

## МАТЕМАТИКА

УДК 519.233.22 + 519.233.5

А. Ю. Мерзлякова, кандидат экономических наук  
Удмуртский государственный университет  
Е. Ю. Коршунова  
ИжГТУ имени М. Т. Калашникова

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПЕРВИЧНОГО РЫНКА ЖИЛЬЯ ГОРОДА ИЖЕВСКА

В статье рассматривается проблема экономико-математического анализа состояния и перспектив формирования и развития регионального рынка жилья, состояние которого серьезно влияет в том числе на социально-экономическое положение в регионе. С помощью статистических методов исследования панельных данных построены модели спроса и предложения первичного рынка жилья Ижевска. Анализ ситуации на рынке г. Ижевска проводится в сравнении с рядом других городов Приволжского федерального округа. Выделены основные факторы, значимо влияющие на состояние и развитие рынка. Формирование модели происходило в несколько этапов путем последовательного уточнения и варьирования факторами. Достаточно подробно рассматриваются факторы спроса и предложения, являющиеся в данном случае одними из определяющих. Для построения модели применялся язык статистической обработки данных R и соответствующее программное обеспечение. Проведенный анализ включает тщательную проверку основных критериев оценки полученных моделей, что позволяет достаточно квалифицированно судить об адекватности полученных результатов.

**Ключевые слова:** рынок первичного жилья, факторы спроса и предложения, эконометрическое моделирование экономических процессов, анализ панельных данных.

## Введение

Рынок жилья давно является предметом изучения как российских, так и зарубежных специалистов, занимающихся экономико-математическим анализом. В России одними из первых, приступивших к анализу закономерностей формирования рыночных цен на жилье в зависимости от его качества и местоположения, к разработке методик оценки стоимости квартиры в зависимости от ее параметров, являются Г. М. Стерник, Н. Н. Ноздрина, О. С. Пчелинцев, В. С. Мхитарян и др. [1]. Основной задачей большинства исследований является выявление факторов, которые оказывают существенное влияние на рынок жилья конкретного региона с точки зрения формирования ценовой политики [2]. На данный момент остается недостаточной изученной проблема влияния на рынок жилья факторов спроса и предложения.

## Описание модели

На первом этапе рассмотрим модель предложения на рынке жилья. В качестве переменной, описывающей общий объем предложения рынка, возьмем объем ввода жилых домов. В качестве факторов, которые оказывают влияние на формирование предложения, возьмем общепринятые ценовые показатели: цена продажи жилья на первичном рынке, а также расходы предприятия на строительство, также на рынок могут влиять такие показатели, как государственная поддержка, показатели банковского сектора (процент по кредитам юридических лиц).

Рассмотрим построение модели предложения на рынке первичного жилья на основе панельных данных, которые включают в себя не только временную, но и региональную структуру [3]. В качестве объектов рассмотрения возьмем города-столицы регионов Приволжского федерального округа, куда входит Удмуртская Республика и которые достаточно близки по социально-экономическому положению. В от-

личие от выше рассмотренной модели, данные по регионам возьмем за период 2010–2015 гг., в итоге панель будет содержать 14 объектов и на глубину в 6 лет ( $N = 14$ ,  $T = 6$ ,  $NT = 84$ ).

Для того чтобы посмотреть, возможно ли объединение регионов в панель, построим график разброса по регионам и по годам (рис. 1 и 2).

