УДК 539.431: 621.743.43

Д. С. Добровольский, магистрант
ИжГТУ имени М. Т. Калашникова

КРИТЕРИИ ТРЕЩИНОСТОЙКОСТИ НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

Практика эксплуатации ответственных конструкций в экстремальных условиях показывает, что их несущие элементы разрушаются в результате образования и постепенного развития магистральных трещин. Такие разрушения происходят при номинальных напряжениях ниже предела текучести материала, поэтому не могут в полной мере оцениваться только на основе классических теорий прочности. В связи с этим для оценки трещиностойкости материалов и элементов конструкций предложен ряд критериев: силовые (коэффициент интенсивности напряжений Дж. Ирвина; коэффициент сцепления Г. И. Беренблатта); деформационные (размер пластической области на продолжении трещины Г. Нейбера; раскрытие берегов трещины М. Я. Леонова и В. В. Панасюка; Д. Дагдейла), которые получены в предположении линейной механики деформирования. Энергетические критерии (плотность энергии натяжения берегов трещины А. Гриффитса; независимые от контура упругопластического деформирования интегралы Г. П. Черепанова и Дж. Райса) труднореализуемы, поэтому не получили широкого практического использования. В связи с этим в данной работе в результате развития ранее полученных автором решений для расчета местных напряжений, упругопластических деформаций и удельных энергий вблизи вершины трещины предложены энергетические (коэффициенты интенсивности энергии формы) и силовые (коэффициенты интенсивности девиаторных напряжений) критерии разрушения нелинейной механики деформирования для трещин нормального отрыва и несимметричного сдвига. В предположении местного упругого деформирования результаты работы согласуются с указанными выше энергетическими критериями. При местном упругопластическом деформировании получен новый физически обоснованный результат. Достоверность и обоснованность предлагаемых критериев подтверждается использованием наиболее экспериментально обоснованного физического критерия прочности – удельной энергии изменения формы с учетом располагаемой пластичности материала и энергетического состояния при предельном пластическом деформировании. Результаты работы использованы для экспериментальной оценки трещиностойкости вала при изгибе с вращением.

Ключевые слова: критические коэффициенты интенсивности энергии формы; критические коэффициенты интенсивности девиаторных напряжений.

В связи с широким использованием высокопрочных материалов, обладающих, как правило, пониженной пластичностью, промышленным освоением северных территорий в последнее время интенсивно развивается новая ветвь науки о прочности – механика разрушения (механика трещин). Начало изучения проблем хрупкого разрушения связано с инициативными исследованиями молодого инженера Английского авиационного центра А. Гриффитса [1]. В качестве материала для экспериментов использовалось стекло, а трещина (длиной $2l$) рассматривалась как предельно вытянутый эллипс. При применении упругого решения [2] о концентрации напряжений в окрестности эллиптического отверстия хрупкое разрушение бесконечной пластины с трещиной при растяжении критическим напряжением σ_c трактовалось с энергетических позиций. По аналогии с жидкостью А. Гриффитс предложил критерий трещиностойкости – критическая плотность поверхностной упругой энергии натяжения берегов трещины

$$\gamma_{1c} = \frac{1-\mu^2}{2E}\sigma_c^2 \pi l , \qquad (1)$$

необходимая для образования единицы длины поверхности берегов трещины, где μ, E – характеристики упругости. Полученные результаты оказались преждевременными и не были востребованы наукой и практикой. После пожара в лаборатории, возникшего при нагреве стекла, он был переведен в подразделение по разработке двигателей. Впоследствии Европейское общество целостности конструкций (ESIS) учредило медаль им. А. Гриффитса как награду за развитие механики разрушения.

Через три десятилетия в связи с участившимися хрупкими разрушениями ответственных конструкций Дж. Ирвин получил [3] решение упругой задачи о напряженно-деформированном состоянии (НДС) элементов конструкций с трещиной и на его основе предложил силовой критерий трещиностойкости линейной механики разрушения – критический коэффициент интенсивности напряжений (КИН)

