

УДК 534:624.074.4

DOI 10.22213/2410-9304-2017-4-89-93

А. Н. Краснов, кандидат технических наук  
 Уфимский государственный нефтяной технический университет  
 В. Е. Лялин, доктор технических наук, доктор экономических наук,  
 доктор геолого-минералогических наук, профессор  
 ИжГТУ имени М. Т. Калашникова

### ХАРАКТЕР РАСПРОСТРАНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ СТенок ГАЗОПРОВОДА ОТ ИСТОЧНИКА ВОЗБУЖДЕНИЙ

*Рассчитаны акустические импедансы бесконечной цилиндрической оболочки трубы с учетом существующих условий резонансов по продольным и сдвиговым волнам в оболочке при различных азимутальных числах и углах между направлением распространения нормальной волны и нормалью к поверхности оболочки.*

*Необходимо проводить сопоставление распределения импеданса по частоте и по длине трубы, найденное из эксперимента с теоретическим распределением импеданса, рассчитанным по уравнениям акустики.*

*Весьма актуально, что при доводке агрегатов газокompрессорной станции возникает необходимость сопоставления характеристик акустического поля, полученных из эксперимента и рассчитанных по системе уравнений, описывающих функционирование энергетической установки. В связи с этим необходимо исследовать, какие измерения необходимо провести в ходе испытания и как обработать полученную информацию, чтобы получить необходимые характеристики акустической волны (импеданс, соотношение между энергиями бегущей и стоячей компоненты).*

*В статье рассмотрен характер распространения колебаний стенок трубопровода от источника возбуждений. Показано, что комплексные корни определяют волны, которые уносят энергию источника в бесконечность. Все остальные корни определяют такие колебательные движения, энергия которых локализована около источника.*

**Ключевые слова:** колебания стенок и шумы газопроводов, входной адмитанс, задачи звукоизоляции, акустическое поле, энергетической установки.

При выборе средств снижения шума цилиндрической оболочки большую роли играет вопрос о характере возбуждения ее колебаний. Например, в газопроводах, идущих от центробежных нагнетателей в гидроприводах станков различного назначения, воздухопроводах, идущих от компрессоров в системах вентиляции и т. п. Колебания стенок труб могут вызываться пульсацией в них потока газа или жидкости значительной энергии.

Несмотря на большую звукоизоляцию стенок трубопроводов, их колебания создают в окружающем пространстве значительный шум.

В то же время колебания трубопроводов могут возбуждаться вибрациями нагнетателя насоса или компрессора. Выбор того или иного способа снижения шума будет зависеть от характера распространения колебаний стенок трубопровода от источника. Для выяснения этого вопроса рассмотрим простейшую задачу о возбуждении бесконечной оболочки радиусом  $a$  сосредоточенной (точечной) гармонической силой частотой  $f = \frac{\omega}{2\pi}$ . Выберем цилиндрическую систему координат так, чтобы ось  $z$  совпадала с осью оболочки (рис. 1). Положим, что в точке  $(\varphi = 0; z = 0)$  на стенку оболочки действует сила  $F_0 \delta(z) \delta(a\varphi) e^{-i\omega t}$ , где  $F_0$  – амплитуда силы;  $\delta(z)$  и  $\delta(a\varphi)$  –  $\delta$  – функции Дирака.

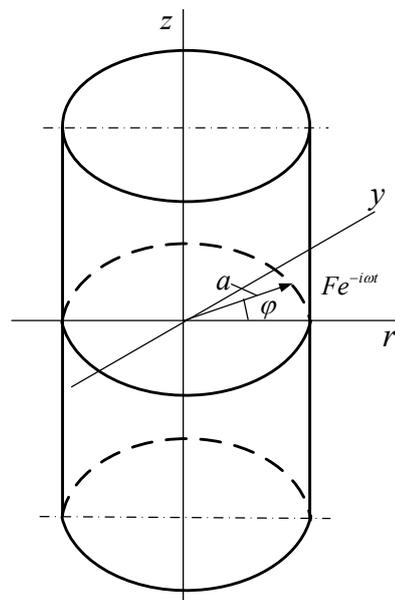


Рис. 1. Цилиндрическая система координат

Временной множитель  $e^{-i\omega t}$ , как обычно, в дальнейшем будем опускать. Решение для составляющих скорости смещения точек срединной поверхности оболочки запишем в виде разложения по бегущим волнам  $e^{(kx+n\varphi)}$ , где  $n = 0, 1, 2, \dots$  – целое число. Для задач звукоизоляции и излучения интерес представляют только радиальные скорости  $\mathcal{V}_r$

$$\mathfrak{G}_r(\varphi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mathfrak{G}}_{rn}(k) e^{ikz} dk. \quad (1)$$

