

## НАУКИ О ЗЕМЛЕ

УДК 532 + 622.276.1/4(73)

DOI 10.22213/2410-9304-2018-2-121-129

### ОБОБЩЕННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НЕЛЕТУЧЕЙ НЕФТИ СЕТЕВОЙ ПОДХОД К РАЗБИЕНИЮ ОБЛАСТИ МЕСТОРОЖДЕНИЯ НА МОДУЛИ

*С. В. Денисов*, кандидат технических наук, доцент, Уфимский государственный нефтяной технический университет, Уфа, Россия

*В. Е. Лялин*, доктор технических наук, доктор геолого-минералогических наук, доктор экономических наук, профессор, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова, Ижевск, Россия

*А. Н. Краснов*, кандидат технических наук, доцент, Уфимский государственный нефтяной технический университет, Уфа, Россия

*А. А. Шушков*, кандидат технических наук, Удмуртский федеральный исследовательский центр Уральского отделения Российской академии наук, Ижевск, Россия

*Представлена процедура генерации модулей, отвечающих за базовые элементы, которые используются для описания расчетной области; применение данной процедуры для реализации модулей на примере обобщенной модели нелетучей нефти. Предложен новый подход к разбиению расчетной области месторождения, включающей в себя продуктивный пласт и наземное оборудование, для обеспечения более высокого уровня абстракции при декомпозиции пластовой системы. Формализована процедура генерации модулей, отвечающих за базовые элементы, которые используются для описания расчетной области; применение данной процедуры для реализации модулей на примере обобщенной модели нелетучей нефти. Для описания пласта, скважин и наземных объектов были предложены различные типы узлов и соединений. В зависимости от числа фаз разработаны соответствующие узлы.*

*В работе предложена обобщенная модель нелетучей нефти с внесенными допущениями, позволяющими достоверно решить задачу гидродинамического моделирования месторождений. Представлен сетевой подход к разбиению области месторождения, математическое описание модулей. Такой метод представляет собой сетевой подход к созданию симулятора месторождений и обеспечивает более высокий уровень стандартизации, чем классический способ.*

**Ключевые слова:** гидродинамическое моделирование, многофазная смесь, нелетучая нефть.

#### Обобщенная модель нелетучей нефти

Полученные в предыдущей работе уравнения являются достаточно обобщенными, чтобы их можно было применить для многокомпонентной модели или более простой модели нелетучей нефти.

Однако в целях иллюстрации предлагаемой концепции дальнейшее исследование ограничено рассмотрением модели нелетучей нефти со следующими допущениями:

– каждый флюид содержит три компонента: жидкий углеводород или компонент нефти  $\bar{o}$ , компонент воды  $\bar{w}$  и газообразный углеводород или компонент газа  $\bar{g}$ ;

– всего присутствует три фазы: нефть  $o$ , вода  $w$  и газ  $g$ ;

– вода является смачивающей фазой, нефть имеет промежуточную смачиваемость, газ является несмачивающей фазой;

– нефть и вода несмешиваемы, т. е. в нефтяной фазе отсутствует компонент воды и наоборот;

– в газовой фазе нет компонентов воды;

– предполагаются изотермальные условия фильтрации;

– во всей пластовой системе установлено мгновенное термодинамическое равновесие.

*Насыщенность:*

$$S_o + S_w + S_g = 1. \quad (1)$$

Мы будем использовать  $S_w$  и  $S_g$  как первичные неизвестные, а  $S_o$  получать из (1).

### Давление

Эксперименты по вытеснению предоставляют кривые капиллярного давления как функции насыщенности. В трехфазном случае давление фазы с промежуточной смачиваемостью связывается с оставшимися двумя давлениями:

$$\begin{aligned} P_{\text{cow}} &= P_o - P_w, \\ P_{\text{cog}} &= P_g - P_o, \end{aligned} \quad (2)$$

где в нашем распоряжении имеются табличные зависимости

$$\begin{aligned} P_{\text{cow}} &= P_{\text{cow}}(S_w), \\ P_{\text{cog}} &= P_{\text{cog}}(S_g). \end{aligned} \quad (3)$$

$P_o$  – это первичная переменная, а  $P_w$  и  $P_g$  находятся из (2).