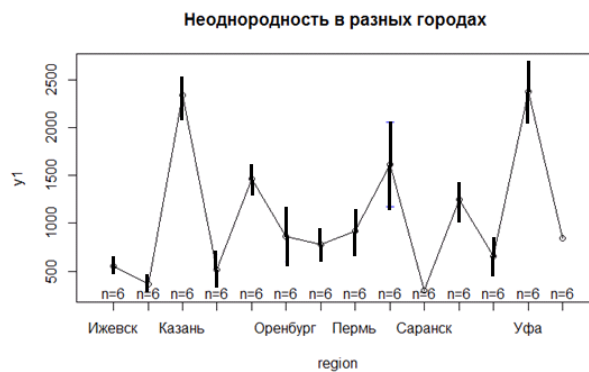


Рис. 1. Неоднородность данных по городам ПФО

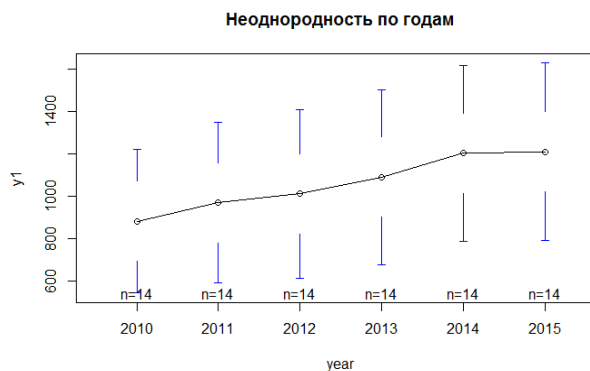


Рис. 2. Неоднородность данных по годам

Из анализа полученных графиков можно сделать вывод о том, что применение сквозной регрессии не целесообразно, так как поведение результативного признака в разных городах в разные периоды не идентично, поэтому рассмотрим модель с фиксированными и случайными эффектами.

Построение модели с детерминированными индивидуальными эффектами аналогично построению модели множественной регрессии с фиктивными переменными [4].

В качестве зависимой переменной возьмем показатель – ввод жилья за год (тыс. кв. м) –  $y_{it}$ . А в качестве факторов возьмем следующие:  $x_1$  – средняя заработная плата, руб.;  $x_2$  – цена на первичном рынке, руб. за кв. м;  $x_3$  – цена на вторичном рынке, руб. за кв. м;  $x_4$  – индекс цен в строительстве, %;  $x_5$  – процент по ипотеке, %;  $x_6$  – курс доллара, руб.;  $x_7$  – курс евро, руб.;  $x_8$  – ипотечные жилищные кредиты, млн руб.;  $x_9$  – стоимость строительства 1 кв. м, руб.

Для построения модели используем язык статистической обработки данных R. Таким образом, получаем следующие результаты (табл. 1).

Для Ижевска полученная модель примет вид

$$y_i = 893,43 + 0,04 \cdot x_{1i} - 0,012 \cdot x_{2i} - 0,019 \cdot x_{3i} - 1,664 \cdot x_{4i} + 8,991 \cdot x_{5i} + 15,972 \cdot x_{6i} - 11,208 \cdot x_{7i} + 0,016 \cdot x_{8i} - 0,002 \cdot x_{9i} + \varepsilon_i. \quad (1)$$

Коэффициент детерминации ( $R^2 = 0,9938$ ), так же как и критерий Фишера ( $F = 427$ ), указывает на то, что уравнение модели, формула (1), значимо в целом, но при этом не все переменные, включенные в модель, являются существенными (критерий Стьюдента для большинства переменных меньше критического значения) [5].

Таблица 1. Коэффициенты первоначальной модели и их статистическая оценка

Переменные	Коэффициенты	Стандартная ошибка	Критерий Стьюдента	Pr(> t )
$x_1$	0,0396	0,0129	3,07	0,0032
$x_2$	-0,0120	0,0064	-1,87	0,0664
$x_3$	-0,0188	0,0067	-2,81	0,0066
$x_4$	-1,6640	2,5539	-0,65	0,5171
$x_5$	8,9905	22,5815	0,40	0,6919
$x_6$	15,9720	10,3169	1,55	0,1268
$x_7$	-11,2084	11,5609	-0,97	0,3361
$x_8$	0,0158	0,0046	3,42	0,0011
$x_9$	-0,0015	0,0096	-0,15	0,8782
Ижевск	893,4304	508,7594	1,76	0,0841
Йошкар-Ола	862,1499	524,2440	1,64	0,1052
Казань	2409,7433	502,1502	4,80	0,0000
Киров	926,8140	513,9369	1,80	0,0763
Нижний Новгород	2027,3981	557,5404	3,64	0,0006
Оренбург	1131,9516	495,0476	2,29	0,0257
Пенза	1114,8425	514,0160	2,17	0,0340
Пермь	1104,8203	523,0613	2,11	0,0388