Подставим возбуждающую силу также в виде разложения

$$F_0 \delta(z) \delta(a\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}_n(k) e^{i(kz+n\varphi)} dk. \quad (2)$$

Амплитуду гармоник  $\tilde{F}_n(k)$  определим, умножив правую и левую части (2) на  $e^{-i(m\varphi+k'z)}$  и проинтегрировав по углу в пределах от  $-\pi$  до  $+\pi$ , а по  $z$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ :

$$\begin{aligned} F_0 \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-ik'z} \delta(z) \int_{-\pi}^{\pi} e^{-m\varphi} \delta(a\varphi) d\varphi = \\ = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}_n(k) dz \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iz(k-k')} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)\varphi} d\varphi. \end{aligned} \quad (3)$$

Левая часть этого выражения равна  $F_0/a$ , так как  $\int_a^b f(x) \delta(x-x_0) dx = f(x_0)$ , если  $a \leq x_0 \leq b$  и  $\delta(a\varphi) = \frac{1}{a} \delta(\varphi)$ .

В правой части

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)\varphi} d\varphi = \begin{cases} 2\pi & \text{при } n = m, \\ 0 & \text{при } n \neq m. \end{cases} \quad (4)$$

Интеграл

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iz(k-k')} dz = 2\pi \delta(k-k'), \\ a 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}_n(k) \delta(k-k') dk = 2\pi \tilde{F}_n(k). \end{aligned}$$

Учитывая эти соотношения, определим из (3) амплитуду  $\tilde{F}_n(k)$

$$\tilde{F}_n(k) = \frac{F_0}{4\pi^2 a}. \quad (5)$$

Амплитуды  $\tilde{\mathfrak{G}}_{rn}$  и  $\tilde{F}_n(k)$  связаны между собой через импеданс цилиндрической оболочки для нормальных волн  $Z_n(k)$  [1]

$$\tilde{\mathfrak{G}}_m(k) = \frac{\tilde{F}_n(k)}{Z_n(k)}. \quad (6)$$

Значение этого импеданса вычислено на основе обычно используемых уравнений движения цилиндрической оболочки [2]

$$Z_n(k) = -i\omega m \left[ \frac{1 - \frac{\left(k^2 + \frac{n^2}{a^2}\right)^2}{k_u^4}}{1 - \frac{(k^2 - k_t^2)(k^2 - k_n^2) - k_n^2 \frac{n^2}{a^2}}{k_n^2 a^2 \left(k^2 + \frac{n^2}{a^2} - k_0^2\right) \left(k^2 + \frac{n^2}{a^2} - k_t^2\right)}} \right], \quad (7)$$

где  $k_u = \sqrt[4]{\frac{\omega^2 m}{B}}$  – волновое число изгибных колебаний в пластине, из которой изготовлена оболочка;  $m = \rho h, B = \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)} u h$  – масса, из-

гибная жесткость и толщина этой пластины;  $E$  и  $\sigma$  – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала оболочки;  $k_n = \omega/c_n, k_t = \omega/c_t,$

$k_0 = \omega/c_0$  – волновые числа;  $c_n = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$  – скорость распространения продольных волн в стержне;  $c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\sigma^2)}}$  – скорость распро-

странения продольных волн в пластине;  $c_t = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\sigma)}}$  – скорость распространения поперечных волн.

Для дальнейшего анализа выражение, стоящее в квадратных скобках (7), полезно привести к безразмерному виду. Для этого положим, что  $k = tk_n$ , и введем обозначения:

$$\left\{ \begin{aligned} \gamma^2 &= \frac{k_n^4}{k_u^4} = \frac{f^2}{f_{n1}^4}; \\ a^2 &= \frac{1}{k_n^2 a^2} = \frac{f_n^2}{f^2}; \\ f_{n1} &= \frac{c_n}{h} \frac{\sqrt{3(1-\sigma^2)}}{\pi} \approx 0,5 \frac{c_n}{h}; \\ f_n &= \frac{c_n}{2\pi a} = 0,16 \frac{c_n}{a}; \\ n_t^2 &= \frac{k_t^2}{k_n^2} = 2(1+\sigma); \\ n_0^2 &= \frac{k_0^2}{k_n^2} = (1+\sigma^2). \end{aligned} \right. \quad (8)$$

С учетом этого выражение (7) запишется в виде

$$Z_n(t) = -i\omega m \left[ \begin{array}{c} 1 - \gamma^2 (t^2 + n^2 a^2) - \\ \frac{(t^2 - n_i^2)(t^2 - 1) - n^2 a^2}{(t^2 + n^2 a^2 - n_0^2)(t^2 + n^2 a^2 - n_i^2)} \end{array} \right]. \quad (9)$$

