

УДК 621.391

DOI 10.22213/2410-9304-2018-1-33-40

*Н. В. Пономарева*, соискатель  
*О. В. Пономарева*, доктор технических наук  
*В. В. Хворенков*, доктор технических наук, профессор  
ИжГТУ имени М. Т. Калашникова

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОГИБАЮЩЕЙ АНГАРМОНИЧЕСКОГО ДИСКРЕТНОГО СИГНАЛА НА ОСНОВЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГИЛЬБЕРТА В ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ

*Рассмотрено применение преобразования Гильберта в частотной области на основе дискретного преобразования Фурье для определения огибающих (мгновенных амплитуд) действительных ангармонических аналоговых и дискретных сигналов. Ангармонические дискретные сигналы рассмотрены как отдельный класс периодических дискретных сигналов в связи с их специфическими свойствами и широким применением ангармонических сигналов для описания информационных сигналов в следующих предметных областях: акустика (в том числе психоакустика и музыкальная акустика), геофизика, виброакустическое функциональное диагностирование механических объектов, компьютерная медицинская диагностика, пассивная гидроакустика. Приведены физические условия выбора сигнала, сопряженного действительному ангармоническому сигналу. Предложен алгоритм гипотетического измерителя мгновенных значений огибающей, фазы и частоты действительного сигнала. Показано, что применение преобразования Гильберта в частотной области для получения аналитических ангармонических дискретных сигналов имеет преимущества перед генерацией аналитических ангармонических дискретных сигналов во временной области. Предложена структура получения дискретного аналитического сигнала методом дискретного преобразования Фурье действительного дискретного сигнала. Получены аналитические выражения огибающих ангармонических дискретных сигналов с различным числом составляющих равной амплитуды. Приведены экспериментальные исследования на модельных действительных ангармонических сигналах, подтвердившие результаты, полученные теоретически в аналитической форме.*

**Ключевые слова:** ангармонический дискретный сигнал, огибающая, дискретное преобразование Фурье, дискретное преобразование Гильберта, музыкально-акустический сигнал, частотный спектр.

Понятие ангармонических дискретных сигналов в теорию и практику обработки цифровых сигналов введено в работе [1]. Необходимость введения ангармонических сигналов<sup>1</sup> как отдельного класса периодических сигналов объясняется, с одной стороны, их специфическими свойствами, с другой – широким применением ангармонических сигналов для описания информационных сигналов в следующих предметных областях: акустика (в том числе психоакустика и музыкальная акустика) [2, 3], геофизика [4], виброакустическое функциональное диагностирование механических объектов [5–7], компьютерная медицинская диагностика [8–10], пассивная гидроакустика [11].

В рамках теории обработки аналоговых и дискретных ангармонических сигналов представляется крайне важным и актуаль-

ным (как с теоретической, так и с практической точек зрения) однозначное определение на конечных интервалах в аналитическом виде их мгновенных параметров – огибающей, мгновенной фазы и мгновенной частоты.

Целью работы является определение в аналитическом виде огибающей ангармонических дискретных сигналов с различным числом составляющих равной амплитуды на основе преобразования Гильберта в частотной области.

Действительный сигнал  $x(t)$  [12–14] может быть представлен как во временной форме:

$$x(t) = A(t) \cdot \cos[\varphi(t)], \quad (1)$$

где  $A(t)$  – огибающая сигнала;  $\varphi(t)$  – мгновенная фаза сигнала  $x(t)$ ;  $f(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt}$  – мгновенная частота, так и в *спектральной форме*:

$$x(t) = \sum_k A_k \cos(2\pi f_k t + \varphi_k), \quad (2)$$

где  $A_k$  – амплитуда  $k$ -й гармонической компоненты;  $f_k$  – частота  $k$ -й гармонической компоненты;  $\varphi_k$  – начальная фаза  $k$ -й гармонической компоненты.

Отметим, что представления (1) и (2) – это два равноправных представления сигнала  $x(t)$ , применение которых определяется областью приложения методов обработки сигналов.