Окончание табл. 1

Переменные	Коэффициенты	Стандартная ошибка	Критерий Стьюдента	Pr(> t )
Самара	1819,8981	508,1477	3,58	0,0007
Саранск	829,0815	528,0849	1,57	0,1216
Саратов	1455,7695	490,2246	2,97	0,0043
Ульяновск	965,4250	500,4385	1,93	0,0584
Уфа	2645,7930	513,2853	5,15	0,0000
Чебоксары	1185,5329	514,7769	2,30	0,0247

В связи с этим, воспользовавшись процедурой подбора наилучшей модели (табл. 2), приходим к следующей модели для предложения на рынке города Ижевска:

$$y_i = 577,95 + 0,036 \cdot x_{1i} - 0,012 \cdot x_{2i} - 0,017 \cdot x_{3i} + 6,924 \cdot x_{6i} + 0,014 \cdot x_{8i} + \varepsilon_i. \quad (2)$$

Данная модель, формула (2), описывает 99,37 % вариации результативного признака, и лишь 0,63 % приходится на прочие факторы ( $R^2 = 0,9937$ ). Построенное уравнение является значимым в целом ( $F = 537,6$ ). К тому же все коэффициенты модели значимо отличаются от нуля при уровне значимости 6 %.

Таблица 2. Оценки коэффициентов наилучшей модели предложения

Переменные	Коэффициенты	Стандартная ошибка	Критерий Стьюдента	Pr(> t )
$x_1$	0,0360	0,0120	3,00	0,0039
$x_2$	-0,0117	0,0061	-1,92	0,0590
$x_3$	-0,0169	0,0063	-2,68	0,0093
$x_6$	6,9235	1,6248	4,26	0,0001
$x_8$	0,0143	0,0039	3,63	0,0006
Ижевск	577,9505	168,3470	3,43	0,0010
Йошкар-Ола	546,1172	177,9142	3,07	0,0031
Казань	2132,6529	159,1874	13,40	0,0000
Киров	617,0466	169,2155	3,65	0,0005
Нижний Новгород	1700,5404	214,7954	7,92	0,0000
Оренбург	831,4885	167,7196	4,96	0,0000
Пенза	812,6807	174,4953	4,66	0,0000
Пермь	820,9506	183,0802	4,48	0,0000
Самара	1527,4385	165,9397	9,20	0,0000
Саранск	517,8000	181,0355	2,86	0,0057
Саратов	1175,5409	155,0352	7,58	0,0000
Ульяновск	668,7282	158,3218	4,22	0,0001
Уфа	2353,3681	171,9831	13,68	0,0000
Чебоксары	875,4760	159,8138	5,48	0,0000

Для того чтобы определить истинное влияние факторов на модель, дополним ее расчетом стандартизованных коэффициентов и получим следующее уравнение [6]:

$$z_y = 0,204 \cdot z_{x_1} - 0,112 \cdot z_{x_2} - 0,204 \cdot z_{x_3} + 0,119 \cdot z_{x_6} + 0,235 \cdot z_{x_8} + \xi. \quad (3)$$

Полученная модель, формула (3), позволяет сделать вывод, что влияние выявленных факторов на предложение первичного рынка жилья практически

равное, однако большее влияние оказывает количество выданных ипотечных кредитов, а также уровень заработной платы в регионе. Таким образом, можно выявить взаимосвязь предложения и потребительского спроса, который формируется под воздействием финансовых возможностей населения.

В выявленной зависимости такие факторы, как стоимость жилья как на первичном, так и на вторичном рынке, оказывают отрицательное влияние, т. е. с увеличением стоимости жилья его предложение уменьшается, это может быть связано с тем, что цена жилья включает в себя расходы на строительство, которые при увеличении сокращают объемы предложения.