Следует отметить, что частота  $f_{n1}$  всегда значительно выше  $f_n$ , так как она обратно пропорциональна толщине оболочки  $h$ , в то время как  $f_n \sim 1/a$ . Отношение частот

$$\frac{f_{n1}}{f_n} = \frac{1}{\sqrt{12(1 - \sigma^2)}} \frac{h}{a}. \quad (10)$$

$$\begin{aligned} Y_{n_0}(t) &= \\ &= \frac{(t^2 + n^2 a^2 - n_0^2)(t^2 + n^2 a^2 - n_i^2)}{(t^2 + n^2 a^2 - n_0^2)(t^2 + n^2 a^2 - n_i^2)(t^2 + n^2 a^2 - n_i^2) \left[ 1 - \gamma^2 (t^2 + a^2)^2 \right] - a^2 \left[ (t^2 - n_i^2)(t^2 - 1) - n^2 a^2 \right]} = \\ &= \frac{\psi(t)}{f(t)}. \end{aligned} \quad (12)$$

Знаменатель  $f(t)$  является многочленом восьмого порядка, а числитель  $\psi(t)$  – четвертого, поэтому подынтегральная функция в (11) удовлетворяет лемме Жордана, и интеграл может быть вычислен с помощью теоремы о вычетах. В нашем случае она особенно полезна, так как интеграл в (11) является несобственным интегралом. Кроме бесконечных пределов интегрированная часть полюсов подынтегральной функции лежит на действительной оси. Последнюю трудность можно обойти, если ввести потери в материал оболочки. Можно показать, что положительные полюса при этом сместятся вверх, а отрицательные – вниз с действительной оси. Тогда при вычислении интеграла нужно учитывать только те полюса, которые попадают внутрь контура интегрирования.

При  $k_n z > 0$  запишем контур интегрирования в комплексной плоскости  $t$  сверху другой полуокружности  $C_R$  и радиусом  $R$  (рис. 2). Подынтегральная функция, как уже указывалось выше, удовлетворяет лемме Жордана, поэтому при  $R \rightarrow \infty$  интеграл по дуге  $C_R$  стремится к 0 и искомый интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} Y_{n_0}(t) e^{ik_n z t} dt = 2\pi i \sum_{j=1}^4 \text{Res} \left[ e^{ik_n z t} \frac{\psi(t)}{f(t)} \right]. \quad (13)$$

Подставив (6) в (1) и используя (5), получим выражение для радиальной скорости

$$\mathfrak{G}_r(\varphi, z) = \frac{iF_0 k_n}{4\pi^2 a \omega m} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{in\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} Y_{n_0}(t) e^{ik_n z t} dt. \quad (11)$$

Из (9) следует, что функция  $Y_n(t) = \frac{1}{Z_n(t)} = (i/\omega m) Y_{n_0}(t)$  является мероморфной и может быть представлена в виде отношения двух многочленов  $\varphi(t)$  и  $f(t)$ :

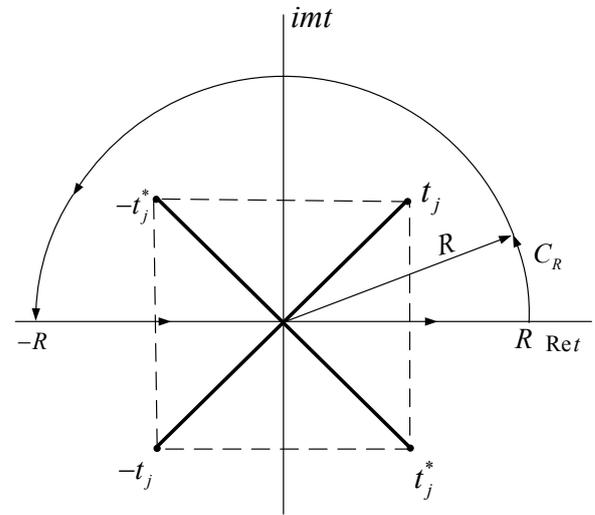


Рис. 2. Контур интегрирования

Суммирование вычетов  $\text{Res}$  в полюсах  $t_j$  производится по  $j$  от 1 до 4 потому, что  $Y_{n_0}(t)$  имеет 8 полюсов, 4 из которых лежат в верхней полуплоскости и 4 – в нижней. Так как знаменатель подынтегральной функции  $f(t)$  – функция четна по  $t$ , то уравнению  $f(t) = 0$  удовлетворяют корни  $t = \pm t_j$ . Так как коэффициенты  $f(t)$  – действительные числа, то комплексные

корни являются попарно комплексно-сопряженными. Таким образом, если у уравнения  $f(t) = 0$  есть хотя бы один комплексный корень  $t_j$ , то обязательно должны быть еще три расположенных на комплексной плоскости  $t$  так, как указано на рис. 2. Если больше комплексных корней нет, то остальные корни могут быть попарно либо чисто мнимыми, либо действительными.