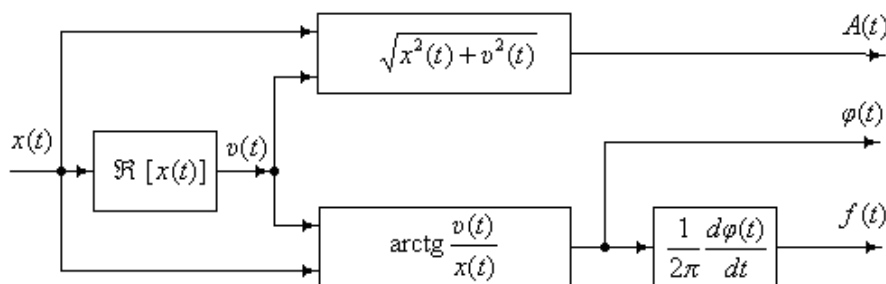


Рис. 1. Алгоритм гипотетического измерителя мгновенных значений огибающей, фазы и частоты действительного сигнала  $x(t)$

В работе [16] сформулированы следующие *физические условия выбора оператора  $\mathfrak{R}$* :

- малым изменениям входного сигнала  $x(t)$  должны соответствовать малые изменения результатов измерения мгновенных параметров;

- результаты измерения мгновенной фазы и мгновенной частоты не должны зависеть от мощности сигнала при неизменной его форме;

- параметры чисто гармонических сигналов: амплитуды, частоты и фазы, измеренные гипотетическим измерителем (рис. 1), должны соответствовать их классическим определениям.

И в этой же работе доказано, что *единственным линейным (аддитивным) оператором*, удовлетворяющим указанным выше условиям, является оператор Гильберта  $\mathfrak{S}$ :

В работе [15] подчеркивается, что понятия *мгновенной частоты* сложного сигнала и *частоты* гармонического сигнала – это разные понятия. И именно ошибочное смешение этих понятий во многом предопределило возникновение в сороковых годах прошлого столетия серьезных (категоричных и резких по форме) научных дискуссий между сторонниками представлений (1) и (2).

В той же работе показано, что для однозначного измерения мгновенных параметров (1) действительного сигнала  $x(t)$  необходимо поставить сигналу  $x(t)$  в соответствие комплексный сигнал

$$y(t) = x(t) + j \cdot v(t), \quad (3)$$

определив его мнимую часть  $v(t)$  с помощью некоторого оператора  $\mathfrak{R}$  (рис. 1).

**временная форма –**

$$v_{\mathfrak{S}}(t) = \mathfrak{S}[x(t)] = \text{VP} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau, \quad (4)$$

**спектральная форма –**

$$v_{\mathfrak{S}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} V(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega, \quad (5)$$

где

$$V(j\omega) = \begin{cases} -jS(j\omega), & \omega > 0 \\ 0, & \omega = 0 \\ jS(j\omega), & \omega < 0 \end{cases},$$

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt. \quad (6)$$

Формулами (4) и (5) определены два равноправных способа реализации преобразования Гильберта действительного сигнала

$x(t)$  соответственно во временной и частотной областях. Второй способ иллюстрирует физический смысл преобразования Гильберта, который заключается в фазовом повороте спектральной плотности  $V(j\omega)$ : модули спектральных плотностей  $S(j\omega)$  и  $V(j\omega)$  сигналов  $x(t)$  и  $x_3(t)$  равны между собой, а фаза спектральной плотности  $V(j\omega)$  сдвинута относительно фазы спектральной плотности  $S(j\omega)$  в области отрицательных частот на  $+\pi/2$ , а в области положительных частот на  $-\pi/2$ .

Комплексный сигнал вида (3), у которого мнимая часть удовлетворяет соотношению (4) (или (5)), называют как в отечественной, так и зарубежной научной литературе *аналитическим сигналом*  $y_3(t)$ , а мнимую часть  $y_3(t)$  (сигнал  $x_3(t)$ ) называют *сопряженным сигналом* (по отношению к сигналу  $x(t)$ ):

$$y_3(t) = x(t) + j \cdot x_3(t). \quad (7)$$

Вопрос о некорректности применения термина *аналитический сигнал* для сигналов, являющихся, по сути, *гильбертовыми сигналами*, подробно рассмотрен в работах [17, 18].

