

УДК 539.431

DOI 10.22213/2410-9304-2018-2-19-23

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ЦИКЛИЧЕСКОГО УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПРИ ИСПЫТАНИЯХ МАТЕРИАЛА НА ИЗГИБ

*Д. С. Добровольский*, ООО «Научно-производственная фирма «Трест Геопроектстрой», г. Ижевск, Россия

*В прочностных расчетах элементов конструкций для характеристики напряженного состояния в опасных зонах концентрации (участки резьб, различного назначения выточки, переходы диаметров валов, отверстия, шпоночные пазы, трещины) используются номинальные напряжения, определяемые без учета влияния концентратора, или местные условные напряжения, вычисляемые в предположении упругого деформирования как произведение номинальных напряжений и теоретического коэффициента концентрации. В действительности при перегрузках конструкций, а нередко и в штатных режимах переменного нагружения, в зонах концентрации возникают трехмерные неоднородные поля главных местных напряжений и упругопластических деформаций, которые в результате циклической неустойчивости материалов изменяются с ростом числа нагружений.*

*Для определения напряжений и упругопластических деформаций несущих элементов конструкций при простом (пропорциональном или близком к нему) однократном нагружении широко используется сравнительно хорошо разработанная теория малых упругопластических деформаций в формулировке А. А. Ильюшина. Применительно к переменному пропорциональному нагружению деформационная теория пластичности разработана и экспериментально обоснована не в полной мере во многом из-за недостатка современного испытательного оборудования, доступных экспериментальных методик и ограниченности экспериментальных результатов, характеризующих закономерности циклического упругопластического деформирования широкого круга конструкционных материалов в характерном для несущих элементов конструкций широком диапазоне числа нагружений.*

*В связи с этим представленная в данной работе сравнительно простая методика, доступное оборудование и полученные результаты экспериментального и аналитического моделирования закономерностей циклического упругопластического деформирования при испытаниях материала на изгиб имеют научное и практическое значение для совершенствования методов оценки усталостной прочности и долговечности несущих элементов конструкций.*

**Ключевые слова:** методика, моделирование диаграмм циклического упругопластического деформирования, испытания материала на изгиб.

### Введение

Взаимосвязи напряжений и упругопластических деформаций при повторных и переменных нагружениях изучались в работах И. Баушингера, Г. Мазинга, Р. М. Шнейдеровича, Н. А. Махутова, В. В. Москвитина [1–3] и других авторов. В Институте машиноведения им. А. А. Благонравова разработана классическая методика и выполнены системные эксперименты по изучению кинетики диаграмм циклического упругопластического деформирования материалов при растяжении-сжатии. Для систематизации и аналитического описания экспериментальных результатов предложена модель обобщенной диаграммы упругопластического деформирования материала в  $k$ -м полуцикле переменного нагружения ( $k = 1, 2, 3 \dots$ ). Исходное нагружение рассматривается как нулевой полуцикл ( $k = 0$ ).

Вместе с тем такая методика требует наличия уникального оборудования известных фирм: Instron (Англия); MTS (США); Schenk (Германия); Shimadzu (Япония).

### Основная часть

В связи с этим в данной работе предлагается сравнительно простая методика, доступное оборудование и результаты моделирования диаграмм циклического упругопластического деформирования материала в условиях чистого изгиба на основе развития обобщенного решения задачи определения напряжений при однократном упругопластическом изгибе балки произвольного симметричного сечения [4]

$$\sigma = \frac{1}{W_n} \left[ \frac{W_n}{W_n} M_n + \left( 1 - \frac{W_n}{W_n} \right) \frac{dM_n}{de} e \right], \quad (1)$$

где  $\sigma$ ,  $e$  – напряжение и упругопластическая деформация наиболее удаленных слоев балки;  $M_n$  – изгибающий момент;  $W_n$ ,  $W_n$  – осевые моменты сопротивления сечения балки при упругом и предельном пластическом деформировании. В работе [5] выполнено экспериментальное обоснование зависимости (1). Показано, что диаграммы упругопластического деформирования  $\sigma - e$  стали 40 и сплава Д16, полученные при растяжении и чистом изгибе образцов прямоугольного, круглого, ромбического сечений, совпадают.