### Плотность

Плотности определяются как

$$\begin{aligned} \rho_o &= \frac{1}{B_o}(\rho_o^* + \rho_g^* R_{go}), \\ \rho_w &= \frac{1}{B_w}(\rho_w^* + \rho_g^* R_{gw}), \\ \rho_g &= \frac{1}{B_g}(\rho_g^* + \rho_o^* R_{og}). \end{aligned} \quad (4)$$

### Массовая доля

Ограничения на массовые доли для каждой фазы имеют вид

$$\begin{aligned} \omega_{oo} + \omega_{go} &= 1, \\ \omega_{ww} + \omega_{gw} &= 1, \\ \omega_{og} + \omega_{gg} &= 1. \end{aligned} \quad (5)$$

В модели нелетучей нефти компоненты могут появляться в фазах и исчезать из них. Поскольку каждый компонент всегда присутствует в «своей» фазе, ограничения (5) используются для нахождения  $\omega_{go}$ ,  $\omega_{gw}$  и  $\omega_{og}$ , поэтому нетрудно вывести

$$\begin{aligned} \omega_{oo} &= \frac{\rho_o^*}{\rho_o B_o} = \frac{\rho_o^*}{\rho_o^* + \rho_g^* R_{go}}, \\ \omega_{ww} &= \frac{\rho_w^*}{\rho_w B_w} = \frac{\rho_w^*}{\rho_w^* + \rho_g^* R_{gw}}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\omega_{gg} = \frac{\rho_g^*}{\rho_g B_g} = \frac{\rho_g^*}{\rho_g^* + \rho_o^* R_{og}}.$$

Однако в действительности для компонента  $\bar{c}$  в фазе  $j$  требуется только произведение массовой доли на плотность вида

$$\rho_j \omega_{cj} = \frac{\rho_c^* R_{cj}}{B_j}. \quad (7)$$

### Вязкость

Предполагается, что вязкость зависит от давления:

$$\begin{aligned} \mu_o &= \mu_o(P_o), \\ \mu_w &= \mu_w(P_w), \\ \mu_g &= \mu_g(P_g). \end{aligned} \quad (8)$$

### Объемный коэффициент и коэффициент растворимости

Нам потребуется вычислять три объемных коэффициента в зависимости от давления в их фазах:

$$\begin{aligned} B_o &= B_o(P_o), \\ B_w &= B_w(P_w), \\ B_g &= B_g(P_g). \end{aligned} \quad (9)$$

Коэффициенты растворимости  $R_{go}$  (газа в нефти),  $R_{gw}$  (газа в воде) и  $R_{og}$  (нефти в газе) также являются функциями фазовых давлений

$$\begin{aligned} R_{go} &= R_{go}(P_o), \\ R_{gw} &= R_{gw}(P_w), \\ R_{og} &= R_{og}(P_g). \end{aligned} \quad (10)$$

### Относительная проницаемость

Относительные проницаемости представляют наибольшие трудности для вычисления и, соответственно, являются постоянным источником погрешностей. Хотя для двухфазной фильтрации относительные проницаемости легко вычисляются на основе лабораторных экспериментов по вытеснению, в случае трехфазного потока возникают определенные проблемы. Поскольку в нормальной ситуации нефть имеет промежуточную смачиваемость, эксперименты

проводятся для двухфазной фильтрации нефти и воды, а также газа и нефти в присутствии остаточной воды. По полученным результатам строятся кривые относительных фазовых проницаемостей в зависимости от соответствующей насыщенности:

$$\begin{aligned} k_{rw} &= k_{rw}(S_w), \\ k_{row} &= k_{row}(S_w) \end{aligned} \quad (11)$$

и

$$\begin{aligned} k_{rg} &= k_{rg}(S_g), \\ k_{rog} &= k_{rog}(S_g) \end{aligned} \quad (12)$$

для систем «нефть-вода» и «нефть-газ» соответственно.

Для определения  $k_{ro}$  используется нормализованная версия модели Стоуна II [1]:

$$k_{ro} = k_{ro}(S_w, S_g) = k_{rocw} \times \left( \left( \frac{k_{row}}{k_{rocw}} + k_{rw} \right) \left( \frac{k_{rog}}{k_{rocw}} + k_{rg} \right) - (k_{rw} + k_{rg}) \right), \quad (13)$$

где  $k_{rocw}$  – значение относительной проницаемости нефти в точке насыщенности остаточной водой.

### Сетевой подход к разбиению области месторождения

#### Узловое описание области

При сетевом подходе разбиение области происходит на нескольких уровнях. Область представляется как набор узлов, соединенных между собой [2–6]. На рис. 1 приведен пример узлового описания простой двумерной области.

Базовыми строительными блоками являются узлы и соединения. Узлы эквивалентны узлам конечных объемов. Однако объемы трактуются уже не как элементы, а как параметры узлов. При этом первичными неизвестными выступают другие параметры. Если узел расположен внутри пласта, то он называется пластовым узлом. Его первичными неизвестными являются давление опорной фазы  $P_j^*$  и насыщенность другой фазой  $S_j$ . Если узел соответствует сети промышленного оборудования (стволу скважины

или трубе), то он носит название промышленного узла. Его первичными неизвестными будут массовый расход фазы  $Q_j$  и давление смеси  $P$ . Можно придумать другие типы узлов для описания сложных областей. Тем не менее этих двух определений достаточно, чтобы описать обычные области нефтяного промысла.

