

УДК 532 + 622.276.1/4(73)

DOI 10.22213/2410-9304-2018-2-130-138

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ЧИСЛЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ СОВМЕСТНОГО ДВИЖЕНИЯ ФЛЮИДОВ

С. В. Денисов, канд. техн. наук, доц., Уфимский государственный нефтяной технический университет, Уфа, Россия

А. Н. Краснов, кандидат технических наук, доцент, Уфимский государственный нефтяной технический университет, Уфа, Россия

А. А. Шушков, канд. техн. наук, Удмуртский федеральный исследовательский центр Уральского отделения Российской академии наук, Ижевск, Россия

Современный анализ системы разработки месторождений углеводородов и прогноз динамики добычи при различных условиях эксплуатации осуществляется с помощью математических моделей поведения продуктивного пласта, эффективное использование которых требует значительных вычислительных затрат. Неопределенность, связанная с характеристиками пласта и насыщающих его флюидов, приводит к необходимости предварительного гидродинамического исследования реакции пласта на изменение режима добычи (закачки) в скважинах.

Математическое моделирование многофазного потока в пористой среде, в значительной степени, все еще открытый вопрос. Основная трудность связана с его разномасштабной природой. Фактически, необходимо рассматривать многофазный поток как проблему со сложной физикой, т. е. когда разные процессы преобладают на разных масштабах. Подобное сложное поведение не желательно сводить к созданию упрощенных математических моделей, которые являются обобщением моделей, хорошо описывающих однофазный поток. Это особенно актуально для трехфазного потока, который традиционно моделировался путем непосредственного применения двухфазного описания.

Цель настоящей работы состоит в разработке универсального подхода к созданию программного комплекса для гидродинамического моделирования нефтяных месторождений, который далее будем просто называть симулятором. Такой метод представляет собой сетевой подход к созданию симулятора месторождений и обеспечивает более высокий уровень стандартизации, чем классический способ. Для решения поставленной задачи представлена математическая модель и численное представление уравнений совместного движения флюидов.

Ключевые слова: гидродинамическое моделирование, многофазная смесь, нелетучая нефть.

Введение

При моделировании в масштабе месторождения потоки флюидов рассчитываются как в скважинах, так и в подводящих трубах [1–5]. Рассматривались только цилиндрические трубы. Устья скважин могут группироваться через наземные объекты. Определение групп должно начинаться с устья скважин и заканчиваться головным объектом для формирования древовидной структуры [6–11]. Скважины и наземные объекты вместе образуют систему сбора (или сеть промыслового оборудования).

Многофазная смесь компонентов движется через поры коллектора и сеть промыслового оборудования. Все компоненты могут присутствовать во всех фазах. Теорети-

чески выведенные уравнения справедливы для любых комбинаций фаз и компонент. Однако в работе реализована только модель нелетучей нефти.

Математическая модель совместного движения флюидов

Определяющие уравнения движения флюидов по трубам и через пористую среду выводятся на основании законов сохранения для всех компонентов системы.

Фильтрация в пористой среде

Для каждого компонента \bar{c} действует закон сохранения массы, который для некоторого объема \mathcal{V} можно представить в виде следующего уравнения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Чистый приток} \\ \text{массы компонента } \bar{c} \\ \text{в объем } \mathcal{V} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Чистое увеличение} \\ \text{массы компонента } \bar{c} \\ \text{за счет источника} \\ \text{внутри объема } \mathcal{V} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Чистый прирост} \\ \text{массы компонента } \bar{c} \\ \text{внутри объема } \mathcal{V} \end{array} \right\}. \quad (1)$$

Чистый приток массы или потоковый член

Если скорость фильтрации j -й фазы обозначить как \vec{u}_j , плотность j -й фазы как ρ_j , а массовую долю компонента \bar{c} в j -й фазе как $\omega_{\bar{c}j}$, то чистый приток массы можно выразить через расход компонента \bar{c} через поверхность \mathcal{S} объема \mathcal{V} :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Чистый приток} \\ \text{массы компонента } \bar{c} \\ \text{в объем } \mathcal{V} \end{array} \right\} = - \iint_{\mathcal{S}} \left(\sum_{j=1}^{n_p} \vec{u}_j \rho_j \omega_{\bar{c}j} \right) \cdot \vec{n} d\mathcal{S} = - \iiint_{\mathcal{V}} \nabla \left(\sum_{j=1}^{n_p} \vec{u}_j \rho_j \omega_{\bar{c}j} \right) d\mathcal{V}. \quad (2)$$

Чистое увеличение массы за счет источника (члена отбора)

Условимся считать, что в случае источника чистое увеличение массы берется со знаком минус, а в случае стока – со знаком плюс. Если $\tilde{q}_{\bar{c}j}$ – это массовая скорость потока компонента \bar{c} на единицу объема, то источник (нагнетание) или сток (добыча) внутри объема \mathcal{V} можно математически выразить как

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Чистое увеличение} \\ \text{массы компонента } \bar{c} \\ \text{за счет источника} \\ \text{внутри объема } \mathcal{V} \end{array} \right\} = - \iiint_{\mathcal{V}} \sum_{j=1}^{n_p} \tilde{q}_{\bar{c}j} d\mathcal{V}. \quad (3)$$