$$K_{1c} = Y_1 \sigma_c \sqrt{\pi l} , \qquad (2)$$

который не имеет физического смысла и трактуется как параметр, определяющий НДС в окрестности трещины, где Y_1 – функция, зависящая от формы сечения, длины трещины, условий нагружения элемента конструкции и определяемая аналитическими, численными и экспериментальными методами. Силовой критерий K_{1c} используется в ГОСТ 25.506–85 при оценке трещиностойкости материалов [4], широко применяется на практике. Однако правомерность использования K_{1c} при вязком разрушении элементов конструкций в определенной мере условна. При упругом деформировании и хрупком разрушении Дж. Ирвин в качестве энергетического критерия трещиностойкости линейной механики разрушения рекомендовал использовать работу разрушения G_{1c}, необходимую для образования единицы длины трещины. Для трещины нормального отрыва при местной плоской деформации

$$G_{1c} = \left(1-\mu^2\right) K_{1c}^2 / E , \qquad (3)$$

который широко используется при хрупких и малодеформационных разрушениях элементов конструкций.

В модели Г. И. Беренблатта [5] учитываются силы межатомного взаимодействия берегов вблизи вершины трещины и предлагается силовой критерий трещиностойкости линейной механики разрушения – критический коэффициент сцепления

$$\text{к}_{1c} = \sqrt{0{,}5\pi} K_{1c}, \qquad (4)$$

который не получил широкого распространения.

Для оценки трещиностойкости при вязком разрушении разработаны деформационные критерии нелинейной механики разрушения. Первым в этом направлении является предложение Г. Нейбера [6], где в качестве физического критерия вязкого разрушения материала рекомендуется критический размер d_{1c} пластической области на продолжении трещины. Для идеально пластичного материала

$$d_{1c} = \pi K_{1c}^2 / 8\sigma_\text{т}^2, \qquad (5)$$

который не учитывает деформационное упрочнение материала и не получил дальнейшего развития.

Широко известной является δ_{1c}-модель нелинейной механики разрушения [7, 8], где в качестве деформационного критерия трещиностойкости используется упругопластическое раскрытие (перемещение) δ_{1c} берегов трещины. Для идеально пластичного материала

$$\delta_{1c} = \frac{8\sigma_\text{т} l}{\pi E} \ln\sec\frac{8\sigma_c}{2\sigma_\text{т}}. \qquad (6)$$

Вместе с этим формула (6) не учитывает влияние деформационного упрочнения материала.

Среди энергетических критериев нелинейной механики разрушения важное значение имеет концепция независимых (от контура интегрирования S в окрестности вершины трещины) интегралов – предложенный Г. П. Черепановым [9] интеграл Γ_{1c} и аналогичный интеграл J_{1c} Дж. Райса [10], пренебрегающий в отличие от Γ_{1c} кинетической энергией разрушения. В рамках деформационной теории пластичности интегралы $\Gamma_{1c} = J_{1c} = \int_S \sigma_{ij} de_{ij}$ можно рассматривать как полную удельную энергию упругопластической деформации, необходимую для образования единицы длины трещины, где σ_{ij}, e_{ij} – компоненты тензоров напряжений и деформаций; i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3 – индексы компонент. Однако использование независимых интегралов в инженерной практике громоздко, поскольку их реализация связана с численными методами. Для частного случая местной плоской упругой деформации

$$\Gamma_{1c} = J_{1c} = (1-\mu^2) K_{1c}^2 / E. \qquad (7)$$

В связи с изложенным разработка инженерных методов оценки трещиностойкости элементов конструкций при вязком разрушении представляется актуальной в научном и практическом отношениях.

Для решения инженерных задач прочности и пластичности широкое использование получила предложенная М. Т. Губером в 1904 г. теория энергии изменения формы [11]. С учетом этого и проведенного автором анализа энергетического состояния вблизи вершины трещины в данной работе за физический критерий разрушения принята удельная энергия изменения формы. Для ее определения рекомендуется использовать экспериментальные диаграммы упругопластического деформирования материалов в интенсивностях напряжений и деформаций, которые в соответствии с теорией упругопластических деформаций [12] инвариантны от траектории пропорционального нагружения. Указанные диаграммы для действительных σ_i, e_i и номинальных $\sigma_{i\text{н}}$, $e_{i\text{н}}$ интенсивностей напряжений и деформаций аппроксимируются линейными и степенными функциями

