискретное преобразование Фурье действительных последовательностей // Цифровая обработка сигналов. – 2012. – № 2. – С. 2–5.

11. *Пономарева О. В., Пономарева Н. В.* Модификация фильтра на основе частотной выборки для решения задач цифровой обработки случайных процессов со скрытыми периодичностями // Интеллектуальные системы в производстве. – 2012. – № 2 (20). – С. 122–129.

12. *Пономарева О. В., Пономарева Н. В., Пономарева В. Ю.* Применение временных окон в векторном анализе дискретных сигналов // Интеллектуальные системы в производстве. – 2016. – № 2 (29). – С. 19–21.

13. *Пономарев В. А., Пономарева О. В., Пономарев А. В.* Метод эффективного измерения скользящего параметрического спектра Фурье // Автометрия. – 2014. – Т. 50. – № 2. – С. 31–38.

14. *Пономарев В. А., Пономарева О. В., Пономарев А. В., Пономарева Н. В.* Обобщение алгоритмов Герцеля и скользящего параметрического дискретного преобразования Фурье // Цифровая обработка сигналов. – 2014. – № 1. – С. 3–11.

15. *Пономарева О. В.* Измерение спектров комплексных сигналов на конечных интервалах методом апериодического дискретного преобразования Фурье // Интеллектуальные системы в производстве. – 2014. – № 1 (23). – С. 100–107.

16. *Пономарева О. В., Пономарев А. В., Пономарев В. А.* Измерение скользящего взвешенного энергетического дискретно-временного спектра тональных компонент // Интеллектуальные системы в производстве. – 2014. – № 2 (24). – С. 126–132.

17. *Пономарев В. А., Пономарева О. В.* Инвариантность текущего энергетического спектра Фурье комплексных дискретных сигналов на конечных интервалах // Известия высших учебных заведений России. Радиоэлектроника. – 2014. – Вып. 2. – С. 8–16.

18. *Пономарев В. А., Пономарева О. В*. Инвариантность текущего энергетического фурье-спектра действительных дискретных сигналов на конечных интервалах // Технология и конструирование в электронной аппаратуре. – 2014. – № 1. – С. 15–21.

19. *Пономарева О. В. Пономарева Н. В.* Повышение точности и расширение функциональных возможностей цифровых фильтров на основе частотной выборки // Приборы и методы измерений. – 2013. – № 2 (7). – С. 114–119.

20. *Пономарева О. В.* Развитие теории спектрального анализа дискретных сигналов на конечных интервалах в базисе параметрических экспоненциальных функций // Цифровая обработка сигналов. – 2010. – № 2. – С. 7–11.

21. *Алексеев В. А., Пономарев В. А., Пономарева О. В.* Методология определения погрешностей измерения вероятностных характеристик случайных процессов, реализуемых процессорными измерительными средствами // Интеллектуальные системы в производстве. – 2010. – № 2 (16). – С. 91–99.

22. *Дьяконов В. П., Абраменкова И. В.* MATLAB. Обработка сигналов и изображений: Специальный справочник. – СПб. : ПИТЕР, 2002. – 602 с.

23. *Пономарева О. В.* Неинвариантность скользящего энергетического параметрического фурье-спектра действительных тональных сигналов // Цифровая обработка сигналов. – 2014. – № 2. – С. 7–14.

24. *Пономарева О. В., Пономарев А. В., Пономарев В. А.* Обобщение алгоритма Герцеля для решения задач выявления скрытых периодичностей // Интеллектуальные системы в производстве. – 2013. – № 1 (21). – С. 41–46.

* * *

N. V. Ponomareva, Post-graduate, Kalashnikov ISTU

Pre-processing Discrete Signals in Carrying out Spectral Analysis in Matlab

Operations of pre-processing digital signals in MATLAB to implement the fast Fourier transform algorithm are considered. Advantages and disadvantages of these procedures are revealed. Their analysis in terms of computational cost, memory cost and resolution spectral analysis is performed.

Keywords: discrete time signal, discrete-time Fourier transform, continuous frequency spectrum, Fourier coefficients, zero padding, discrete Fourier transform, fast Fourier transform.

Получено: 09.11.16