Дискретное преобразование Гильберта (ДПГ) в частотной области на основе ДПФ действительного дискретного сигнала (ДДС)  $x(n)$ , заданного на конечном интервале  $n = \overline{0, N-1}$ , определим следующим образом:

$$x_3(n) = \sum_{k=0}^{N-1} V_N(k) W_N^{-kn};$$

$$V_N(k) = \begin{cases} -j \cdot S_N(k), & k = \overline{1, \frac{N}{2}-1}; \\ S_N(k) = 0, & k = 0; k = \frac{N}{2}; \\ +j \cdot S_N(k), & k = \overline{\left(\frac{N}{2}+1\right), (N-1)}, \end{cases} \quad (8)$$

где  $x_3(n)$  – сопряженный сигнал, полученный методом ДПГ ДДС  $x(n)$ ;

$$W_N = \exp(-j \frac{2\pi}{N}), \quad n = \overline{0, (N-1)},$$

$$S_N(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}. \quad (9)$$

Дискретный комплексный сигнал

$$y_3(n) = x(n) + j \cdot x_3(n) \quad (10)$$

является *дискретным аналитическим (гильбертовым) сигналом*, который позволяет *однозначно определить мгновенные параметры ДДС  $x(n)$  на конечном интервале*, представив его в виде:

$$x(n) = A(n) \cdot \cos[\varphi(n)], \quad (11)$$

где  $A(n) = \sqrt{x^2(n) + x_3^2(n)}$  – огибающая (мгновенная амплитуда) ДДС  $x(n)$ ;

$\varphi(n) = \arctg \left[ \frac{x_3(n)}{x(n)} \right]$  – мгновенная фаза

ДДС  $x(n)$ ;

$$f(n) = \frac{1}{2\pi} \times$$

$$\times \left\{ \frac{x(n) \cdot [x_3(n+1) - x_3(n)] - x_3(n) \cdot [x(n+1) - x(n)]}{x^2(n) + x_3^2(n)} \right\}$$

– мгновенная частота ДДС  $x(n)$ .

На рис. 2 приведена структура получения дискретного аналитического сигнала методом ДПФ.

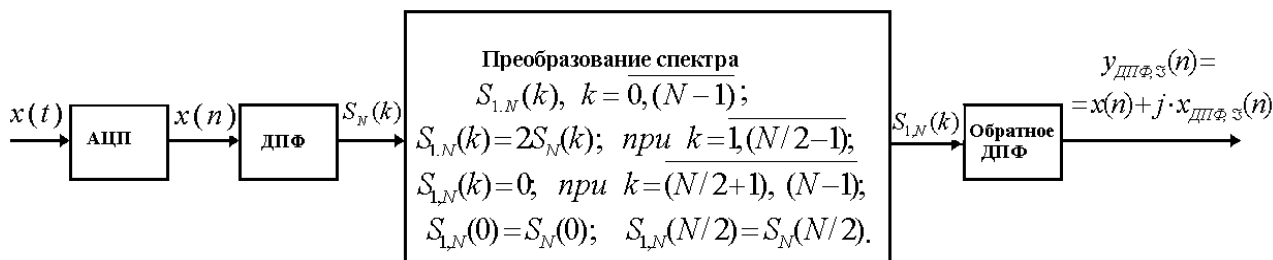


Рис. 2. Структура получения дискретного аналитического сигнала методом ДПФ

Рассмотрим вопрос аналитического выражения огибающей ДДС вида

$$x(n) = \sum_{k=1}^h \sin(2\pi p_0 k n), \quad (12)$$

где  $N$  – число отсчетов дискретного ангармонического сигнала  $x(n)$ ;  $p_0 = p/N$  – нормированная основная частота ангармонического дискретного сигнала  $x(n)$ ;  $h$  – число составляющих ангармонического сигнала  $x(n)$ ;  $p$  – частота, выраженная номером, для которого справедливо неравенство:  $p \cdot h \leq (N/2 - 1)$ ;  $n = \overline{0, (N-1)}$ ;  $k = \overline{1, h}$ .