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_i = \sigma_{i\text{т}} e_i / e_{i\text{т}} \quad \text{при } \sigma_i \le \sigma_{i\text{т}},\\
&\sigma_i = \sigma_{i\text{т}} \left(e_i / e_{i\text{т}}\right)^{m_i} \quad \text{при } \sigma_i \ge \sigma_{i\text{т}},\\
&\sigma_{i\text{н}} = \sigma_{i\text{т}} e_{i\text{н}} / e_{i\text{т}} \quad \text{при } \sigma_{i\text{н}} \le \sigma_{i\text{т}},\\
&\sigma_{i\text{н}} = \sigma_{i\text{т}} \left(e_{i\text{н}} / e_{i\text{т}}\right)^{m_i} \quad \text{при } \sigma_{i\text{н}} \ge \sigma_{i\text{т}},
\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

где $\sigma_{i\text{т}}$, $e_{i\text{т}}$ – интенсивности напряжений и деформаций, соответствующие аппроксимированному пределу текучести; m_i – показатель деформационного упрочнения материала.

В соответствии с упругими и упругопластическими решениями [13, 14] необходимые для расчета энергии изменения формы интенсивности местных напряжений σ_i и упругопластических деформаций e_i в точке вблизи вершины трещины нетто-сечения взаимосвязаны с аналогичными величинами σ_{ie}, e_{ie} в предположении упругого деформирования таким образом:

$$\sigma_i e_i = \sigma_{ie} e_{ie} F, \qquad (9)$$

где F – корректирующая функция. Для номинального упругопластического деформирования ($\sigma_{i\text{н}} \ge \sigma_{i\text{т}}$)

$$F = 1 - \frac{0{,}5(1-m_i)\sigma_{i\text{т}} e_{i\text{т}}}{u_{\text{н}F}} \left[1 - \left(\frac{\sigma_{i\text{н}}}{\sigma_{ie}}\right)^2\right], \qquad (10)$$

а номинальная удельная энергия изменения формы

$$u_{\text{н}F} = 0{,}5\sigma_{i\text{т}} e_{i\text{т}} \left[1 + \frac{2}{1+m_i}\left(\frac{\sigma_{i\text{н}} e_{i\text{н}}}{\sigma_{i\text{т}} e_{i\text{т}}} - 1\right)\right]. \qquad (11)$$

Совместно рассматривая выражения (8)–(11), получаем интенсивности местных напряжений, упругопластических деформаций и энергию формы

$$\sigma_i = \sigma_{i\text{н}} \left[\left(\sigma_{ie}/\sigma_{i\text{н}}\right)^2 F\right]^{\frac{m_i}{1+m_i}}, \quad e_i = e_{i\text{н}} \left[\left(\sigma_{ie}/\sigma_{i\text{н}}\right)^2 F\right]^{\frac{1}{1+m_i}}, \qquad (12)$$

$$u = \int_0^{e_i} \sigma_i de_i = 0{,}5\sigma_{i\text{т}} e_{i\text{т}} + \frac{1}{1+m_i}\left(\sigma_{ie} e_{ie} F - \sigma_{i\text{т}} e_{i\text{т}}\right). \qquad (13)$$

В точке, расположенной в нетто-сечении элемента конструкции на расстоянии r от вершины трещины, реализуется условие местной плоской деформации (e_2 = 0). С учетом этого можно представить главные местные упругие напряжения

$$\sigma_1 = K_1 \big/ \sqrt{2\pi r}\,, \quad \sigma_2 = \mu\sigma_1\,, \ \ \sigma_3 \approx 0\,, \qquad (14)$$

и их интенсивность

$$\sigma_{ie} = \sqrt{1-\mu+\mu^2}\,K_1 \big/ \sqrt{2\pi r}\,. \qquad (15)$$

Первые главные напряжения σ_1 и деформации e_1 направлены перпендикулярно нетто-сечению, вторые σ_2, e_2 – параллельно фронту трещины, а третьи σ_3, e_3 – перпендикулярно σ_1 и σ_2. Если иметь в виду, что $e_{ie} = 2(1+\mu)\sigma_{ie}/3E$, а соответствующее разрушению предельное значение $F \to 1$ и принять слагаемое $\sigma_{i\text{т}}e_{i\text{т}}$ пренебрежимо малым по сравнению с $\sigma_i e_i$, то с учетом формул (12)–(15) получаем критическое значение удельной энергии изменения формы в точке с координатой r вблизи вершины трещины нормального отрыва

$$u_c = \frac{K_{1uc}}{2\pi r}\,, \quad K_{1uc} = \frac{4\left(1+\mu^3\right)}{3\left(1+m_i\right)}\frac{K_{1c}^2}{2E}\,, \qquad (16)$$