Проведем теперь анализ остатков модели на соответствие условиям теоремы Гаусса – Маркова [7]. Для анализа ошибки построим диагностические диаграммы для регрессии (рис. 3).

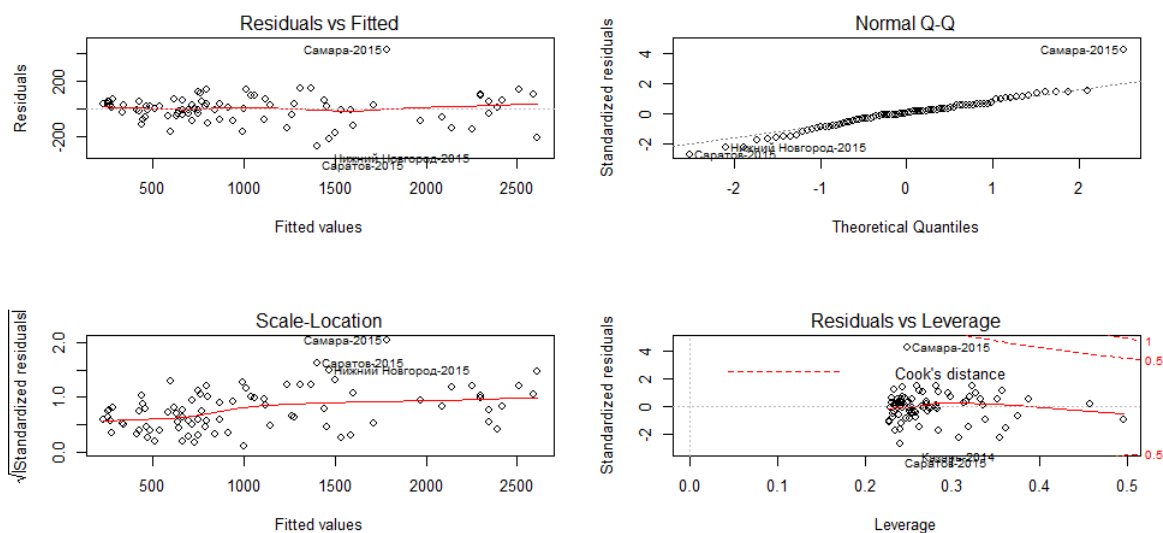


Рис. 3. Диагностические диаграммы для регрессионной зависимости предложения рынка жилья от факторов

**Гомоскедастичность.** Если допущения о постоянной изменчивости выполняются, то точки на нижней левой диаграмме должны располагаться вдоль горизонтальной линии [10]. Таким образом, данное допущение выполняется.

Последняя диаграмма (внизу справа) выявляет «выбросы», т. е. наблюдения, на которые стоит обратить внимание и которые плохо описываются построенной моделью. В нашем случае близкое к «выбросу» значение имеют Самара, Казань и Саратов за 2015 год, но так как они не являются объектами нашего исследования, то можно сказать, что модель с точки зрения рынка жилья Ижевска имеет стандартную ошибку.

**Автокорреляция.** Критерий Дарбина – Уотсона, равный 1,82, лежит в интервале  $(d_L; 2)$ , что свидетельствует о том, что корреляционная зависимость в ряду ошибки отсутствует.

Ошибка модели удовлетворяет всем пунктам теоремы Гаусса – Маркова, т. е. имеем классическую модель регрессии.

Поскольку на первом этапе моделирования была выявлена закономерность предложения от потреби-

**Нормальность.** Графическая проверка данных на нормальность (Normal Q-Q plot) основана на сопоставлении графика распределения вероятностей стандартизированных остатков и значений при нормальном распределении. Если допущения выполняются, то точки должны ложиться на прямую с углом наклона  $45^\circ$  [8]. В нашем случае имеем отклонения в наблюдениях: Нижний Новгород – 2015, Саратов – 2015 и Самара – 2015.