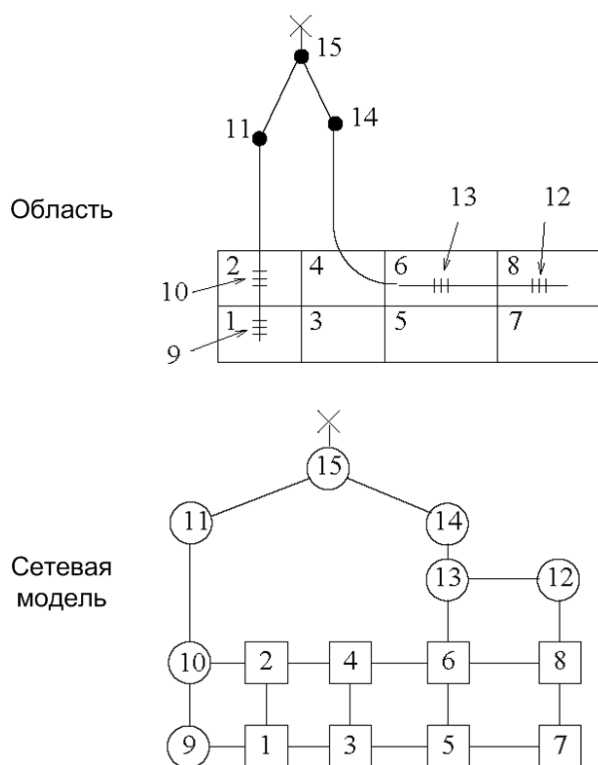
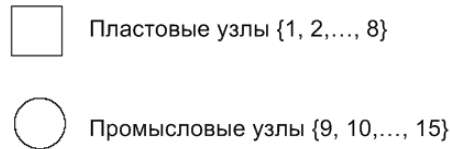


Рис. 1. Узловое описание области, включая пласт и наземное оборудование (скважины и трубы), при сетевом подходе

Соединение устанавливает факт соседства двух узлов, а также определяет сопротивление потоку, которое оказывает среда, расположенная между двумя узлами. Для соединений между двумя пластовыми узлами скорость потока вычисляется на основе закона Дарси. Для соединений между промышленными узлами используются уравнения сохранения массы и момента, чтобы установить его влияние на поток флюидов. Связь между пластовым и промышленным узлом описывается моделью скважины [7–10].

## Список узлов



## Список соединений

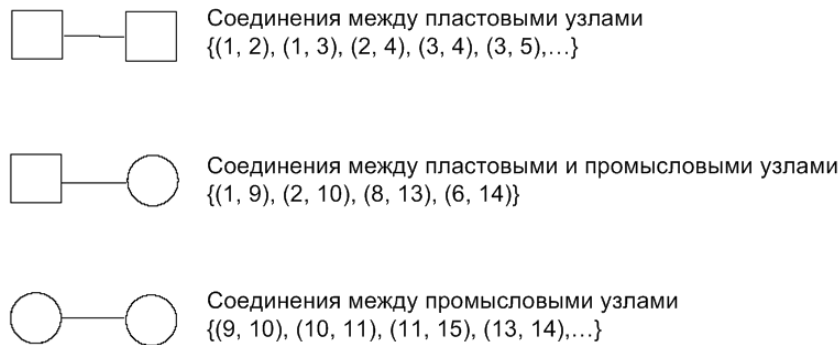


Рис. 2. Список узлов и соединений для сетевой модели на рис. 1

Область полностью характеризуется двумя списками узлов и соединений, показанных на рис. 2. Они должны содержать информацию, достаточную для геометрического представления проблемы. Если сетка в процессе моделирования не меняется, то эти геометрические параметры не требуют обновления, т. е. представленные два списка составляются только один раз.

*Особенности предлагаемого подхода*

Преимущества данного сетевого описания состоят в следующем.

1. В процессе генерирования сетки создается список узлов и список соединений. Поэтому в симуляторе может использоваться любой способ генерирования сетки, который возвращает в качестве результата эти два списка. Однако на данную процедуру должны быть наложены некоторые ограничения, поскольку рассчитать поток между объемами со сложной формой уже не является тривиальной задачей.

2. Два списка создаются после присвоения узлам глобальных номеров. При этом для соединения важно относительное положение узлов. Обработка соединения вдоль оси  $x$  или  $y$  ничем не отличается. Для соединения между пластовыми узлами зависимость проницаемости от направления

(вдоль оси  $x$  или  $y$ ) обеспечивается с помощью коэффициента геометрии.

