

УДК 621.833 + 621.8.024.4

DOI: 10.22213/2410-9304-2017-1-26-29

М. Ю. Сачков, кандидат технических наук
Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет
информационных технологий, механики и оптики

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ ЗУБЧАТО-ПОВОДКОВЫХ ПЕРЕДАЧ НА СКРЕЩИВАЮЩИХСЯ ОСЯХ¹

В работе рассматриваются приближенные передачи. Данная работа посвящена определению параметров движения зубчато-поводковой передачи на скрещивающихся осях. Разработка защищена патентом РФ. В статье обоснована актуальность синтеза новых видов зацепления с упрощенной геометрией контактирующих тел. Представлено расположение систем координат, использованных для получения функции положения передачи, состоящей из двух колес и неподвижного звена (стойки). Для передач на скрещивающихся осях получены координаты точек контакта на поверхностях поводков и рассчитаны ошибки функции положения при пересопряжении. Функция положения получена применением метода матричного преобразования систем координат и равенства радиусов-векторов и ортов нормалей в точке контакта. Данная передача может быть актуальна в машиностроении, приборостроении и других отраслях народного хозяйства. На ее основе могут быть синтезированы как редукторы, так и мультипликаторы. Она обладает высокой технологичностью (для ее изготовления не требуется специального оборудования), а функция перемещения близка к линейной. Данная статья характеризует влияние изменения передаточного отношения на качественные характеристики передачи. Определены минимальные допустимые передаточные отношения для различных чисел поводков ведущего колеса. Значения минимальных допустимых передаточных отношений существенно меньше, чем для конических зубчато-поводковых передач на пересекающихся ортогональных осях. Зацепление происходит без выхода точки контакта на кромку поводка. Для решения полученной системы уравнений применялись численные методы программного пакета MathCAD. В дальнейшем автором предполагается рассмотреть возможные погрешности монтажа и изготовления зубчато-поводковой передачи (такие, как погрешность шага, несоосность и т. д.) с целью оценки их влияния на качественные характеристики зацепления для всех типов взаимного расположения осей.

Ключевые слова: зубчато-поводковая передача, функция положения, ошибка передаточного отношения, ошибка положения, скрещивающиеся оси.

Введение

Каждая из существующих передач зацеплением служит для преобразования вращательного движения лишь при одном взаимном расположении рабочих осей. Для изготовления зубчатых колес каждого из видов передач требуется собственное технологическое оборудование [1–4]. Изготовлению сопряженных зубчатых передач, рабочие оси которых скрещиваются, требуется формообразование различных поверхностей [5–7]. Это крайне сложная задача даже для современных дорогостоящих станков. Наличие погрешностей изготовления и монтажа приводит к фактической приближенности рабочих зацеплений, что приводит к повышению динамических нагрузок, возникновению кинематических погрешностей и повышенному износу. Передачи с приближенным зацеплением принципиально не могут передавать вращательное движение с постоянным передаточным отношением в процессе зацепления одной пары зубьев.

В данной работе представлена функция положения и параметры движения зубчато-поводковой передачи на скрещивающихся осях при использовании начальных поверхностей и поверхностей зубьев одинаковых с цилиндрическими зубчато-поводковыми передачами [8].

Определение функции положения в неявном виде

Для получения функции положения зубчато-поводковой передачи используем равенство радиусов-векторов и ортов нормалей в точках касания поверхностей Σ_1 и Σ_2 (соприкасающиеся поверхности цилиндрических поводков). Поверхности поводков образуют высшую кинематическую пару [9].

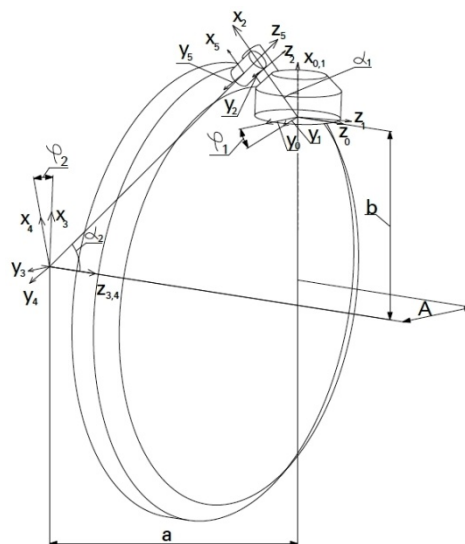


Рис. 1. Взаимное расположение систем координат передачи на скрещивающихся осях

Уравнение поверхностей Σ_1 и Σ_2 в системах координат S_2 и S_5 можно записать как: $x_2 = u_1$; $y_2 = \rho_1 \cdot \cos \Theta_1$; $z_2 = \rho_1 \cdot \sin \Theta_1$; $x_5 = \rho_2 \cdot \cos \Theta_2$; $y_5 = \rho_2 \cdot \cos \Theta_2$; $z_5 = u_2$, где ρ_i – радиус i -го поводка.