**Линейность.** Если зависимая переменная линейно связана с независимыми, то связь между остатками и предсказанными значениями отсутствует, т. е. модель должна отражать всю изменчивость в данных, учитывая все, кроме белого шума [9]. На диаграмме зависимости остатков от предсказанных значений (сверху слева) не прослеживается связи, поэтому гипотезу о линейности связи принимаем.

тельского спроса, то на втором этапе моделирования первичного рынка жилья построим модель спроса.

В качестве зависимой переменной рассмотрим объем продаж на первичном рынке города Ижевска за период с 2009 по 2015 год. Как и в предыдущей модели, используем панельные данные, составленные на основе показателей столиц регионов Приволжского федерального округа.

Принято считать, что объем спроса складывается под влиянием двух основных факторов, традиционно рассматриваемых в микроэкономических моделях: цены товара (жилья) и доходов потребителей. В свою очередь, кроме собственных доходов населения, среди которых основным является заработная плата, необходимо учитывать заемные средства населения и организаций (объем выданных банками жилищных кредитов). Традиционно рассматриваемые факторы со стороны спроса на рынке жилья назовем факторами потребительского спроса [11].

Кроме общепринятых, со стороны спроса на рынке жилья действуют факторы, относящиеся к факторам спекулятивного (инвестиционного) спроса. В первую очередь к ним относятся цены на вторич-

ном рынке жилья. Также к факторам спекулятивного спроса будем относить курсы валют (доллар, евро), мировые цены на российскую нефть, доходность акций на рынке ценных бумаг [12].

В результате за базовые показатели были приняты:

- $y$  – зависимая (эндогенная переменная) – приобретение жилья на первичном рынке (кв. м);
- независимые (экзогенные переменные):  $x_1$  – среднедушевые доходы населения, руб.;  $x_2$  – средняя заработная плата, руб.;  $x_3$  – жилплощадь на 1 жителя с запаздыванием на 1 год, кв. м;  $x_4$  – цена на первичном рынке, руб. за кв. м;  $x_5$  – цена на вторичном рынке, руб. за кв. м;  $x_6$  – индекс потребительских цен, %;  $x_7$  – доходность долгосрочных ценных бумаг, %;  $x_8$  – процент по ипотеке, %;  $x_9$  – курс доллара, руб.;  $x_{10}$  – курс евро, руб.;  $x_{11}$  – цена на нефть, руб.;  $x_{12}$  – ипотечные жилищные кредиты, млн руб.

Аналогично, как и для предыдущей модели, для проверки гипотезы о необходимости выделения индивидуальных эффектов построим графики в разрезе городов и времени (рис. 4 и 5).

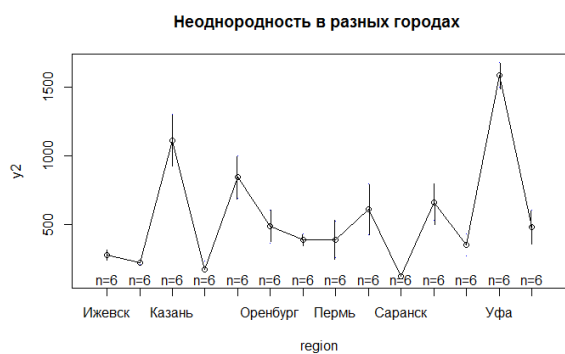


Рис. 4. Неоднородность спроса на рынке жилья по городам

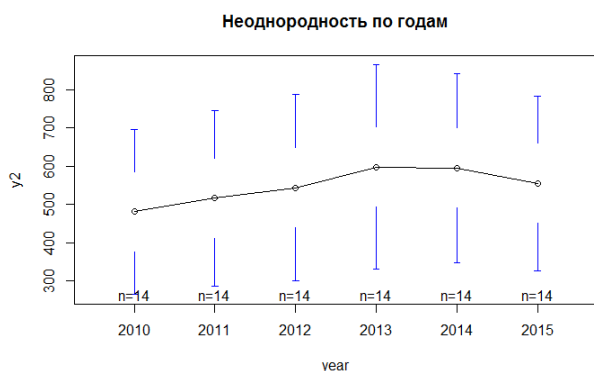


Рис. 5. Неоднородность данных по годам

Как видно из графиков, наблюдается индивидуальная неоднородность данных по городам, т. е. можно выдвинуть гипотезу о наличии индивидуальных эффектов в рассматриваемом массиве данных. К тому же первичный анализ (F-тест и тест Хаусмана) показал, что модель детерминированных эффектов

предпочтительнее модели сквозной регрессии и модели случайных эффектов [13].