3. Непроницаемые границы учитываются автоматически за счет необъявленных соединений.

4. Уравнение материального баланса содержит аккумулятивные и потоковые члены. Потоковые члены включают члены отбора, которые характеризуют движение флюидов между пластовыми и промысловыми узлами. Аккумулятивный член узла  $\alpha$  зависит только от самого узла. Потоковый член между узлами  $\alpha$  и  $\beta$  зависит от этих двух связанных между собой узлов или соединения  $\overline{\alpha\beta}$ . Можно использовать следующие правила:

- при обходе списка узлов вычисляются все члены, локальные по отношению к конкретному узлу;

- при обходе списка соединений вычисляются все члены, локальные по отношению к конкретному соединению.

В работе принято обозначать узлы и соединения как модули. Когда рассматривается или активируется тот или иной модуль, вычисления не требуют данных, которые отсутствуют среди параметров самого модуля. Сетевой подход ликвидирует перекрестные связи, возникающие при классиче-

ском подходе. Для заданного модуля все расчеты будут всегда одни и те же. Меняться будут только значения параметров, за счет чего достигается более высокий уровень стандартизации. При сетевом подходе вектор невязки и якобиан формируются модуль за модулем, а не строка за строкой.

**Математическое описание модулей, отвечающих за узлы и соединения**

*Предварительные определения:*

– индексы  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  соответствуют пластовым или промысловым узлам;

– индекс  $\overline{\alpha\beta}$  соответствует соединению между узлами  $\alpha$  и  $\beta$ .

Глобальный вектор невязки  $\mathbf{r}$  и глобальный якобиан  $\mathbf{J}$  есть суммы аккумулятивных и потоковых членов. Они записываются в следующем виде:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}^A + \mathbf{J}^F, \quad (14)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}^A + \mathbf{r}^F, \quad (15)$$

где верхние индексы А и F обозначают аккумулятивный и потоковый члены соответственно.

*Декомпозиция модуля*

Если  $\tilde{\mathbf{r}}(\alpha)$  – вклад узла  $\alpha$  в общую невязку,  $\tilde{\mathbf{r}}(\overline{\alpha\beta})$  – вклад соединения  $\overline{\alpha\beta}$  в общую невязку, тогда

$$\mathbf{r} = \sum_{\alpha=1}^{N_n} \tilde{\mathbf{r}}(\alpha) + \sum_{\overline{\alpha\beta}=1}^{N_{co}} \tilde{\mathbf{r}}(\overline{\alpha\beta}), \quad (16)$$

или

$$\mathbf{r} = \sum_{\text{модуль}} \tilde{\mathbf{r}}_{\text{модуль}}. \quad (17)$$

$\tilde{\mathbf{r}}(m)$  представляет собой приращение невязки в модуле  $m$ .

Аналогично, если  $\tilde{\mathbf{J}}(\alpha)$  – вклад узла  $\alpha$  в формирование общего якобиана,  $\tilde{\mathbf{J}}(\overline{\alpha\beta})$  – вклад соединения  $\overline{\alpha\beta}$  в формирование общего якобиана, тогда сам якобиан  $\mathbf{J}$  вычисляется как

$$\mathbf{J} = \sum_{\alpha=1}^{N_n} \tilde{\mathbf{J}}(\alpha) + \sum_{\overline{\alpha\beta}=1}^{N_{co}} \tilde{\mathbf{J}}(\overline{\alpha\beta}), \quad (18)$$

что сводится к

$$\mathbf{J} = \sum_{\text{модуль}} \tilde{\mathbf{J}}_{\text{модуль}}. \quad (19)$$

$\tilde{\mathbf{J}}(m)$  обозначает долю модуля  $m$  в формировании якобиана.

*Приращение невязки*

С узлами связаны аккумулятивные члены, тогда как с соединениями – потоковые члены. При этом приращение невязки в узле  $\alpha$  не содержит никакого потокового члена, а вклад соединения  $\overline{\alpha\beta}$  в общую невязку не зависит от аккумулятивных членов, что записывается как

$$\tilde{\mathbf{r}}^F(\alpha) = \tilde{\mathbf{r}}^A(\overline{\alpha\beta}) = \mathbf{0}. \quad (20)$$

В результате

$$\tilde{\mathbf{r}}(\alpha) = \tilde{\mathbf{r}}^A(\alpha) + \tilde{\mathbf{r}}^F(\alpha) = \tilde{\mathbf{r}}^A(\alpha), \quad (21)$$

$$\tilde{\mathbf{r}}(\overline{\alpha\beta}) = \tilde{\mathbf{r}}^A(\overline{\alpha\beta}) + \tilde{\mathbf{r}}^F(\overline{\alpha\beta}) = \tilde{\mathbf{r}}^F(\overline{\alpha\beta}). \quad (22)$$