Орты нормалей поверхностей Σ_1 и Σ_2 запишем в виде

$$e_{x2} = 0; e_{y2} = \cos \Theta_1; e_{z2} = \sin \Theta_1; e_{x5} = \cos \Theta_2; e_{y5} = \sin \Theta_2; e_{z5} = 0.$$

Для преобразования координат воспользуемся следующими матричными уравнениями [10]:

$$\mathbf{r}^{(1)} = \mathbf{M}_{01} \cdot \mathbf{M}_{12} = \mathbf{M}_{02} \cdot \mathbf{r}_2; \mathbf{r}^{(2)} = \mathbf{M}_{03} \cdot \mathbf{M}_{34} \cdot \mathbf{M}_{45} \cdot \mathbf{r}_6 = \mathbf{M}_{05} \cdot \mathbf{r}_5.$$

В данных уравнениях $\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_5$ – столбцевые матрицы радиусов-векторов поверхностей Σ_1, Σ_2 . А $\mathbf{r}^{(1)}, \mathbf{r}^{(2)}$ – столбцевые матрицы радиусов-векторов этих же поверхностей в неподвижной системе координат S_0 .

На основании рис. 1 получим следующие матрицы перехода из одной системы координат в другую:

$$\mathbf{M}_{02} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & 0 & \sin\alpha_1 & R_1 \operatorname{ctg}\alpha_1 \\ \sin\varphi_1 \sin\alpha_1 & \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \cos\alpha_1 & R_1 \sin\varphi_1 \\ \cos\varphi_1 \sin\alpha_1 & \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \cos\alpha_1 & -R_1 \cos\varphi_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{M}_{05} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_2 \cos\alpha_2 & -\sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 \sin\alpha_2 & R_1 \cos\varphi_2 - b \\ \sin\varphi_2 \cos\alpha_2 & \cos\varphi_2 & \sin\varphi_2 \sin\alpha_2 & A + R_2 \sin\varphi_2 \\ -\sin\alpha_2 & 0 & \cos\alpha_2 & R_2 \operatorname{ctg}\alpha_1 - a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где $R_1 = D_1/2, R_2 = D_2/2$ [11]. Расстояние от оси ведущего колеса до вершины дополнительного конуса ведомого колеса $a = \frac{D_2}{2} + \frac{D_1}{2 \operatorname{tg}(\alpha_1)}$, расстояние от оси ведомого колеса до вершины дополнительного конуса ведущего колеса $b = \frac{D_2}{2} + \frac{D_1}{2 \operatorname{tg}(\alpha_2)}$, расстояние A – смещение скрещивающихся осей (рис. 1).

Проекции ортов нормалей в системе O_0 определяются с помощью матричных равенств:

$$\mathbf{e}^{(1)} = \mathbf{L}_{01} \cdot \mathbf{L}_{12} \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{L}_{02} \cdot \mathbf{e}_2;$$

$$\mathbf{e}^{(2)} = \mathbf{L}_{03} \cdot \mathbf{L}_{34} \cdot \mathbf{L}_{45} \cdot \mathbf{e}_5 = \mathbf{L}_{05} \cdot \mathbf{e}_5.$$

Матрицы $\mathbf{L}_{01}, \mathbf{L}_{12}, \mathbf{L}_{02}, \mathbf{L}_{34}, \mathbf{L}_{45}$ получены из матриц $\mathbf{M}_{01}, \mathbf{M}_{12}, \mathbf{M}_{02}, \mathbf{M}_{34}, \mathbf{M}_{45}$ «зачеркиванием» четвертого столбца и четвертой строки. Следует отметить, что из трех уравнений для проекций ортов нормалей независимые два, т.к. наложена связь: $|\bar{\mathbf{e}}^{(1)}| = |\bar{\mathbf{e}}^{(2)}| = 1$.