При исходном упругопластическом изгибе моментом  $M_n^{(0)}$  образца прямоугольного сечения ( $W_n/W_n = 2/3$ ) из формулы (1) получаем напряжения в нулевом полуцикле ( $k = 0$ ) нагружения

$$\sigma^{(0)} = \frac{2}{3} \sigma_y^{(0)} + \frac{1}{3} \frac{d\sigma_y^{(0)}}{de^{(0)}} e^{(0)}, \quad (2)$$

где  $\sigma_y^{(0)} = M_n^{(0)}/W_n$  – условные (упругие) напряжения;  $e^{(0)}$  – упругопластические деформации наиболее удаленных слоев образца. Последующая разгрузка и реверсивный упругопластический изгиб образца размахом момента  $\Delta M_n^{(1)}$  представляет первый полуцикл нагружения ( $k = 1$ ) в осях, расположенных в начале разгрузки (рис. 1).

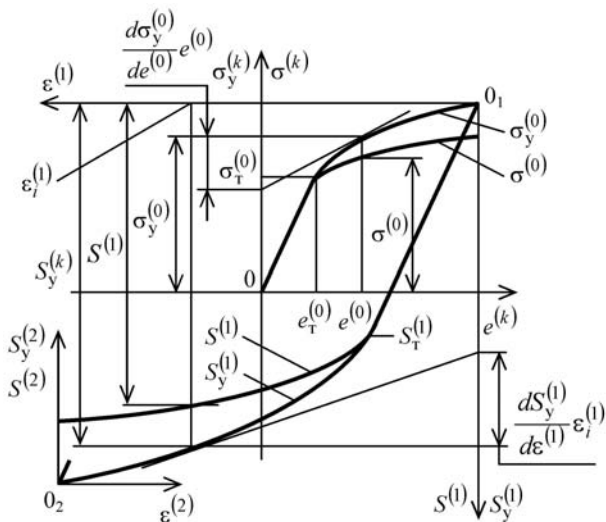


Рис. 1. Методика получения диаграмм циклического упругопластического деформирования по результатам испытаний на чистый изгиб

Развивая с учетом этого зависимость (1), получаем напряжения в первом полуцикле нагружения

$$S^{(1)} = \frac{2}{3} S_y^{(1)} + \frac{1}{3} \frac{dS_y^{(1)}}{d\varepsilon^{(1)}} \varepsilon^{(1)}, \quad (3)$$

где  $S_y^{(1)} = \Delta M_n^{(1)}/W_n$  – условные (упругие) напряжения;  $\varepsilon^{(1)}$  – упругопластические деформации в первом полуцикле ( $k = 1$ ). В  $k$ -м полуцикле нагружения размахом момента  $\Delta M_n^{(k)}$  напряжения  $S^{(k)}$  определяются по аналогичной (3) зависимости.

Для экспериментального изучения диаграмм циклического деформирования при испытаниях в условиях чистого изгиба из стали 45 ( $\sigma_r = 480$  МПа;  $\sigma_b = 675$  МПа;  $\delta = 6,7$  %;  $\psi = 46,2$  %) изготавливали плоские образцы прямоугольного сечения высотой  $h = 5$  мм, шириной и длиной рабочей части 10 и 40 мм. Циклические испытания образцов проводили на созданной установке [6]. Для регистрации деформаций использовали предложенные в работе [7] способ и деформометр (прогибометр). Деформометр представляет собой П-образную рамку, содержащую индикатор часового типа ИГМ1 (цена деления 1 мкм, диапазон измерения 1 мм), который устанавливается на нейтральном слое образца и используется для измерения прогибов расчетной длины при исходном ( $k = 0$ ) и циклическом ( $k = 1, 2, 3 \dots$ ) нагружениях. Деформации наиболее удаленных слоев образца определяются по формулам