*Модуль, отвечающий за узел*

При обходе списка узлов в модуле, отвечающем за узел, определяется приращение невязки  $\tilde{\mathbf{r}}^A(\alpha)$  для всех узлов  $\alpha$ . Приращение  $\tilde{\mathbf{r}}^A$  содержит  $N$  компонент и

$$\tilde{\mathbf{r}}^A(\alpha) = [\tilde{\mathbf{r}}_{\beta}^A(\alpha)]_{1 \leq \beta \leq N_n}, \quad (23)$$

где  $\tilde{\mathbf{r}}_{\beta}^A(\alpha)$  –  $\beta$ -й компонент  $\tilde{\mathbf{r}}^A(\alpha)$ , как вектор с размерностью  $N_{\beta}$ .

Аккумулятивный член для узла  $\alpha$  есть функция от  $\alpha$ , т. е.

$$\tilde{\mathbf{r}}_{\beta}^A(\alpha) = \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{если } \alpha \neq \beta, \\ \tilde{\mathbf{r}}_{\beta}^A(\beta), & \text{если } \alpha = \beta, \end{cases} \quad (24)$$

что означает наличие у  $\tilde{\mathbf{r}}^A(\alpha)$  единственного ненулевого компонента  $\tilde{\mathbf{r}}_{\alpha}^A(\alpha)$ :

$$\tilde{\mathbf{r}}(\alpha) = \tilde{\mathbf{r}}^A(\alpha) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{r}}_{\alpha}^A(\alpha) \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (25)$$

*Модуль, отвечающий за соединение*

При обходе списка соединений в модуле, отвечающем за узел, определяется приращение невязки  $\tilde{\mathbf{r}}^F(\overline{\alpha\beta})$  для всех соединений  $\overline{\alpha\beta}$ :

$$\tilde{\mathbf{r}}^F(\overline{\alpha\beta}) = \left[ \tilde{\mathbf{r}}_\gamma^F(\overline{\alpha\beta}) \right]_{1 \leq \gamma \leq N_n}. \quad (26)$$

Поскольку поток через соединение  $\overline{\alpha\beta}$  зависит только от узлов  $\alpha$  и  $\beta$ , то

$$\tilde{\mathbf{r}}_\gamma^F(\overline{\alpha\beta}) = \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{если } \gamma \neq \alpha \text{ и } \gamma \neq \beta, \\ \tilde{\mathbf{r}}_\gamma^F(\overline{\alpha\beta}), & \text{если } \gamma = \alpha \text{ или } \gamma = \beta. \end{cases} \quad (27)$$

Единственными ненулевыми компонентами  $\tilde{\mathbf{r}}^F(\overline{\alpha\beta})$  являются  $\tilde{\mathbf{r}}_\alpha^F(\overline{\alpha\beta})$  и  $\tilde{\mathbf{r}}_\beta^F(\overline{\alpha\beta})$ :

$$\tilde{\mathbf{r}}(\overline{\alpha\beta}) = \tilde{\mathbf{r}}^F(\overline{\alpha\beta}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{r}}_\alpha^F(\overline{\alpha\beta}) \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{r}}_\beta^F(\overline{\alpha\beta}) \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (28)$$

*Приращение невязки*

Уравнение (16) можно разложить на следующие составляющие:

$$\mathbf{r}_\alpha = \tilde{\mathbf{r}}_\alpha^A(\alpha) + \sum_\beta \tilde{\mathbf{r}}_\alpha^F(\overline{\alpha\beta}), \quad (29)$$

где суммирование по  $\beta$  подразумевает узлы, соединенные с узлом  $\alpha$ .

*Приращение якобиана*

Модулям, отвечающим за узлы и соединения, соответствуют аккумулятивные и потоковые члены соответственно:

$$\tilde{\mathbf{J}}^F(\alpha) = \tilde{\mathbf{J}}^A(\overline{\alpha\beta}) = \mathbf{0}. \quad (30)$$

Поэтому

$$\tilde{\mathbf{J}}(\alpha) = \tilde{\mathbf{J}}^A(\alpha) + \tilde{\mathbf{J}}^F(\alpha) = \tilde{\mathbf{J}}^A(\alpha), \quad (31)$$

$$\tilde{\mathbf{J}}(\overline{\alpha\beta}) = \tilde{\mathbf{J}}^A(\overline{\alpha\beta}) + \tilde{\mathbf{J}}^F(\overline{\alpha\beta}) = \tilde{\mathbf{J}}^F(\overline{\alpha\beta}). \quad (32)$$