Все вышесказанное дает основание полагать, что за исключением особых случаев все полюса подынтегральной функции являются простыми. В этом случае

$$\operatorname{Res} \left[ e^{ik_n z t_j} \frac{\Psi(t_j)}{f(t_j)} \right] = \frac{e^{ik_n z t_j} \Psi(t_j)}{\frac{df(t_j)}{dt}}. \quad (14)$$

Радиальная скорость колебания стенок (11) равна

$$\vartheta_r(\varphi, z) = \frac{-F_0 k_n}{2\pi a \omega m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\varphi} \sum_{j=1}^4 \frac{e^{ik_n z t_j} \Psi(t_j)}{\frac{df(t_j)}{dt}}. \quad (15)$$

Из (15) следует, что только действительные корни  $t_j$  определяют волны, которые уносят энергию от источника в бесконечность. Все остальные определяют такие колебательные движения, энергия которых локализована около источника.

Для выработки мер по снижению шума нужно количественно оценить соотношение между этими энергиями. Проще всего сделать это через входной адмитанс системы, который определяется как отношение скорости в точке приложения силы  $\vartheta_r(0, 0)$  к величине силы  $F_0$

$$Y_{\text{вх}} = -\frac{k_n}{2\pi a \omega m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^4 \frac{\Psi(t_j)}{f'(t_j)}. \quad (16)$$

Входной адмитанс является комплексной величиной. Действительная его часть определяет

энергию  $W_a$ , которая уносится бегущими волнами в бесконечность. Мнимая часть  $Y_{\text{вх}}$  характеризует ту часть энергии  $W_p$ , которая сосредоточена около источника. Если  $Y_{\text{вх}} = Y_a + iY_p$ , то  $W_a = F^2 W_a / 2$ ,  $W_p = F^2 W_p / 2$ .

Суммирование по  $n$  в (16) можно свести к пределам от 0 до  $\infty$ , так как  $\frac{\Psi(t)}{f(t)}$  – четная функция по  $n$ . Тогда  $C_{-n} = C_n$ , и (16) запишется как

$$Y_{\text{вх}} = -\frac{1}{\pi a c_n \omega m} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^4 \frac{\Psi(t_j)}{f'(t_j)}. \quad (17)$$

При расчетах часто полезнее рассматривать входной адмитанс для каждого  $n$  отдельно, так как при этом появляется возможность отделить моды, у которых энергия сосредоточена возле точки приложения силы, от мод, у которых энергия распространяется вдоль оболочки далеко от источника.

Для  $n = 0$  можно провести оценки адмитанса  $Y_{\text{вх}, 0}$  для частот ниже и выше частоты продольного резонанса  $f_n = c_n / 2\pi a$ .

#### Библиографические ссылки

1. Ретлинг Э. В. О излучении звука цилиндрической оболочкой // Интернет-вестник ВолгГАСУ. Сер.: Политематическая. 2012. Вып. 1 (20).
2. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. 575 с.

#### References

1. Retling E. V. (2012). *Internet-vestnik VolgGASU* [Internet-bulletin of VolgGASU], vol. 1 (20) (in Russ.).
2. Timoshenko S. P., Voinovskii-Kruger S. (1966). *Plastinki i obolochki* [Plates and shells]. Moscow: Nauka, 575 p. (in Russ.).

\*\*\*

A. N. Krasnov, PhD in Engineering, Ufa State Oil Technical University

V. E. Lyalin, DSc in Engineering, DSc in Economics, DSc in Geology and Mineralogy, Professor, Kalashnikov ISTU

#### Character of Vibration Propagation for Gas Pipeline Walls from Excitation Source

*The acoustic impedances of the infinite cylindrical shell of the tube are calculated with allowance for the existing resonance conditions along the longitudinal and shear waves in the shell for different azimuthal numbers and angles between the direction of propagation of the normal wave and the normal to the shell surface.*

*It is necessary to compare the distribution of the impedance in frequency and along the length of the tube, found from an experiment with a theoretical distribution of the impedance calculated from the equations of acoustics.*

---

*It is very important that when adjusting the aggregates of the gas compressor station, it becomes necessary to compare the characteristics of the acoustic field obtained from the experiment and calculated from the system of equations describing the functioning of the power plant. In this connection, it is necessary to investigate what measurements need to be taken during the test and how to process the information obtained in order to obtain the necessary characteristics of the acoustic wave (impedance, the ratio between the energies of the running and standing components).*

*The paper considers the propagation of vibrations from the pipe walls excitation source. It is shown that complex roots define waves that carry energy source to infinity. All remaining roots define such an oscillatory motion, the energy of which is localized near the source.*

**Keywords:** wall and noise oscillations of gas pipelines, input admission, soundproofing tasks, acoustic field, power installation.

Получено: 30.10.17