$$e^{(0)} = 4hf^{(0)}/l^2, \quad \varepsilon^{(k)} = 4hf^{(k)}/l^2, \quad (4)$$

где  $f^{(0)}$ ,  $f^{(k)}$  – прогибы на расчетной длине  $l = 30$  мм образца при исходном и циклическом нагружениях. Упругие напряжения  $\sigma_y^{(0)}$ ,  $S_y^{(k)}$  измеряли созданным динамометром, совмещенным с захватом образца. По показаниям динамометра и деформометра выборочно по числу полуциклов нагружений регистрировали экспериментальные диаграммы  $\sigma_y^{(0)} - e^{(0)}$ ,  $S_y^{(1)} - \varepsilon^{(1)}$  (рис. 1) и аналогично  $S_y^{(k)} - \varepsilon^{(k)}$ . Затем по решениям (2), (3), используя графическое дифференциро-

вание кривых  $\sigma_y^{(0)} - e^{(0)}$ ,  $S_y^{(1)} - \varepsilon^{(1)}$ ,  $S_y^{(k)} - \varepsilon^{(k)}$  (рис. 1), находили напряжения  $\sigma^{(0)}$ ,  $S^{(1)}$ ,  $S^{(k)}$  и получали диаграммы упругопластического деформирования испытуемых образцов. Затем по предложенной методике строили обобщенные диаграммы деформирования  $\sigma^{(0)} - e^{(0)}$ ,  $S^{(k)} - \varepsilon^{(k)}$  в широком диапазоне полуциклов нагружения ( $0 \leq k \leq 2 \cdot 10^3$ ).

В отличие от классической методики испытаний на растяжение-сжатие при использовании предлагаемой методики испытаний на циклический упругопластический изгиб не возникают трудности, связанные с предотвращением внецентренного приложения нагрузки при растяжении-сжатии, потерей устойчивости в полуциклах сжатия образца, измерением деформаций и обеспечением равномерной температуры на ограниченной расчетной длине при растяжении-сжатии образца.

При прочностных расчетах элементов конструкций для удобства определения напряженно-деформированного состояния в одномерной постановке полученные экспериментальные обобщенные диаграммы в первых главных напряжениях  $\sigma^{(0)}$ ,  $S^{(k)}$  и деформациях  $e^{(0)}$ ,  $\varepsilon^{(k)}$  аппроксимировали линейно-степенными зависимостями

$$\begin{aligned} \sigma^{(0)} &= \sigma_{tc}^{(0)} e^{(0)} / e_{tc}^{(0)} \text{ при } \sigma^{(0)} \leq \sigma_{tc}^{(0)}; \\ \sigma^{(0)} &= \sigma_{tc}^{(0)} \left( e^{(0)} / e_{tc}^{(0)} \right)^m \text{ при } \sigma^{(0)} \geq \sigma_{tc}^{(0)}; \end{aligned} \quad (5)$$

$$S^{(k)} = S_{tc}^{(k)} \varepsilon^{(k)} / \varepsilon_{tc}^{(k)} \text{ при } S^{(k)} \leq S_{tc}^{(k)};$$

$$S^{(k)} = S_{tc}^{(k)} \left( \varepsilon^{(k)} / \varepsilon_{tc}^{(k)} \right)^{m_k} \text{ при } S^{(k)} \geq S_{tc}^{(k)}. \quad (6)$$

Получены параметры аппроксимаций (5) и (6), в частности: при исходном нагружении  $\sigma_{tc}^{(0)} = 480$  МПа,  $e_{tc}^{(0)} = 0,235$  %,  $m = 0,145$ ; в первом полуцикле  $S_{tc}^{(1)} = 725$  МПа,  $\varepsilon_{tc}^{(1)} = 0,355$  %,  $m_1 = 0,184$ ; на стадии, соответствующей половине долговечности  $N$  образцов,  $S_{tc}^{(N)} = 685$  МПа,  $\varepsilon_{tc}^{(N)} = 0,336$  %,  $m_N = 0,171$ .