Рассмотрим модель с фиксированными эффектами, в которой выдвигается гипотеза, что на тенденцию итогового показателя влияют факторы, присутствующие только конкретному региону. Используя статистический язык программирования R, получим следующую зависимость спроса на рынке жилья Ижевска (табл. 3) от факторов, включенных в модель:

$$y_t = -2950,32 - 0,009 \cdot x_{1t} + 0,035 \cdot x_{2t} + 4,954 \cdot x_{3t} - 0,003 \cdot x_{4t} - 0,011 \cdot x_{5t} + 23,098 \cdot x_{6t} + 0,301 \cdot x_{7t} + 28,427 \cdot x_{8t} + 32,330 \cdot x_{9t} - 32,637 \cdot x_{10t} + 1,555 \cdot x_{11t} + 0,010 \cdot x_{12t} + \varepsilon_t. \quad (4)$$

Таблица 3. Оценки коэффициентов первоначальной модели спроса

Переменные	Коэффициенты	Стандартная ошибка	Критерий Стьюдента	Pr(> t )
$x_1$	-0,0088	0,0155	-0,57	0,5695
$x_2$	0,0350	0,0211	1,66	0,1024
$x_3$	4,9539	61,8561	0,08	0,9364
$x_4$	-0,0031	0,0055	-0,55	0,5821
$x_5$	-0,0109	0,0057	-1,90	0,0622
$x_6$	23,0978	18,2614	1,26	0,2110
$x_7$	0,3011	0,3255	0,92	0,3589
$x_8$	28,4265	23,5436	1,21	0,2322
$x_9$	32,3302	15,5006	2,09	0,0414
$x_{10}$	-32,6371	16,8530	-1,94	0,0577
$x_{11}$	1,5554	3,2712	0,48	0,6362
$x_{12}$	0,0097	0,0037	2,59	0,0120
Ижевск	-2950,3228	2860,2902	-1,03	0,3066
Йошкар-Ола	-2971,9713	2926,7606	-1,02	0,3141
Казань	-2310,4201	2982,4965	-0,77	0,4417
Киров	-3042,8529	2955,2526	-1,03	0,3075
Нижний Новгород	-2360,3933	3029,3700	-0,78	0,4390
Оренбург	-2790,7914	2920,7230	-0,96	0,3433
Пенза	-2874,5305	3003,6619	-0,96	0,3425
Пермь	-2981,9089	2971,4876	-1,00	0,3198
Самара	-2710,3305	2967,7600	-0,91	0,3649
Саранск	-3050,4433	2975,8919	-1,03	0,3096
Саратов	-2698,0406	3013,5211	-0,90	0,3743
Ульяновск	-2916,7141	2981,2288	-0,98	0,3320
Уфа	-1733,6217	2942,4796	-0,59	0,5580
Чебоксары	-2795,9090	2946,2845	-0,95	0,3466

Данная модель в целом является значимой, так как коэффициент детерминации близок к 1 ( $R^2 = 0,9873$ ) и расчетное значение критерия Фишера гораздо больше критического ( $F = 173,7$  и  $p$ -value  $< 2.2e - 16$ ). Однако часть коэффициентов регрессии статистически не значимы, на что указывает расчетное значение критерия Стьюдента с уровнем значимости менее 0,05.