*Модуль, отвечающий за узел*

При обходе списка узлов в модуле, отвечающем за узел, определяется приращение якобиана в виде матрицы  $\tilde{\mathbf{J}}^A(\gamma)$  для всех узлов  $\gamma$ , и

$$\tilde{\mathbf{J}}^A(\gamma) = \left[ \tilde{\mathbf{J}}_{\alpha, \beta}^A(\gamma) \right]_{1 \leq \alpha, \beta \leq N_n}, \quad (33)$$

где  $\tilde{\mathbf{J}}_{\alpha, \beta}^A(\gamma)$  – элемент  $\alpha$ -й строки и  $\beta$ -го столбца матрицы  $\tilde{\mathbf{J}}^A(\gamma)$ . Матрица  $\tilde{\mathbf{J}}^A(\gamma)$  имеет размер  $N \times N$ , а  $\tilde{\mathbf{J}}_{\alpha, \beta}^A(\gamma)$  имеет размер  $N_\alpha \times N_\beta$ .

Приращение якобиана – это производная приращения невязки

$$\tilde{\mathbf{J}}_{\alpha, \beta}^A(\gamma) = \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}_\alpha^A(\gamma)}{\partial \mathbf{u}_\beta}, \quad (34)$$

для которого также выполняется условие

$$\tilde{\mathbf{J}}_{\alpha, \beta}^A(\gamma) = \begin{cases} \tilde{\mathbf{J}}_{\alpha, \alpha}^A(\alpha), & \text{если } \gamma = \alpha = \beta, \\ \mathbf{0} & \text{в иных случаях.} \end{cases} \quad (35)$$

Другими словами, матрица  $\tilde{\mathbf{J}}(\alpha)$  является разреженной матрицей, у которой единственный ненулевой элемент – это  $\tilde{\mathbf{J}}_{\alpha, \alpha}^A(\alpha)$ :

$$\tilde{\mathbf{J}}(\alpha) = \tilde{\mathbf{J}}^A(\alpha) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \mathbf{0} & & & \\ & & & \tilde{\mathbf{J}}_{\alpha, \alpha}^A(\alpha) & & \\ & & & & \mathbf{0} & \\ & \mathbf{0} & & & & \ddots \\ & & & & & & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (36)$$

*Модуль, отвечающий за соединение*

При обходе списка соединений в модуле, отвечающем за соединение, определяется приращение якобиана  $\tilde{\mathbf{J}}^F(\overline{\alpha\beta})$  для всех соединений  $\overline{\alpha\beta}$ :

$$\tilde{\mathbf{J}}^F(\overline{\alpha\beta}) = \left[ \tilde{\mathbf{J}}_{\gamma, \delta}^F(\overline{\alpha\beta}) \right]_{1 \leq \gamma, \delta \leq N_n} \quad (37)$$

Поскольку поток через соединение  $\overline{\alpha\beta}$  зависит только от узлов  $\alpha$  и  $\beta$ , то приращение якобиана обладает следующим свойством:

$$\tilde{\mathbf{J}}_{\gamma, \delta}^F(\overline{\alpha\beta}) = \begin{cases} \tilde{\mathbf{J}}_{\gamma, \delta}^F(\overline{\alpha\beta}), & \text{если } \gamma = (\alpha \text{ или } \beta) \\ & \text{и } \delta = (\alpha \text{ или } \beta), \\ \mathbf{0} & \text{в иных случаях,} \end{cases} \quad (38)$$

что означает наличие единственных ненулевых элементов матрицы  $\tilde{\mathbf{J}}^F(\overline{\alpha\beta})$ , как показано ниже

$$\tilde{\mathbf{J}}(\overline{\alpha\beta}) = \tilde{\mathbf{J}}^F(\overline{\alpha\beta}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & \vdots & \vdots & \\ \mathbf{0} & \dots & \tilde{\mathbf{J}}_{\alpha, \alpha}^F(\overline{\alpha\beta}) & \dots & \tilde{\mathbf{J}}_{\alpha, \beta}^F(\overline{\alpha\beta}) & \dots & \mathbf{0} \\ & & \vdots & \mathbf{0} & \vdots & & \\ \mathbf{0} & \dots & \tilde{\mathbf{J}}_{\beta, \alpha}^F(\overline{\alpha\beta}) & \dots & \tilde{\mathbf{J}}_{\beta, \beta}^F(\overline{\alpha\beta}) & \dots & \mathbf{0} \\ & & \vdots & & \vdots & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (39)$$

#### Приращение якобиана

Уравнение (18) можно разложить на следующие составляющие:

$$\mathbf{J}_{\alpha, \beta} = \begin{cases} \tilde{\mathbf{J}}_{\alpha, \beta}^F(\overline{\alpha\beta}), & \text{если } \alpha \neq \beta, \\ \tilde{\mathbf{J}}_{\alpha, \alpha}^A(\overline{\alpha\beta}) + \sum_{\beta} \tilde{\mathbf{J}}_{\alpha, \alpha}^F(\overline{\alpha\beta}) & \text{в иных случаях.} \end{cases} \quad (40)$$

#### Вычислительная процедура

Уравнения (29) и (40) позволяют сформировать вектор невязки и матрицу Якоби. В программе при обходе списка модулей (как для узлов так и для соединений) выполняются следующие два шага:

– в модулях определяются приращения невязки и якобиана;

– значения приращений объединяются для формирования глобальных вектора невязки и якобиана.