где K_{1uc} – критерий трещиностойкости нелинейной механики разрушения, характеризующий энергию изменения формы вблизи вершины трещины при разрушении, называемый критическим коэффициентом интенсивности энергии формы (КИЭФ). При упругом деформировании (μ = 0,3; m_i = 1) для хрупкого разрушения из (16) получаем

$$K_{1uc} = 0{,}685K_{1c}^2 \big/ 2E\,. \qquad (17)$$

Этот результат подтверждается классическими решениями (1), (3) и (7), если использовать их для определения критической энергии изменения формы u_c как части полной энергии u_{ct} и учесть, что при длине трещины l длина ее берегов равна $2l$, а при упругом деформировании $u_c/u_{ct} = 2\left(1-\mu+\mu^2\right) \big/ 3\left(1-\mu\right)$. Для предельного пластического деформирования ($\mu \to 0{,}5$) и вязкого разрушения материала без упрочнения (m_i =0) следует новый физически обоснованный результат

$$K_{1uc} = 1{,}5K_{1c}^2 \big/ 2E\,. \qquad (18)$$

Если принять, что при развитии трещины критическая деформация равна предельной пластической $e_\text{к} = \ln(1-\psi)^{-1}$ [15], то для учета коэффициента С. Пуассона μ_* в пластической области можно рекомендовать интерполяционную зависимость чл.-корр. РАН Н. А. Махутова:

$$\mu_* = 0{,}5 - \frac{0{,}5-\mu}{\left(e_\text{к}/e_{i\text{т}}\right)^{1-m_i}}\,. \qquad (19)$$

Здесь ψ – сужение в шейке при разрыве образца.

При кручении вала моментом $M_\text{кс}$ вблизи вершины кольцевой трещины несимметричного сдвига накапливается только критическая энергия изменения формы, определяемая аналогичным образом:

$$u_c = \frac{K_{3uc}^2}{2\pi r}\,, \quad K_{3uc} = \frac{2}{1+m_i}\frac{K_{3c}^2}{2G}\,, \qquad (20)$$

где $K_{3uc} = Y_3\tau_c\sqrt{\pi l}$ – критический КИЭФ для трещины несимметричного сдвига, энергетический критерий трещиностойкости нелинейной механики разрушения, физическая сущность которого аналогична K_{1uc}; Y_3 – функция, аналогичная Y_1; $\tau_c = 16M_\text{кс} \big/ \pi d_\text{н}^3$ – критическое номинальное касательное напряжение в вершине трещины; $d_\text{н}$ – диаметр нетто-сечения вала; G – модуль сдвига.

Для силовой трактовки нелинейной механики разрушения элементов конструкций предлагаются следующие критерии трещиностойкости – критические коэффициенты интенсивности девиаторных напряжений для трещин нормального отрыва и несимметричного сдвига

$$K_{1Dc} = \sqrt{\frac{4\left(1+\mu^3\right)}{3\left(1+m_i\right)}}K_{1c}\,, \quad K_{3Dc} = \sqrt{\frac{2}{1+m_i}}K_{3c}\,, \qquad (21)$$

которые взаимосвязаны с критическими КИЭФ:

$$K_{1uc} = K_{1Dc}^2 \big/ 2E\,, \quad K_{3uc} = K_{3Dc}^2 \big/ 2G\,. \qquad (22)$$

При упругом деформировании (μ = 0,3; m_i = 1) получаем: $K_{1Dc} = 0{,}827K_{1c}$; $K_{3Dc} = K_{3c}$. Для модели идеального пластичного материала (μ = 0,5; m_i = 0) имеем: $K_{1Dc} = 1{,}22K_{1c}$; $K_{3Dc} = 1{,}41K_{3c}$.

Достоверность и обоснованность предлагаемых энергетических и силовых критериев трещиностойкости подтверждается следующими теоретическими и экспериментальными результатами. Во-первых, при их разработке использован более экспериментально обоснованный физический критерий прочности – удельная энергия изменения формы. Во-вторых, полученные критерии учитывают располагаемую пластичность (ψ) и экспериментальные закономерности упругопластического деформирования ($\sigma_{i\text{т}}$, $e_{i\text{т}}$, m_i) материалов. В-третьих, критерии трещиностойкости элементов конструкций получены в результате развития предложенных автором решений для анализа напряженно-деформированного и энергетического состояний в окрестности трещин при соответствующем разрушению предельном пластическом деформировании.