Применив изложенные выше материалы по ДПГ, воспользовавшись формулами сумм тригонометрических функций [19, 20]

$$\sum_{k=1}^h \sin kx = \sin \frac{h+1}{2} x \sin \frac{hx}{2} \operatorname{cosec} \frac{x}{2}; \quad (13)$$

$$\sum_{k=1}^h \cos kx = \cos \frac{h+1}{2} x \sin \frac{hx}{2} \operatorname{cosec} \frac{x}{2} \quad (14)$$

и выполнив подстановку  $x = 2\pi \cdot p_0 \cdot n$ , получим аналитическое выражение для огибающей  $A(n)$  ангармонического дискретного сигнала  $x(n)$  (13) как функции от числа составляющих  $h$ :

$$A(n) = \left| \frac{\sin(h \cdot \pi \cdot p_0 \cdot n)}{\sin(\pi \cdot p_0 \cdot n)} \right|, \quad n = \overline{0, (N-1)}. \quad (15)$$

Подстановка в соотношении (16)  $n=0$  приводит к неопределенности  $0/0$ . Применяя для раскрытия неопределенности правило Лопиталья для дискретного случая, получим  $A(n) = h$  при  $n=0$ .

На рис. 3–5 приведены ангармонические дискретные сигналы и их модули спектров, а также огибающие ангармонических дискретных сигналов и их модули спектров при  $N=128$ ,  $p=5$ ,  $h=2$ ,  $h=4$ ,  $h=6$ .