После всех преобразований поверхностей Σ_1, Σ_2 и ортов нормалей получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} R_1 \operatorname{ctg}\alpha_1 + u_1 \cos\alpha_1 + \rho_1 \sin\alpha_1 \sin\theta_1 - (R_2 \cos\varphi_2 - b + \\ + u_2 \cos\varphi_2 \sin\alpha_2 - \rho_2 \sin\varphi_2 \sin\theta_2 + \rho_2 \cos\varphi_2 \cos\alpha_2 \cos\theta_2) = 0; \\ R_1 \sin\varphi_1 + u_1 \sin\varphi_1 \sin\alpha_1 + \rho_1 \cos\varphi_1 \cos\theta_1 - \\ - \rho_1 \cos\alpha_1 \sin\varphi_1 \sin\theta_1 - (A + R_2 \sin\varphi_2 + u_2 \sin\varphi_2 \sin\alpha_2 + \\ + \rho_2 \cos\varphi_2 \sin\theta_2 + \rho_2 \cos\alpha_2 \cos\theta_2 \sin\varphi_2) = 0; \\ \rho_1 \sin\varphi_1 \cos\theta_1 - u_1 \cos\varphi_1 \sin\alpha_1 - R_1 \cos\varphi_1 + \rho_1 \cos\varphi_1 \cos\alpha_1 \sin\theta_1 - \\ - (R_2 \operatorname{ctg}\alpha_2 - a + u_2 \cos\alpha_2 - \rho_2 \sin\alpha_2 \cos\theta_2) = 0; \\ \sin\alpha_1 \sin\theta_1 + (\cos\varphi_2 \cos\alpha_2 \cos\theta_2 - \sin\varphi_2 \sin\theta_2) = 0; \\ \sin\varphi_1 \cos\theta_1 + \cos\varphi_1 \cos\alpha_1 \sin\theta_1 - \cos\varphi_2 \sin\alpha_2 = 0. \end{cases}$$

В пять независимых уравнений системы входят шесть неизвестных $\varphi_1, \varphi_2, u_1, u_2, \theta_1, \theta_2$. Варьируя параметр φ_1 , получим значения для остальных неизвестных системы. В MathCad были получены графики зависимостей $\varphi_2 = f_1(\varphi_1), \Delta\varphi_2 = f_2(\varphi_1)$, где $\Delta\varphi_2 = \varphi_{2д} - \varphi_{2н} = \varphi_{2д} - \varphi_1 i_{12}$ (индекс «д» обозначает действительную величину φ_2 , «н» – номинальную); $i_{21} = f_3(\varphi_1), i_{21} = f_4(\varphi_1)$ (с учетом направления вращения). Зависимости $\Delta i_{21} = i_{21д} - i_{21н}$ и $u_1 = f_5(\theta_1), u_2 = f_6(\theta_2)$ описывают графики координат точек контакта на поверхностях Σ_1, Σ_2 (рис. 2–4). Численные значения функции положения, функций i_{21} и Δi_{21} , а также координаты точек контакта на поверхностях получены исходя из следующих значений основных параметров передачи: $z_1 = 7, i_{21} = 4, 286,$
 $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\pi}{4} [\text{рад}], \rho_2 = \rho_1 = 1,5 [\text{мм}], A = 1 [\text{мм}].$

На рис. 2, а приведена зависимость $\varphi_2 = f_1(\varphi_1),$
 $b - i_{21} = f_3(\varphi_1).$

На рис. 3 представлены координаты точек контакта на поверхностях Σ_1 (а), Σ_2 (б).

На рис. 4, а приведена зависимость $\Delta i_{21} = f_2(\varphi_1),$
 $b - \Delta i_{21} = f_4(\varphi_1)$ (с учетом направления вращения).