Поскольку программа делает активным только один модуль за раз, то далее обозначения  $(\alpha)$  и  $(\overline{\alpha\beta})$  опущены.

#### Сборка модулей, отвечающих за узел

Для модуля, отвечающего за узел, вычисляются  $\tilde{\mathbf{r}}_{\alpha}^A$  и  $\tilde{\mathbf{J}}_{\alpha, \alpha}^A$ , и

$$\mathbf{r}_{\alpha} \leftarrow \mathbf{r}_{\alpha} + \tilde{\mathbf{r}}_{\alpha}^A, \quad (41)$$

$$\mathbf{J}_{\alpha, \alpha} \leftarrow \mathbf{J}_{\alpha, \alpha} + \tilde{\mathbf{J}}_{\alpha, \alpha}^A, \quad (42)$$

где знак  $\leftarrow$  означает «присваивание».

#### Сборка модулей, отвечающих за соединение

Для модуля, отвечающего за соединение, рассчитываются  $\mathbf{r}_{\alpha}^F$  и  $\mathbf{r}_{\beta}^F$  (для вектора невязки) и  $\mathbf{J}_{\alpha, \alpha}^F$ ,  $\mathbf{J}_{\alpha, \beta}^F$ ,  $\mathbf{J}_{\beta, \alpha}^F$  и  $\mathbf{J}_{\beta, \beta}^F$  (для якобиана).

Далее осуществляются замены

$$\mathbf{r}_{\alpha} \leftarrow \mathbf{r}_{\alpha} + \tilde{\mathbf{r}}_{\alpha}^F, \quad (43)$$

$$\mathbf{r}_{\beta} \leftarrow \mathbf{r}_{\beta} + \tilde{\mathbf{r}}_{\beta}^F,$$

$$\mathbf{J}_{\alpha, \alpha} \leftarrow \mathbf{J}_{\alpha, \alpha} + \tilde{\mathbf{J}}_{\alpha, \alpha}^F,$$

$$\mathbf{J}_{\alpha, \beta} \leftarrow \mathbf{J}_{\alpha, \beta} + \tilde{\mathbf{J}}_{\alpha, \beta}^F,$$

$$\mathbf{J}_{\beta, \alpha} \leftarrow \mathbf{J}_{\beta, \alpha} + \tilde{\mathbf{J}}_{\beta, \alpha}^F,$$

$$\mathbf{J}_{\beta, \beta} \leftarrow \mathbf{J}_{\beta, \beta} + \tilde{\mathbf{J}}_{\beta, \beta}^F. \quad (44)$$

Детали вычислений приращений якобиана и невязки могут различаться в зависимости от типа узла или соединения.

#### Выводы

Разработан новый способ построения вектора невязки и матрицы Якоби. Пластовая область разбивалась на сеть узлов и соединений. Подобная декомпозиция дает в итоге более высокий уровень абстракции, чем классический подход, и приводит к написанию кода программы, обладающего свойствами модульности и универсальности. Для большей эффективности при реализации сетевого подхода был использован объектно ориентированный подход.

Для описания пласта, скважин и наземных объектов были предложены различные типы узлов и соединений. В зависимости от числа фаз разработаны соответствующие узлы. Соединение между пластовым и промысловым узлами описывается с помощью класса, реа-

лизирующего классическую модель вертикальной скважины Писмана. Однако гибкость подхода позволяет исследовать другие типы соединений для пополнения библиотеки классов. Например, в работе осталось без внимания соединение между пластовым (промысловым) узлом и точкой постоянного давления, которая характеризует границу с водоносным пластом. Более того, такие соединения могут оказаться полезными при разбиении области на подобласти.