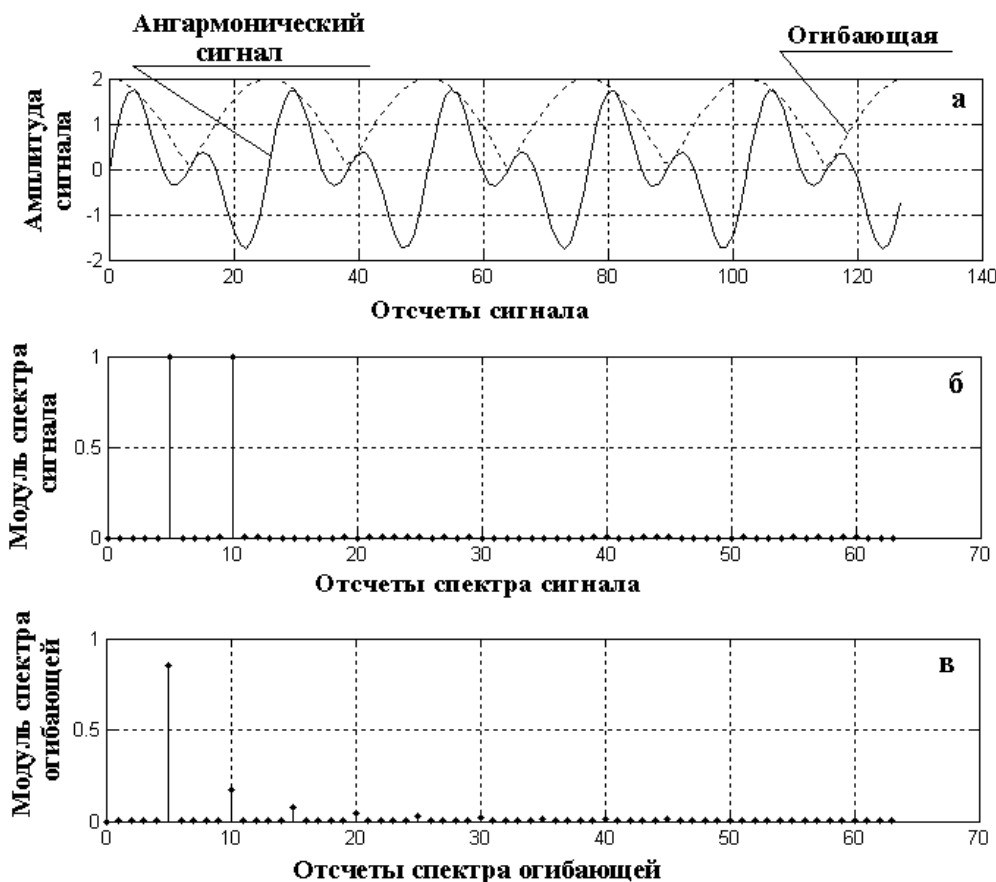


Рис. 3. Ангармонический дискретный сигнал с числом составляющих  $h=2$  – а; модуль спектра ангармонического дискретного сигнала – б; модуль спектра огибающей ангармонического дискретного сигнала – в

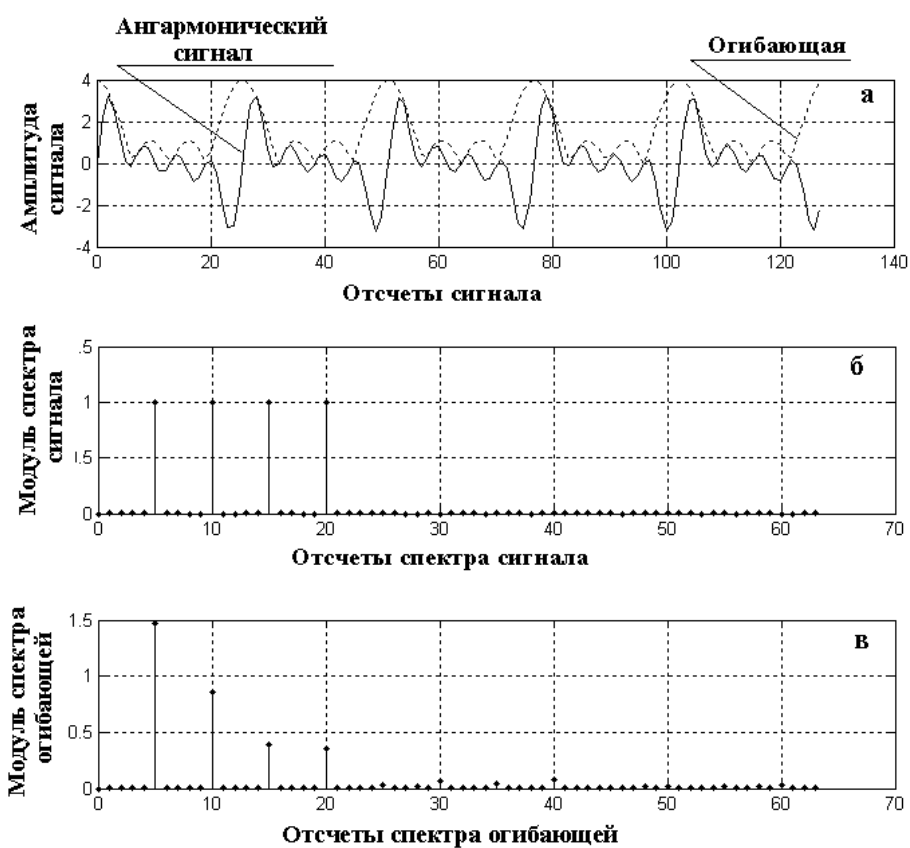


Рис. 4. Ангармонический дискретный сигнал с числом составляющих  $h = 4 - a$ ; модуль спектра ангармонического дискретного сигнала – б; модуль спектра огибающей ангармонического дискретного сигнала – в