Воспользовавшись процедурой пошагового усовершенствования модели, приходим к итоговой модели спроса на рынке жилья Ижевска (табл. 4):

$$y_i = 350,31 + 0,0165 \cdot x_{2i} - 0,0121 \cdot x_{5i} + 0,0077 \cdot x_{12i} + \varepsilon_i \quad (5)$$

Таблица 4. Оценки коэффициентов окончательной модели спроса

Переменные	Коэффициенты	Стандартная ошибка	Критерий Стьюдента	Pr(> t )
$x_2$	0,0165	0,0084	1,95	0,0554
$x_5$	-0,0121	0,0042	-2,92	0,0048
$x_{12}$	0,0077	0,0027	2,87	0,0055
Ижевск	350,3148	111,5768	3,14	0,0025
Йошкар-Ола	369,2310	118,1512	3,13	0,0026
Казань	1080,3205	108,7850	9,93	0,0000
Киров	296,6197	115,4873	2,57	0,0125
Нижний Новгород	1006,2038	141,1813	7,13	0,0000
Оренбург	557,6643	115,1852	4,84	0,0000
Пенза	478,3483	117,5092	4,07	0,0001
Пермь	364,8241	110,0743	3,31	0,0015
Самара	655,0101	115,6033	5,67	0,0000
Саранск	271,0667	115,5416	2,35	0,0219
Саратов	681,3804	102,7269	6,63	0,0000
Ульяновск	437,7374	108,8734	4,02	0,0001
Уфа	1642,6636	116,6362	14,08	0,0000
Чебоксары	553,0066	105,9514	5,22	0,0000

Включенные в модель, формула (5), переменные описывают 98,56 % вариации спроса на жилье, остальные 1,44 % вариации описывается прочими факторами. Уравнение является значимым как в целом, также значимыми являются переменные, включенные в модель. При этом сама модель включает в себя только параметры потребительского спроса, для рассматриваемых объектов инвестиционный спрос оказался несущественным, поэтому гипотеза о его влиянии на общий спрос на рынке жилья отвергается. Таким образом, спрос на рынке жилья описывается экономическими законами и зависит от доходов населения и цены на товар (жилье).

Дополним нашу модель стандартизованными коэффициентами регрессии и перепишем ее в стандартизованном масштабе:

$$z_y = 0,156 \cdot z_{x_2} - 0,202 \cdot z_{x_5} + 0,155 \cdot z_{x_{12}} + \xi \quad (6)$$

Поскольку стандартизованные коэффициенты сравнимы между собой, то можно сделать вывод, что собственные и заемные средства населения оказывают одинаковое влияние на уровень спроса на рынке жилья, и их совместное влияние больше, чем влияние цены.

Проведем теперь диагностику ошибки модели, построив соответствующие графики ошибки (рис. 6) [14].