Результаты работы использованы для экспериментальной оценки трещиностойкости вала при изгибе с вращением.

Библиографические ссылки

1. *Griffith A. A.* The Phenomena of Rupture and Flow in Solids // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. – 1921. – Ser. A. – Vol. 221. – P. 163–198.

2. *Inglis C. E.* Stresses in a Plate Due to the Presence of Cracks and Sharp Corners // Transactions of the Royal Institute of Naval Architectes. – 1913. – Vol. 60. – P. 219–241.

3. *Irwin G. R.* Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate // Journal of Applied

Mechanics – Transactions of the ASME. – 1957. – Vol. 24. – P. 361–364.

4. *Добровольский В. И.*, *Добровольский С. В.* Механические испытания материалов : учеб. пособие. – Ижевск : Изд-во ИжГТУ, 2008. – 268 с.

5. *Беренблатт Г. И.* Математическая теория трещин, образующихся при хрупком разрушении // Прикладная математика и техническая физика. – 1961. – № 4. – С. 30–34.

6. *Нейбер Г.* Концентрация напряжений. – М. ; Л. : Гостехиздат, 1947. – 204 с.

7. *Леонов М. Я.*, *Панасюк В. В.* Развитие мельчайших трещин в твердом теле // Прикладная механика. – 1959. – Т. 5. – № 4. – С. 391–401.

8. *Dugdale D. S.* Yielding of Steel Sheets Containing Slits // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 1960. – № 2. – P. 100–104.

9. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. – М. : Наука, 1974. – 640 с.

10. *Rice J. R.* A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks // Journal of Applied Mechanics – Transactions of the ASME. – 1968. – Vol. 35. – P. 379–386.

11. *Добровольский В. И.*, *Добровольский С. В.* Сопротивление материалов : учебник. – Ижевск : Изд-во ИжГТУ, 2011. – 402 с.

12. *Ильюшин А. А.* Пластичность. – Ч. 1. – М. : Гостехиздат, 1948. – 376 с.

13. *Добровольский Д. С.* Коэффициенты интенсивности напряжений для цилиндрического образца с кольцевой трещиной // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2016. – № 5. – С. 61, 62.

14. *Добровольский Д. С.* Напряжения и упругопластические деформации стержней с кольцевыми трещинами // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2016. – № 9. – С. 65–69.

15. *Махутов Н. А.* Деформационные критерии разрушения и расчет элементов конструкций на прочность. – М. : Машиностроение, 1981. – 272 с.

* * *

D. S. Dobrovolsky, Master's Degree Student, Kalashnikov Izhevsk state technical university

Criteria of Crack Resistance of Nonlinear Fracture Mechanics of Structural Elements

The practice of operating critical structures under extreme conditions shows that their bearing elements are destroyed as a result of the formation and gradual development of main cracks. Such failure occurs at nominal stresses below the yield strength of the material, and therefore can not be fully estimated only on the basis of classical strength theories. In this regard, to assess the crack resistance of materials and structural elements, a number of criteria are proposed: power (the stress intensity factor of G. Irwin, the cohesion coefficient of G. I. Berenblatt); deformation (the size of the plastic region on the extension of crack of G. Neuber, the opening of the shores of the fracture by M. Ya. Leonov and V. V. Panasyuk, D. Dugdale), which are obtained under the assumption of linear deformation mechanics. The energy criteria (the energy density of the tension of the shores of the A. Griffith crack, the integrals of G. P. Cherepanov and J. Rice, independent of the contour of elastoplastic deformation) are difficult to realize, and therefore have not received wide practical use. In this connection, as a result of the development of solutions previously obtained by the author for calculating local stresses, elastoplastic deformations and specific energies near the crack tip, energy (energy-form-factor) and strength (deviator stress intensity factors) criteria for fracture of nonlinear deformation mechanics for cracks of normal detachment and asymmetric shear. Under the assumption of local elastic deformation, the results of the work are consistent with the above energy criteria. A new physically grounded result was obtained with local elastoplastic deformation. The validity of the proposed criteria is confirmed by the use of the most experimentally grounded physical strength criterion – the specific energy of the change in shape, taking into account the material's plasticity and the energy state at the extreme plastic deformation. The results of this work are used for an experimental evaluation of the fracture toughness of a shaft during bending with rotation.

Keywords: critical factors of intensity of energy change forms; critical factors of intensity of the deviatoric stresses.

Получено: 28.03.17