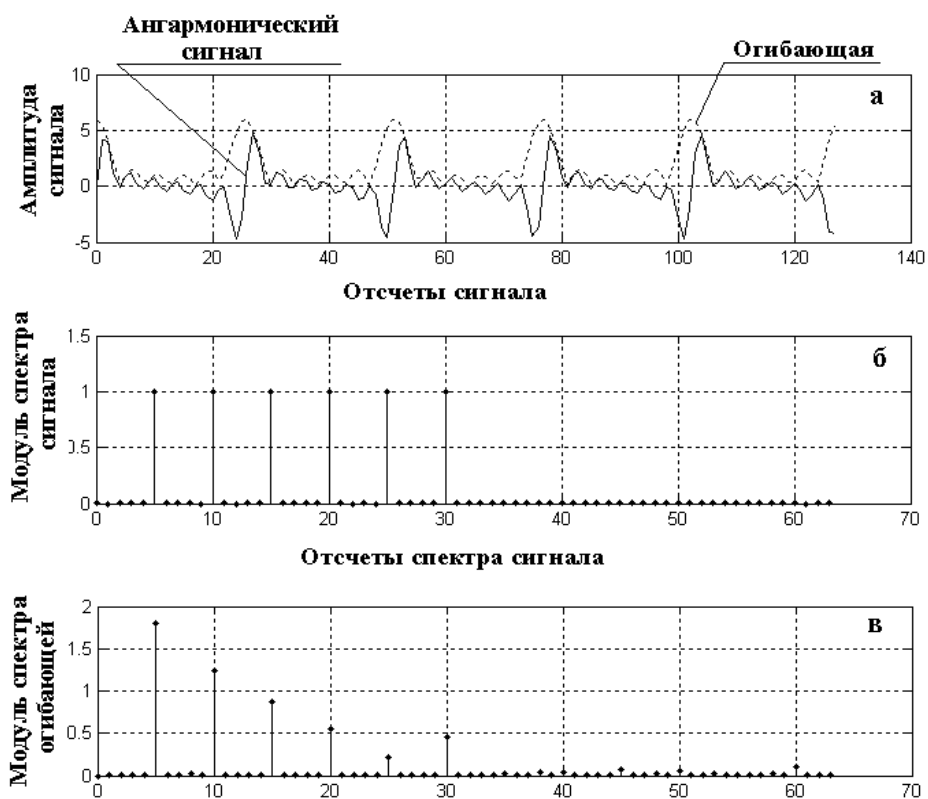


Рис. 5. Ангармонический дискретный сигнал с числом составляющих  $h = 6 - a$ ; модуль спектра ангармонического дискретного сигнала – б; модуль спектра огибающей ангармонического дискретного сигнала – в

Экспериментальные исследования на модельных действительных ангармонических дискретных сигналах подтвердили результаты, полученные теоретически в аналитической форме.

Можно показать, что спектральный анализ огибающей ангармонического дискретного действительного сигнала (13) даже при отсутствии в его составе некоторых составляющих (в том числе и нормированной основной частоты –  $p_0$ ) позволяет надежно определять основную частоту ангармонического сигнала.

В заключение отметим некоторые предметные области приложений полученных результатов: определение основного тона музыкально-акустических и речевых сигналов, анализ звукорядов при виброакустическом функциональном диагностировании механических объектов, компьютерной медицинской диагностике, а также пассивной гидроакустике.