Для учета в прочностных расчетах элементов конструкций трехосности напряженно-деформированного состояния в опасных зонах концентрации по диаграммам  $\sigma^{(0)} - e^{(0)}$ ,  $S^{(k)} - \varepsilon^{(k)}$  получали также экспериментальные обобщенные диаграммы циклического деформирования в интенсивностях напряжений  $\sigma_i^{(0)}$ ,  $S_i^{(k)}$  и упругопластических деформаций  $e_i^{(0)}$ ,  $\varepsilon_i^{(k)}$  (рис. 2–4) и определяли аналогичные параметры линейно-степенной аппроксимации, в частности, получено: при исходном нагружении  $\sigma_{itc}^{(0)} = 480$  МПа,  $e_{itc}^{(0)} = 0,204$  %,  $m_i = 0,147$ ; в первом полуцикле  $S_{itc}^{(1)} = 725$  МПа,  $\varepsilon_{itc}^{(1)} = 0,308$  %,  $m_1 = 0,181$ ; для полуциклов  $k \approx N$   $S_{itc}^{(N)} = 685$  МПа,  $\varepsilon_{itc}^{(N)} = 0,291$  %,  $m_{iN} = 0,164$ .

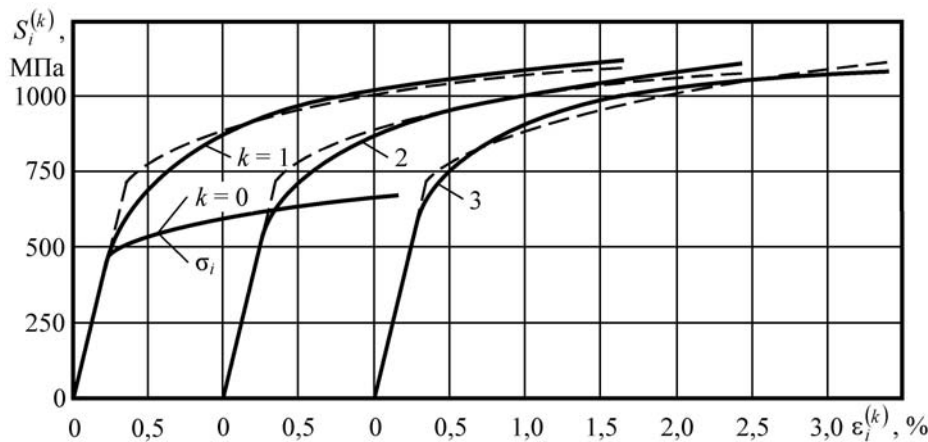


Рис. 2. Обобщенные диаграммы упругопластического деформирования стали 45 для полуциклов  $k = 0, 1, 2, 3$  (сплошные линии – эксперимент; штриховые – линейно-степенная аппроксимация)

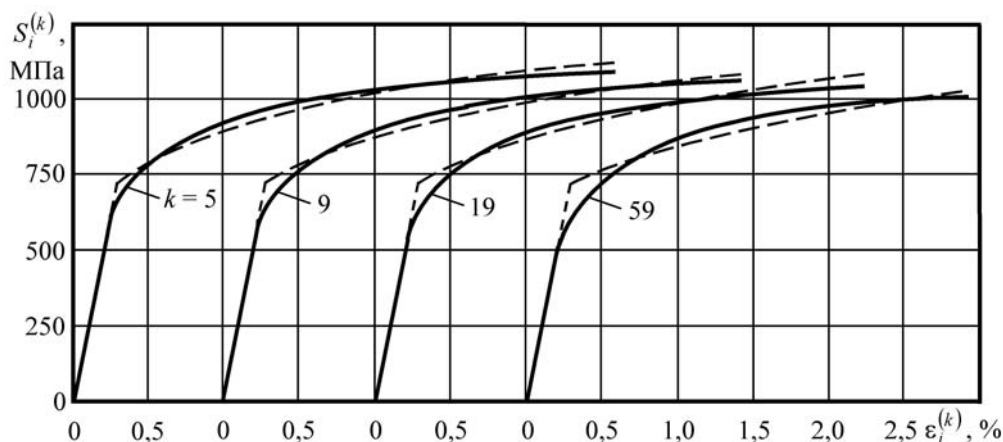


Рис. 3. Обобщенные диаграммы упругопластического деформирования стали 45 для полуциклов  $k = 5, 9, 19, 59$  (сплошные линии – эксперимент; штриховые – линейно-степенная аппроксимация)

