

УДК 624.04

Ф. И. Плеханов, доктор технических наук
Г. Н. Первушин, доктор технических наук, профессор
ИжГТУ имени М. Т. Калашникова

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПЛИТЫ В МЕСТЕ ЕЕ ЗАДЕЛКИ В ОСНОВАНИЕ

В механических системах, строительных конструкциях и сооружениях часто встречаются соединения деталей в виде плиты или толстой пластины, жестко заделанной в основание. Податливость сопрягаемых элементов конструкции или сооружения приводит к неравномерному распределению погонной нагрузки в зоне их контакта, что оказывает существенное влияние на показатели прочности и жесткости отдельных деталей и сооружения в целом. В связи с этим важной является задача определения закона изменения погонной нагрузки и напряжений в месте заделки плиты в основание.

В приведенном в статье методе определения указанных силовых факторов плита представлена в виде балки на упругом основании, для которой справедливо уравнение Тимошенко – уравнение связи силовых факторов и деформаций изгиба и сдвига. Дифференциальное уравнение напряженно-деформированного состояния решалось аналитически методом Эйлера с учетом того, что балка испытывает стесненный изгиб и закон изменения погонной нагрузки носит характер аperiодических затухающих колебаний.

Полученные аналитические зависимости и построенные на их базе графики свидетельствуют, что на границе раздела пластины и жесткого основания имеет место большая концентрация погонной нагрузки, которая превышает среднее ее значение в десятки раз. Результаты исследования позволяют с достаточно высокой степенью точности осуществить расчет плиты или толстой пластины, заделанной в основание, на прочность и жесткость, что важно при проектировании узлов механизмов и строительных конструкций.

Ключевые слова: плита, упругое основание, погонная нагрузка.

В строительных конструкциях, сооружениях и механических системах часто встречаются сопряжения деталей в виде плиты, жестко заделанной в основание. Деформативность элементов такого узла приводит к неравномерному распределению нагрузки и напряжений в зоне их контакта, что оказывает существенное влияние на показатели прочности и жесткости сооружения или механизма и его составных частей [1, 2]. В связи с этим важной является задача определения закона изменения погонной нагрузки и напряжений в месте заделки плиты в основание.

Рассмотрим фрагмент сопряжения элементов конструкции, включающий в себя толстую плиту и часть основания (рис. 1). Используя метод Пуансо приведения силы к центру и принцип суперпозиции, определим погонную нагрузку $q(x)$ как сумму погонных нагрузок, вызванных действием приведенной к центру O силы P и создаваемого ей относительно центра приведения изгибающего момента M_0 , для чего запишем уравнение связи силовых факторов и деформации изгиба и сдвига плиты в зоне сопряжения $y(x)$ (уравнение Тимошенко [3, 4]):

$$\frac{M(x)}{IE} + k \frac{q(x)}{SbG} = y^{II}(x), \quad (1)$$

где $M(x) = M_0 + Px - \int_0^x q(\xi)(x - \xi)d\xi$; $M_0 = Ph = qlh$; b – ширина плиты; E – модуль упругости первого рода; $k = 1, 2$, $G = 0,5E / (1 + \mu)$; μ – коэффициент Пуассона.

Плита в месте ее заделки представляет собой балку на упругом основании, и ее деформация может быть выражена через погонную нагрузку и жесткость упругого основания c : $y(x) = q(x) / c$.

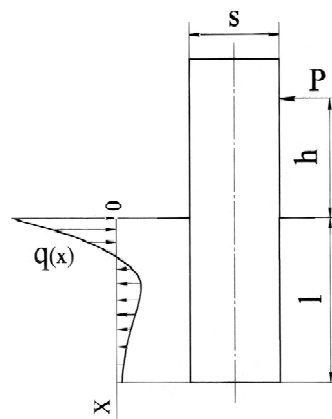


Рис. 1. Распределение погонной нагрузки в месте заделки плиты в основание материала сопрягаемых элементов, $I = bS^3 / 12$; S – толщина плиты

Тогда выражение (1) примет следующий вид:

$$q^{IV}(x) - \nu q^{II}(x) + \lambda q(x) = 0, \quad (2)$$

где $\nu = \frac{kc}{SbG}$, $\lambda = \frac{12c}{EbS^3}$.

Решение характеристического уравнения, соответствующего равенству (2):

$$\omega_{1-4} = \pm \sqrt{0,5\nu \pm \sqrt{0,25\nu^2 - \lambda}}.$$

Учитывая, что балка испытывает стесненный изгиб, закон изменения погонной нагрузки носит характер аperiодических затухающих колебаний. Это имеет место при $\lambda = \nu^2 / 4$, или

$$\omega = |\omega_{1-4}| = \frac{1}{S} \sqrt{\frac{12}{k(1 + \mu)}}.$$

Тогда погонная нагрузка, обусловленная действием внешних силовых факторов:

$$q(x) = (A + Bx)e^{-\alpha x}.$$

Постоянные интегрирования A, B определим из уравнений статики:

$$\int_0^l q(x) dx = P = ql, \quad M_0 + \int_0^l q(x) x dx = 0,$$

здесь l – длина плиты в зоне ее сопряжения с основанием; q – средняя погонная нагрузка в указанной зоне.

На рис. 2, 3 представлены графики изменения относительной погонной нагрузки в месте контакта деталей, соответствующие $\mu = 0, 25$.