#### Библиографические ссылки

1. Пономарева О. В. Развитие теории и разработка методов и алгоритмов цифровой обработки информационных сигналов в параметрических базисах Фурье : дис. ... д-ра техн. наук: 05.13.01 / Пономарева Ольга Владимировна. Ижевск, 2016. 357 с.
2. Пономарева О. В., Пономарева О. В., Пономарев А. В. Метод эффективного измерения скользящего параметрического спектра Фурье // Автометрия. 2014. Т. 50. № 2. С. 31–38.
3. Пономарева Н. В. Предобработка дискретных сигналов при спектральном анализе в системе компьютерной математики – MATLAB // Интеллектуальные системы в производстве. 2016. № 4 (31). С. 32–34.
4. Морозов Ю. В., Спектор А. А. Классификация объектов на основе анализа спектральных характеристик огибающих сейсмических сигналов // Автометрия. 2017. Т. 53. № 6. С. 49–56.
5. Оценка мгновенной частоты эхосигнала движения снаряда на основе полиномиального чирплет-преобразования / Ванг Джан, Хан Ен, Ванг Ли Минт и др. // Дефектоскопия. 2018. № 1. С. 73.
6. Диагностика насосного агрегата на основе идентификационных измерений вибросигнала / К. Т. Кошеков, Ю. Н. Кликушин, Ю. В. Коленков и др. // Дефектоскопия. 2016. № 5. С. 36–43.
7. Michael Feldman. Hilbert transform methods for nonparametric identification of nonlinear time varying vibration systems. Mechanical Systems and Signal Processing, Volume 47, Issues 1–2, 3 August 2014, Pages 66-77.
8. Батищев В. И., Волков И. И., Золин А. Г. Использование стохастического базиса в задачах восстановления сигналов и изображений // Автометрия. 2017. Т. 53. № 4. С. 127–134.
9. Luis Chaparro. Chapter 11 - Fourier Analysis of Discrete-time Signals and Systems. Signals and Systems Using MATLAB (Second Edition), 2015, pp. 683-768.
10. Пономарева Н. В., Пономарев А. В., Пономарева Н. В. Скользящее параметрическое ДПФ в задачах обнаружения тональных компонент // Цифровая обработка сигналов. 2012. № 4. С. 2–7.
11. Пономарева Н. В., Пономарева О. В., Пономарев А. В., Пономарева Н. В. Обобщение алгоритмов Герцеля и скользящего параметрического дискретного преобразования Фурье // Цифровая обработка сигналов. 2014. № 1. С. 3–11.
12. Лайонс Р. Цифровая обработка сигналов. 2-е изд. / пер. с англ. М. : Бином-Пресс, 2006. 636 с.
13. Финк Л. М. Сигналы. Помехи. Ошибки. 2-е изд., перераб. и доп. М. : Радио и связь, 1984. 256 с.
14. Вакман Д. Е. Об определении понятий амплитуды, фазы и мгновенной частоты сигнала // Радиотехника и электроника. 1972. № 5. С. 973–978.
15. Трахтман А. М. Введение в обобщенную спектральную теорию. М. : Сов. радио, 1972. 352 с.
16. Вакман Д. Е. Указ. соч. С. 973–978.
17. Трахтман А. М. Указ. соч. 352 с.
18. Пономарева О. В. Развитие теории и разработка методов и алгоритмов цифровой обработки информационных сигналов в параметрических базисах Фурье : дис. ... д-ра техн. наук: 05.13.01 / Пономарева Ольга Владимировна. Ижевск, 2016. 357 с.
19. Alams E. Smithsonian mathematical formulae, Washington, 1922.
20. Градштейн Н. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов сумм рядов и произведений. М. : Физматгиз, 1963. 1100 с.