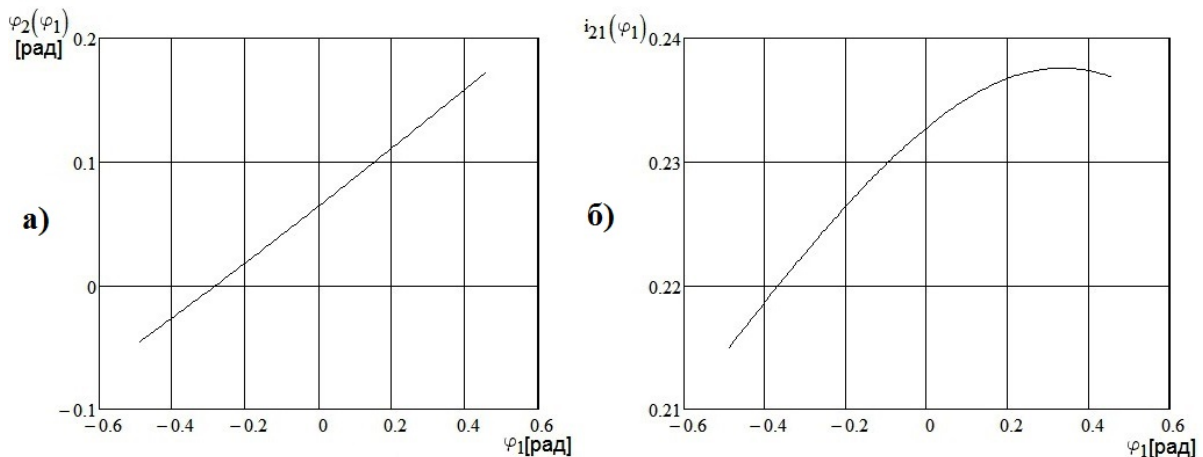


Рис. 2. Зависимости $\varphi_2 = f_1(\varphi_1)$ и $i_{21} = f_3(\varphi_1)$

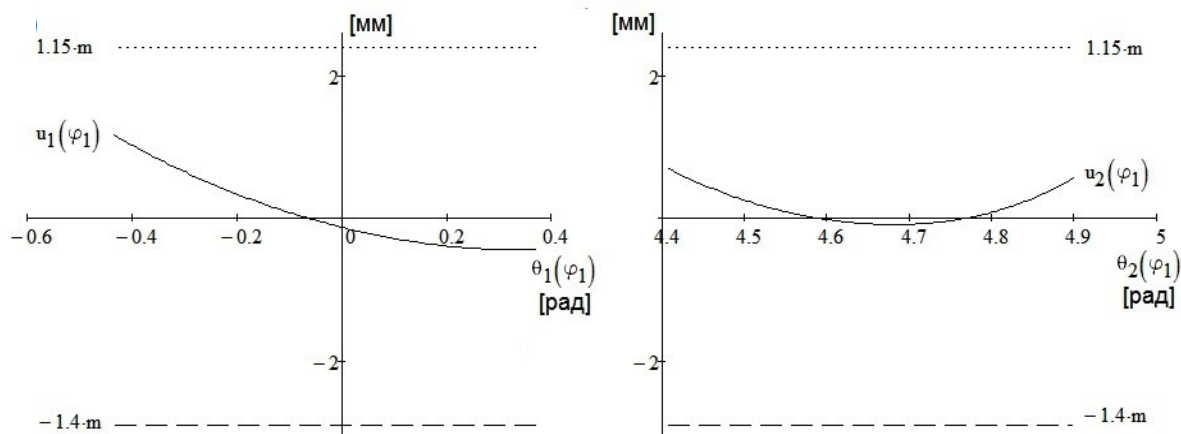


Рис. 3. Координаты точек контакта на поверхностях Σ_1, Σ_2

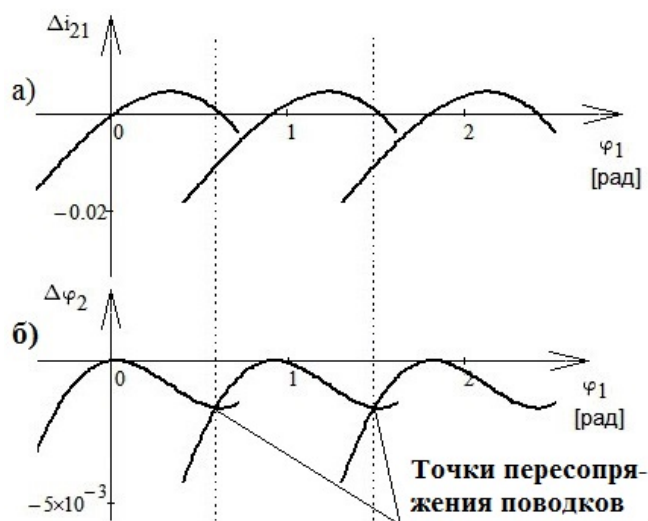


Рис. 4. Зависимости $\Delta\varphi_2 = f_2(\varphi_1)$ и $\Delta i_{21} = f_4(\varphi_1)$

Анализ полученных расчетных зависимостей

Как можно заметить, функция положения близка к линейной, а точки пересопряжения на поверхности поводков не выходят на кромку. Отсутствие кромочного контакта и возможность локализовать пятно контакта по поверхности поводка – одно из достоинств данной передачи.

Графики на рисунке позволяют найти точки пересопряжения поводков, основываясь на непрерывности функции положения, и определить «скачок» передаточного отношения в момент пересопряжения. Также следует отметить, что максимальная ошибка положения составляет $1,69 \cdot 10^{-3}$ радиан, а «скачок» передаточного отношения равен $1,2 \cdot 10^{-2}$.

Исходя из необходимости непрерывности функции перемещения для различных чисел поводков ведущего колеса, значения минимальных передаточных отношений не могут быть меньше представленных в таблице. При передаточном отношении i_{12} , меньшем, чем указано в таблице, коэффициент перекрытия передачи меньше единицы, что недопустимо.