#### Библиографические ссылки

1. *Aziz X., Settari Э.* Математическое моделирование пластовых систем / пер. с англ. ; под ред. М. М. Максимова. М. : Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2004. 416 с. Репринтное воспроизведение издания: М. : Недра, 1982.
2. *Juanes R.* Displacement theory and multiscale numerical modeling of three-phase flow in porous media, Ph. D. Thesis, University of California, Berkeley, California, 2003.
3. *Schiozer D. J.* Simultaneous simulation of reservoir and surface facilities, Ph.D Thesis, Stanford University, 1994. 172 с.
4. *Эрлагер Р. мл.* Гидродинамические методы исследования скважин. М. : Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2007. 512 с.
5. *Пыхачев Г. Б., Исаев Р. Г.* Подземная гидравлика : учеб. пособие. М. : Недра, 1972. 360 с.
6. *Thiele M. R.* Modeling multiphase flow in heterogeneous media using streamtubes, Ph. D. Thesis, Stanford University, Stanford, California, 1994. 203 p.
7. *Wesseling P.* Principles of computational fluid dynamics, Springer, Berlin, 2001. 644 p.
8. *Wong T. W. and Aziz K.* Considerations in the development of multipurpose reservoir simulation models // First and Second International Forum on Reservoir Simulation, Alpbach, Austria, 1988 and 1989. 77-208 p.
9. *Tureyen O. I., Karacali O., Caers J. A.* Parallel, Multiscale Approach to Reservoir Modeling // 9th European Conference on the Mathematics of Oil Recovery, 30 August – 2 September 2004. Cannes, France. pp. 1-8.
10. *Thiele M. R., Batycky R. P. and Blunt M. J.* A streamline-based 3D filed scale compositional reservoir simulator // SPE Reservoir Engineering, Oct. 5-8 1997. San Antonio, Texas, U.S.A. pp. 1-12.

#### References

1. Aziz H., Settari E. (2004). *Matematicheskoe modelirovanie plastovyh sistem* [Mathematical modeling of reservoir systems]. Moscow, Izhevsk. 416 p.
2. Juanes R. Displacement theory and multiscale numerical modeling of three-phase flow in porous media, Ph. D. Thesis, University of California, Berkeley, California, 2003.
3. Schiozer D. J. Simultaneous simulation of reservoir and surface facilities, Ph.D Thesis, Stanford University, 1994. 172 с.
4. Erlager P. ml. (2007). *Gidrodinamicheskie metody issledovaniya skvazhin* [Hydrodynamic methods of well investigation]. Moscow, Izhevsk. 512 p.
5. Pikhachev G.B, Isaev R.G (1972). *Podzemnaya gidravlika* [Underground hydraulics]. M: Nedra. 360 p.
6. Thiele M. R. Modeling multiphase flow in heterogeneous media using streamtubes, Ph. D. Thesis, Stanford University, Stanford, California, 1994. 203 p.
7. *Wesseling P.* Principles of computational fluid dynamics, Springer, Berlin, 2001. 644 p.
8. Wong T. W. and Aziz K. Considerations in the development of multipurpose reservoir simulation models. First and Second International Forum on Reservoir Simulation, Alpbach, Austria, 1988 and 1989. 77-208 p.
9. Tureyen O. I., Karacali O., Caers J. A. Parallel, Multiscale Approach to Reservoir Modeling // 9th European Conference on the Mathematics of Oil Recovery, 30 August – 2 September 2004. Cannes, France. pp. 1-8.
10. Thiele M. R., Batycky R. P. and Blunt M. J. A streamline-based 3D filed scale compositional reservoir simulator // SPE Reservoir Engineering, Oct. 5-8 1997. San Antonio, Texas, U.S.A. pp. 1-12.

\*\*\*

#### Generalized Mathematical Model of Non-Oil Petroleum. Part I. Network Approach to Dividing of the Area of Deposit on Modules

*S. V. Denisov*, PhD in Engineering, Associate Professor, Ufa State Petroleum Technical University, Ufa, Russia  
*V. E. Lyalin*, DSc in Engineering, DSc in Mineralogy, Professor, Kalashnikov ISTU, Izhevsk, Russia  
*A. N. Krasnov*, PhD in Engineering, Associate Professor, Ufa State Petroleum Technical University, Ufa, Russia  
*A. A. Shushkov*, PhD in Engineering, Senior Researcher, Udmurt Federal Research Center of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Izhevsk, Russia



*The paper presents a generalized model of non-volatile oil with introduced assumptions that make it possible to reliably solve the problem of hydrodynamic modeling of deposits. A network approach to the division of the field of the deposit and a mathematical description of the modules are presented. This method is a network approach to creating a simulator of deposits and provides a higher level of standardization than the classical method.*

*The procedure for generating modules responsible for the basic elements that are used to describe the calculation area is presented; the application of this procedure for the implementation of modules is described using the generalized non-volatile oil as an example. A new approach is proposed for the breakdown of the estimated area of the field, including the productive layer and ground equipment, to provide a higher level of abstraction in the decomposition of the reservoir system. To describe the formation, wells and ground objects, various types of assemblies and connections were proposed. Depending on the number of phases, the corresponding nodes have been developed.*

**Keywords:** hydrodynamic modeling, multiphase mixture, non-volatile oil.

Получено: 25.05.18