## References

1. Ponomareva O. V. (2016). *Razvitie teorii i razrabotka metodov i algoritmov tsifrovoi obrabotki informatsionnykh signalov v parametricheskikh bazisakh Fur'e* [Development of the theory and development of methods and algorithms for digital processing of information signals in parametric Fourier bases] (DSc Thesis). Izhevsk, 357 p. (in Russ.).
2. Ponomareva O. V., Ponomareva O. V., Ponomarev A. V. (2014). *Avtometriya* [Autometry], vol. 50, no. 2, pp. 31-38 (in Russ.).
3. Ponomareva N. V. (2016). *Intellektual'nye sistemy v proizvodstve* [Intelligent systems in production], no. 4 (31), pp. 32-34 (in Russ.).
4. Morozov Yu. V., Spektor A. A. (2017). *Avtometriya* [Autometry], vol. 53, no. 6, pp. 49-56 (in Russ.).
5. Vang Dzhan, Khan En, Vang Li Mint i dr. (2018). *Defektoskopiya* [Defectoscopy], no. 1, p. 73 (in Russ.).
6. Koshekov K. T., Klikushin Yu. N., Kobenkov Yu. V. i dr. (2016). *Defektoskopiya* [Defectoscopy], no. 5, pp. 36-43 (in Russ.).
7. Michael Feldman. Hilbert transform methods for nonparametric identification of nonlinear time varying vibration systems. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Volume 47, Issues 1–2, 3 August 2014, Pages 66-77.
8. Batishchev V. I., Volkov I. I., Zolin A. G. (2017). *Avtometriya* [Autometry], vol. 53, no. 4, pp. 127–134 (in Russ.).
9. Luis Chaparro. Chapter 11 - Fourier Analysis of Discrete-time Signals and Systems. *Signals and Systems Using MATLAB (Second Edition)*, 2015, pp. 683-768.
10. Ponomareva N. V., Ponomarev A. V., Ponomareva N. V. (2012). *Tsifrovaya obrabotka signalov* [Digital signal processing], no. 4, pp. 2-7 (in Russ.).
11. Ponomareva N. V., Ponomareva O. V., Ponomarev A. V., Ponomareva N. V. (2014). *Tsifrovaya obrabotka signalov* [Digital signal processing], no. 1, pp. 3-14 (in Russ.).
12. Laions R. (2006) *Tsifrovaya obrabotka signalov* [Digital signal processing]. Moscow: Binom-Press, 636 p. (in Russ.).
13. Fink L. M. (1984). *Signaly. Pomekhi. Oshibki* [Signals. Interference. Errors]. Moscow: Radio i svyaz', 256 p. (in Russ.).
14. Vakman D. E. (1972). *Radiotekhnika i elektronika* [Radio engineering and electronics], no. 5, pp. 973–978 (in Russ.).
15. Trakhtman A. M. (1972). *Vvedenie v obobshchennuyu spektral'nuyu teoriyu* [Introduction to the generalized spectral theory]. Moscow: Sov. Radio, 352 p. (in Russ.).
16. Vakman D. E. (1972). Op. cit., pp. 973-978 (in Russ.).
17. Trakhtman A. M. (1972). Op. cit., 352 p. (in Russ.).
18. Ponomareva O. V. (2016). *Razvitie teorii i razrabotka metodov i algoritmov tsifrovoi obrabotki informatsionnykh signalov v parametricheskikh bazisakh Fur'e* [Development of the theory and development of methods and algorithms for digital processing of information signals in parametric Fourier bases] (DSc Thesis). Izhevsk, 357 p. (in Russ.).
19. Alams E. Smitsonian mathematical formulae, Washington, 1922.
20. Gradshteyn N. S., Ryzhik I. M. (1963). *Tablitsy integralov summ ryadov i proizvedenii* [Tables of integrals of sums of series and products]. Moscow: Fizmatgiz, 1100 p. (in Russ.).

\*\*\*

N. V. Ponomareva, Applicant, Kalashnikov ISTU

O. V. Ponomarev, DSc in Engineering, Professor, Kalashnikov ISTU

V. V. Khvorenkov, DSc in Engineering, Professor, Kalashnikov ISTU

### Anharmonic Discrete Signal Envelope Detection with Hilbert Transform in the Frequency Domain

*In this work the use of the Hilbert transform in the frequency domain for anharmonic signal envelope detection (instantaneous amplitudes) is considered. Anharmonic discrete signals are considered as an individual class of discrete signals due to their specific properties and wide application of anharmonic signals to describe information signals in the following subject areas: acoustics (including psycho-acoustics and musical acoustics), geophysics, vibration acoustic functional diagnosing of mechanical objects, computer-aided medical diagnostics, passive hydro-acoustics. Physical conditions for the choice of a signal associated with the actual anharmonic signal are given. The algorithm of a hypothetical measurer of instant values of the envelope, phase and frequency of the actual signal is proposed. It is shown that the frequency-domain analytic signal generation has advantages in comparison with time-domain analytic signal generation. The structure of obtaining the discrete*

*analytic signal by method of Fourier discrete transform of the actual discrete signal is proposed. Analytical expressions of the anharmonic discrete signal envelopes with a different number of components of equal amplitude are obtained. The results of experimental studies on model anharmonic signals are presented that prove the results obtained theoretically in an analytic form.*

**Keywords:** anharmonic discrete signal, envelope, discrete Fourier transform, discrete Hilbert transform, musical-acoustic signal, frequency spectrum.

Получено: 26.02.18