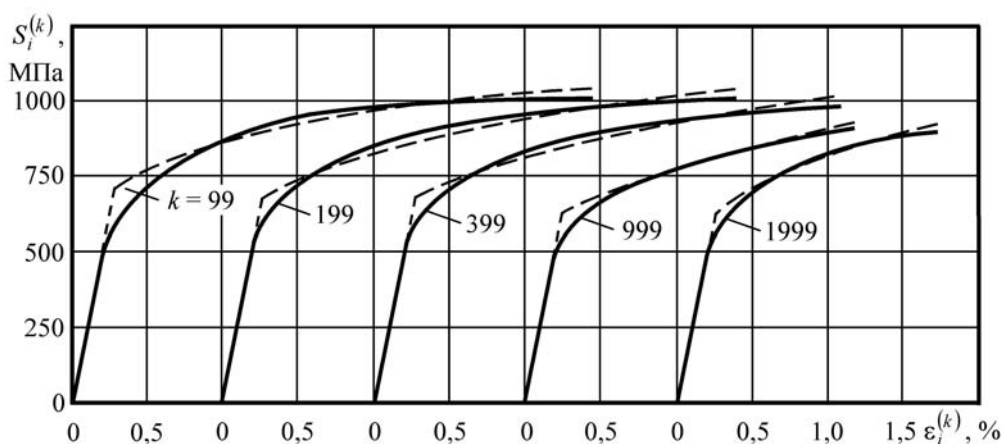


Рис. 4. Обобщенные диаграммы упругопластического деформирования стали 45 для полуциклов  $k = 99, 199, 399, 999, 1999$  (сплошные линии – эксперимент; штриховые – линейно-степенная аппроксимация)

При этом использовали известные соотношения:  $\sigma_i^{(0)} = \sigma^{(0)}$ ,  $e_i^{(1)} = 2(1 + \mu_*)e^{(0)}/3$ ,  $\mu_* = 0,5 - (0,5 - \mu) / \left( (e^{(0)}/e_{rc}^{(0)})^{1-m} \right)$ ,  $\mu = 0,3$ ;  $S_i^{(k)} = S^{(k)}$ ,  $\varepsilon_i^{(k)} = 2(1 + \mu_{*k})\varepsilon^{(k)}/3$ ,  $\mu_{*k} = 0,5 - (0,5 - \mu) / \left( (\varepsilon^{(k)}/\varepsilon_{rc}^{(k)})^{1-m_k} \right)$ , где  $\mu$ ,  $\mu_*$  и  $\mu_{*k}$  – коэффициенты С. Пуассона при упругом, однократном и циклическом упругопластическом деформировании.

#### Выводы

Результаты работы использованы для анализа трехмерных полей главных местных однократных и циклических напряжений и упругопластических деформаций в окрестности трещин и надразов элементов конструкций [8, 9].

#### Библиографические ссылки

1. Серенсен С. В., Когаев В. П., Шнейдерович Р. М. Несущая способность и расчеты деталей машин на прочность. М. : Машиностроение, 1975. 488 с.
2. Махутов Н. А. Деформационные критерии разрушения и расчет элементов конструкций на прочность. М. : Машиностроение, 1981. 272 с.
3. Москвитин В. В. Пластичность при переменных нагружениях. М. : Изд-во МГУ, 1965. 264 с.
4. Добровольский В. И. Определение напряжений при чистом упругопластическом изгибе или кручении // Проблемы прочности. 1972. № 12. С. 93–94.
5. Добровольский В. И. К методике построения диаграмм деформирования по данным, полученным при упругопластическом изгибе или кручении // Проблемы прочности. 1976. № 8. С. 106–109.

6. Авт. св. № 513297. Установка для испытания на усталость образцов при чистом изгибе / В. И. Добровольский // Бюлл. изобр. М. : Стандарты, 1976. № 17.