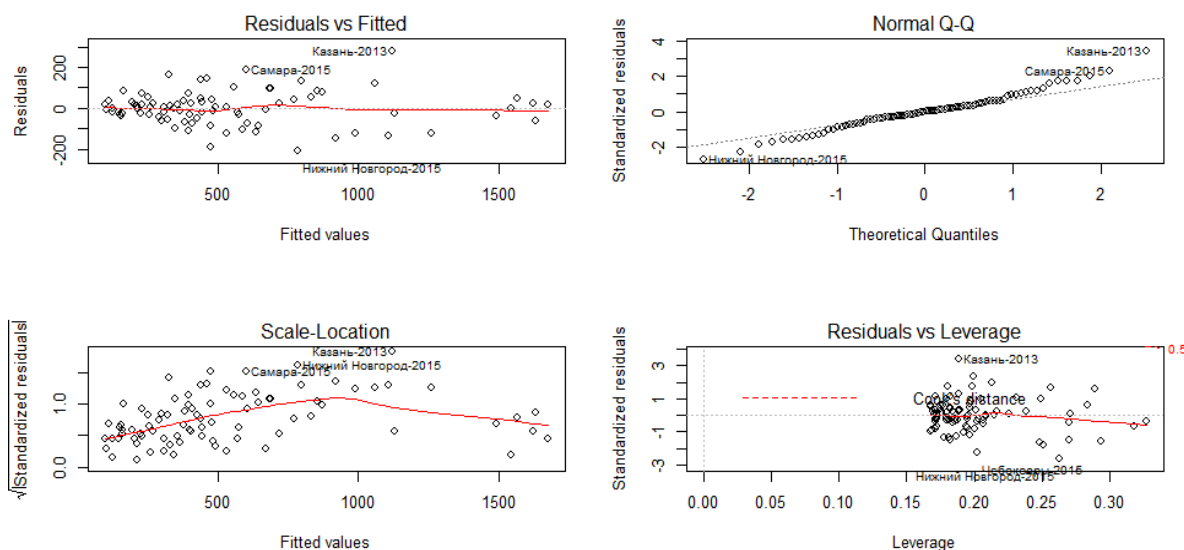


Рис. 6. Диагностические диаграммы для регрессии спроса на рынке жилья по соответствующим факторам

## Выводы

Анализ диагностических диаграмм показывает, что, если не учитывать выбросы в уровнях Казань – 2013, Самара – 2015, Нижний Новгород – 2015, то модель удовлетворяет всем требованиям теоремы Гаусса – Маркова о стандартности ошибки для классической линейной регрессии. В связи с тем что нашей целью является моделирование рынка жилья г. Ижевска, целесообразно модель оставить в прежнем виде без изменения и корректировки входных данных.

Таким образом, в процессе построения регрессионной модели удалось выявить факторы, значимо влияющие на состояние первичного рынка жилья г. Ижевска и определяющие происходящие на нем изменения.

## Библиографические ссылки

1. Мхитарян В. С. Эконометрическое моделирование стоимости квартиры на московском рынке вторичного жилья. – М., 1999.

2. *Стерник Г. М.* Математическая модель для прогнозирования цен на жилье // Экономика и статистические методы. – 1998. – № 6.

3. *Ратникова Т. А., Фурманов К. К.* Анализ панельных данных и данных о длительности состояний : учеб. пособие. – М. : Издательский дом высшей школы экономики, 2014.

4. Там же.

5. *Вербик М.* Путеводитель по современной эконометрике / под ред. С. А. Айвазяна. – М. : Научная книга, 2008.

6. Эконометрика / под ред. д-ра экон. наук, проф. В. С. Мхитаряна. – М. : Проспект, 2008.

7. *Вербик М.* Путеводитель по современной.

8. *Роберт И. Кабаков.* R в действии. Анализ и визуализация данных в программе R / пер. с англ. Полины А. Волковой. – М. : ДМК Пресс, 2014.

9. Там же.

10. Там же.

11. *Пузина Н. В.* Эконометрическая модель рынка жилья : роль спекулятивного и потребительского спроса // Вестник Омского университета. – Сер. «Экономика». – 2011. – № 2.

12. Там же.

13. *Ратникова Т. А., Фурманов К. К.* Анализ панельных данных и данных о длительности состояний.

14. *Роберт И. Кабаков.* R в действии...

\*\*\*

*A. Yu. Merzlyakov.*, PhD in Economics, Udmurt State University  
*E. Yu. Korshunova,* Kalashnikov ISTU

#### Mathematical Model for Izhevsk Primary Housing Market

*The paper deals with the problem of the economic and mathematical analysis of the state and prospects for the formation and development of the regional housing market, the state of which seriously affects, among other things, the social and economic situation in the region. With the help of statistical methods for studying panel data, models for the supply and demand of the primary housing market in Izhevsk have been constructed. The analysis of the situation in the market of Izhevsk is conducted in comparison with a number of other cities of the Volga Federal District. The main factors that significantly influence the state and development of the market are identified. The formation of the model occurred in several stages by successive refinement and variation by factors. The factors of demand and supply, which are, in this case, one of the defining factors, are considered in sufficient detail. To construct the model, the statistical data processing language R and the corresponding software were used. The carried out analysis includes a thorough check of the main criteria for evaluating the obtained models, which allows us to judge adequately the correctness of the results obtained.*

**Keywords:** primary housing market, supply and demand factors, econometric modeling of economic processes, analysis of panel data.

Получено: 24.04.17