Соответствие минимальных передаточных отношений и чисел поводков ведущего колеса

z_1	z_2	Минимальное i_{12}
6	26	4.33
7	29	4.14
8	33	4.13
9	36	4
10	40	4
11	43	3.91
12	46	3.83
13	50	3.85
14	54	3.85
15	59	3.93
...

Максимальное значение i_{12} из геометрических соображений не лимитируется.

Следует отметить, что при увеличении передаточного отношения циклическая погрешность и скачок скорости в момент пересопряжения уменьшаются.

Библиографические ссылки

1. Георгиев А. К., Гольдфарб В. И. Аспекты геометрической теории и результаты исследования спироидных передач с цилиндрическими червяками // *Механика машин*. – Вып. 31–32. – М.: Наука, 1972. – С. 70–80.
2. Грубин А. Н., Лихцнер М. Б., Полоцкий М. С. Зубо-резный инструмент. – Ч. 1 и 2. – М.: Машгиз, 1946.
3. Сегаль М. Г. Виды локализованного контакта конических и гипоидных передач // *Машиноведение*. – 1970. – № 1. – С. 56–63.
4. Сызранцев В. Н. Анализ зацепления конических колес, образованных спиральным инструментом // *Теория и расчет передаточных механизмов*. – Хабаровск: ХПИ, 1975. – С. 32–41.
5. Бабичев Д. Т. Развитие теории зацеплений и формообразования поверхностей на основе новых геометро-кинематических представлений: дис. ... д-ра техн. наук. – Тюмень, 2005. – 421 с.
6. Шевелева Г. И. Зацепление приближенных конических колес // *Теория передач в машинах*. – М.: Машгиз, 1966. – С. 38–48.
7. Сызранцев В. Н., Ратманов Э. В., Котликова В. Я. Оценка возможности изготовления конических и гипоидных пар в условиях жестких технологических ограничений // *Техника машиностроения*. – 2001. – № 2. – С. 52–56.
8. Тимофеев Б. П., Сачков М. Ю. Влияние погрешностей монтажа в зубчато-поводковых передачах // *Наука и образование*. МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2015. – № 1. – URL: <http://technomag.bmstu.ru/doc/754787.html> (дата обращения 11.03.2015).
9. Патент № 146159. Российская Федерация, МПК F16H 55/10 F15H 55/17. Колесо для передачи вращательного движения // Тимофеев Б. П., Сачков М. Ю.; заявитель и патентообладатель федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики». – № 2014120175/11; заявл. 19.05.2014; опубл. 10.10.2014, Бюл. № 28.
10. Литвин Ф. Л. Проектирование механизмов и деталей приборов. – Л.: Машиностроение, 1973. – 696 с.
11. Тимофеев Б. П., Сачков М. Ю. Влияние погрешностей монтажа в зубчато-поводковых передачах.

M. Yu. Sachkov, PhD in Engineering, St. Petersburg National Research University of Information Technologies, Mechanics and Optics

Determination of Motion Parameters for Rod Toothed Gears with Skew Axes

Approximated gears are considered in the paper. This work is devoted to determination of motion parameters of a rod toothed gear with skew axes. This development is protected by the patent of the Russian Federation. The urgency of the synthesis of new kinds of meshing with simplified geometry of contacting solids is substantiated. The paper describes the location of coordinate systems applied to obtain the position function of the rod toothed gear consisting of two wheels and the fixed element (rack). For gears with skew axes coordinates of contact points on surfaces of rods are obtained and errors of the position function are calculated at re-conjugation. The position function is obtained by the method of matrix transformation of coordinate systems and by equality of radius vectors and normal unit vectors at the contact point. This gear can be used in mechanical engineering, instrument-making and other branches of national economy. Both gearboxes and multipliers can be synthesized on its basis. It has a high manufacturability (special equipment is not required for its production); and the position function is close to a linear one. This paper describes the influence of changing the gear ratio on quality characteristics of the gear. Minimum allowable gear ratios for different numbers of rods of the driving gearwheel are determined. The values of minimum allowable gear ratios are significantly less than those for the bevel rod gears with intersecting orthogonal axes. The meshing occurs without coming of the contact point to the edge of the rod. Numerical methods of MathCAD software package are applied for solving the obtained system of equations. In future, the author will consider other possible errors of manufacturing and assembly for the rod toothed transmission (such as the pitch error, misalignment, etc.) in order to assess their impact on the qualitative characteristics of the meshing for all types of mutual position of axes.

Keywords: rod toothed gear, position function, error of the gear ratio, position error, skew axes.

Получено: 17.02.17