7. Авт. св. № 911129. Способ измерения деформаций при изгибе / В. И. Добровольский, В. В. Пряхин // Бюлл. изобр. пром. обр. и тов. зн. М. : Стандарты, 1982. № 9.

8. Добровольский Д. С. Энергетический метод определения напряжений и упругопластических деформаций элементов конструкций с трещинами // Интеллектуальные системы в производстве. 2016. № 1. С. 4–6.

9. Добровольский Д. С. Напряжения и упругопластические деформации стержней с кольцевыми трещинами // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2016. № 9. С. 65–69.

### References

1. Serensen S. V., Kogaev V. P., Shnejderovich R. M. (1975). *Nesushhaja sposobnost' i raschety detalej mashin na prochnost'* [Carrying capacity and calculation of machine parts for durability]. Moscow: Mashinostroenie (in Russ.).

2. Mahutov N. A. (1981). *Deformacionnye kriterii razrusheniya i raschet ehlementov konstrukcij na prochnost'* [Deformation criteria for destruction and calculation of structural elements for strength]. Moscow: Mashinostroenie (in Russ.).

3. Moskvitin V. V. (1965). *Plastichnost' pri peremennyh nagruzheniyah* [Plasticity under variable loading]. Moscow: MGU (in Russ.).

4. Dobrovolsky V. I. (1972). *Problemy prochnosti* [Strength of materials], no. 12, pp. 93-94 (in Russ.).

5. Dobrovolsky V. I. (1976). *Problemy prochnosti* [Strength of materials], no. 8, pp. 106-109 (in Russ.).

6. Dobrovolsky V. I. Patent SU 513297, no. 17, 1976.

7. Dobrovolsky V. I., Pryahin V. V. Patent SU 911129, no. 9, 1982.

8. Dobrovolsky D. S. (2016). *Intellektualnye sistemy v proizvodstve* [Intellectual systems in production], no. 1, pp. 4-6 (in Russ.).

9. Dobrovolsky D. S. (2016). *Zavodskaya laboratoriya. Diagnostika materialov* [Factory laboratory. Diagnostics of materials], no. 9, pp. 65-69 (in Russ.).

\*\*\*

### Modeling of Cyclic Elastoplastic Deformation During Material Testing for Bending

D. S. Dobrovolsky, Master's Degree Student, designing engineer, Scientific and Production Company "Trest Geoproektstroy", Izhevsk, Russia

*In the strength calculations of structural elements for the characterization of the stress state in dangerous concentration zones (thread sections, various recesses, change of shaft diameters, holes, keyways, cracks) nominal stresses are used, which are determined without taking into account the influence of the concentrator, or local conditional stresses, which are calculated under the assumption of elastic deformation as multiplication of nominal stresses and theoretical concentration coefficient. In reality, when the structures are overloaded and often under the standard modes of variable loading, three-dimensional inhomogeneous fields of the main local stresses and elastoplastic deformations arise in the concentration zones, which are changed with increasing number of loads as a result of cyclic instability of materials. To determine the stresses and elastoplastic deformations of the load-bearing elements of structures under a simple (proportional or close to it) single loading, a comparatively well-developed theory of small elastoplastic deformations in the formulation of A. A. Il'yushin is widely used. With respect to variable proportional loading, the deformation theory of plasticity has been developed and experimentally substantiated not to the full extent largely due to the lack of modern test equipment, available experimental techniques and the limited experimental results characterizing the regularities of cyclic elastoplastic deformation of a wide range of structural materials in a wide range of the number of loads characteristic for load-bearing elements of structures.*

*In connection with this, the relatively simple methodology presented in this paper, the available equipment and the results of experimental and analytical modeling of the regularities of cyclic elastoplastic deformation during testing of the material for bending are of scientific and practical importance for improving the methods for estimating the fatigue strength and durability of load-bearing structural elements.*

**Keywords:** technique, modeling of cyclic elastoplastic deformation diagrams, bending material testing.

Получено: 17.05.18