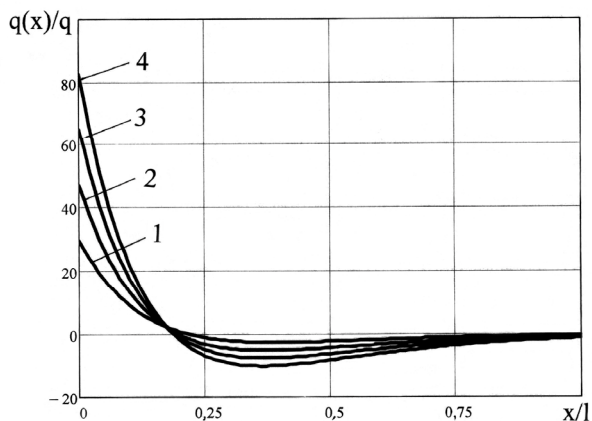


Рис. 2. Зависимость погонной нагрузки в зоне сопряжения плиты и основания $q(x)/q$ от x/l при $l/s = 2$: 1– $h/s = 1$, 2– $h/s = 2$, 3– $h/s = 3$, 4– $h/s = 4$

Учитывая равенство $\lambda = v^2 / 4$, или $c = 12Eb / [sk^2(1 + \mu)^2]$, можно определить перемещение в зоне сопряжения

$$y(x) = q(x) / c = \frac{s[k(1 + \mu)]^2}{12Eb} q(x),$$

а также прогиб балки в месте приложения к ней силы P

$$y(h) = \frac{s[k(1 + \mu)]^2}{12Eb} [q(0) + q'(0)h] + \frac{4ql}{Eb} \left(\frac{h}{s}\right)^3 + \frac{kqlh}{bsG}.$$

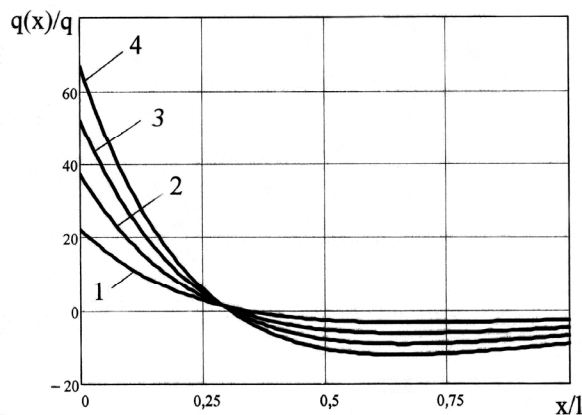


Рис. 3. Зависимость погонной нагрузки в зоне сопряжения плиты и основания $q(x)/q$ от x/l при $l/s = 1$: 1– $h/s = 1$, 2– $h/s = 2$, 3– $h/s = 3$, 4– $h/s = 4$

Полученные аналитические зависимости и построенные на их базе графики свидетельствуют, что на границе раздела пластины и жесткого основания имеет место большая концентрация погонной нагрузки. Результаты исследования позволяют с достаточно высокой степенью точности осуществить расчет плиты или толстой пластины, заделанной в основание, на прочность и жесткость, что важно при проектировании узлов механизмов и строительных конструкций.

Библиографические ссылки

1. Nikolic V., Dolićanin C., Dimitrijevic D. (2010). Numerical modelling of gear set dynamic behaviour. Scientific Technical Review, no. 3-4, p. 48–54.
2. Plekhanov F. I., Kuznetsov V. S. (2010). Deformability of elements of a planetary gear transmission. Russian Engineering Research, Vol. 30, no. 6, p. 557–560.
3. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. – М.: Либроком, 2009. – 640 с.
4. Ахметзянов М. Х., Лазарев И. Б. Сопротивление материалов. – М.: ЮРАЙТ, 2011. – 299 с.

F. I. Plekhanov, DSc in Engineering, Professor, Kalashnikov ISTU
G. N. Pervushin, DSc in Engineering, Professor, Kalashnikov ISTU

Investigation of the Stress-Strain State of the Plate in the Place of Its Fixing on the Basis

In mechanical systems and building structures, the joint of parts as a sheet or a thick plate rigidly fixed on the basis are rather common. Compliance of contacting elements of the structure leads to non-uniform distribution of the unit load in their contact zone, thus essentially affecting the strength and rigidity parameters of individual parts and structures as a whole. In this connection, the problem of determining the law of variation of the unit load and stresses in the place of the plate fixing on the basis becomes relevant.

This paper considers the method for determining the pointed power factors, implying the representation of the plate as the beam on the elastic basis, for which the Timoshenko equation is valid, that is, the equation of relation of power factors and bending and shearing strains. The differential equation of the stress-strain state is solved analytically by the Euler method, accounting for the fact that the beam is subjected to constraint bending and the law of variation of the unit load is of aperiodic attenuating oscillations.

The obtained analytical relations and plotted on their basis diagrams indicate that the unit load is highly concentrated at the boundary of the plate and the rigid basis, the value of this load exceeding its average value dozens of times. Investigation results allow for performing the strength and rigidity calculation of the sheet or the thick plate fixed on the basis with a high degree of accuracy, which is urgent when designing the units of mechanisms and building structures.

Keywords: plate, elastic basis, unit load

Получено: 24.03.17