Чистый прирост массы или аккумулятивный член

Прирост массы – это изменение количества компонента \bar{c} за бесконечно малый промежуток времени. Если ϕ – пористость породы, а S_j – насыщенность j -й фазой, то

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Чистый прирост} \\ \text{массы компонента } \bar{c} \\ \text{внутри объема } \mathcal{V} \end{array} \right\} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\iiint_{\mathcal{V}} \sum_{j=1}^{n_p} \phi \rho_j S_j \omega_{\bar{c}j} d\mathcal{V} \right). \quad (4)$$

Закон сохранения массы

Объединяя уравнения (2)–(4), получим макроскопическую формулировку закона сохранения массы:

$$\iiint_{\mathcal{V}} \left(-\nabla \left(\sum_{j=1}^{n_p} \vec{u}_j \rho_j \omega_{\bar{c}j} \right) - \sum_{j=1}^{n_p} \tilde{q}_{\bar{c}j} - \frac{\partial}{\partial t} \sum_{j=1}^{n_p} \phi \rho_j S_j \omega_{\bar{c}j} \right) d\mathcal{V} = 0. \quad (5)$$

Уравнение (5) должно выполняться для любого объема \mathcal{V} , поэтому

$$\nabla \left(\sum_{j=1}^{n_p} \vec{u}_j \rho_j \omega_{\bar{c}j} \right) + \sum_{j=1}^{n_p} \tilde{q}_{\bar{c}j} + \frac{\partial}{\partial t} \sum_{j=1}^{n_p} \phi \rho_j S_j \omega_{\bar{c}j} = 0. \quad (6)$$

Скорость фильтрации

Основные физические явления, ответственные за движение флюидов, – это дисперсия, диффузия и конвекция. Применительно к нефтепромысловому делу первыми двумя явлениями обычно пренебрегают. Конвективный массоперенос в пористых средах можно считать подчиняющимся закону Дарси:

$$\vec{u}_j = - \frac{\mathbf{k} k_{vj}}{\mu_j} \nabla \Phi_j. \quad (7)$$

Этот закон справедлив для низких скоростей течения, что часто и наблюдается при разработке нефтяных пластов. Потенциал j -й фазы определяется как

$$\nabla \Phi_j = \nabla P_j - \rho_j g \nabla D. \quad (8)$$

*Дифференциальные уравнения
в частных производных*

Объединяя уравнения, получим

$$\begin{aligned} \nabla \left(\sum_{j=1}^{n_p} \frac{k k_{vj}}{\mu_j} \rho_j \omega_{\bar{c}j} (\nabla P_j - \rho_j g \nabla D) \right) = \\ = \sum_{j=1}^{n_p} \tilde{q}_{\bar{c}j} + \frac{\partial}{\partial t} \sum_{j=1}^{n_p} \phi \rho_j S_j \omega_{\bar{c}j}. \end{aligned} \quad (9)$$

Поскольку материальный баланс должен выполняться для каждого компонента \bar{c} , то мы имеем дело с системой из n_c ДУЧП.

Неизвестные

При выводе уравнений закона сохранения массы были введены новые параметры. Поэтому требуются дополнительные уравнения для решения системы ДУЧП.

Насыщенности фазами ограничены следующим равенством:

$$\sum_{j=1}^{n_p} S_j = 1. \quad (10)$$

Для каждой j -й фазы сумма массовых долей входящих в нее компонент должна равняться единице:

$$\sum_{\bar{c}=1}^{n_c} \omega_{\bar{c}j} = 1. \quad (11)$$

Объемный коэффициент j -й фазы B_j и коэффициент растворимости компонента \bar{c} в j -й фазе $R_{\bar{c}j}$ позволяют легко вычислить массовую долю:

$$\omega_{\bar{c}j} = \frac{\rho_{\bar{c}}^* R_{\bar{c}j}}{\rho_j B_j}, \quad (12)$$

где $\rho_{\bar{c}}^*$ – плотность компонента \bar{c} при нормальных условиях. Объемный коэффициент и коэффициент растворимости являются функциями давления в соответствующей фазе. Плотность можно выразить как

$$\rho_j = \frac{1}{B_j} \sum_{\bar{c}=1}^{n_c} \rho_{\bar{c}}^* R_{\bar{c}j}. \quad (13)$$

Кроме того, вязкости зависят от соответствующих фазовых давлений, а относительные проницаемости определяются с помощью фазовых насыщенностей. В свою оче-

редь, давления в фазах связаны через капиллярное давление P_c , которое является функцией насыщенностей и устанавливается на основе лабораторных экспериментов. Массовый расход потока $\tilde{q}_{\bar{c}j}$ в результате нагнетания (добычи) также зависит от фазовых давлений и насыщенностей.

Используя эти дополнительные уравнения, система сводится к n_c ДУЧП с n_c неизвестными. Большинство коэффициентов в этих уравнениях представляют собой нелинейные функции первичных неизвестных.

Для модели нелетучей нефти набор первичных неизвестных состоит из давления нефти P_o , а также насыщенностей водой S_w и газом S_g . Здесь и далее фазу, давление в которой является первичным неизвестным, будем называть опорной фазой и обозначать как j^* . Для многокомпонентных моделей первичными неизвестными будут давление P_{j^*} , насыщенности другими фазами S_j ($j \neq j^*$).

Многофазный поток в трубе

Закон сохранения массы

Уравнение материального баланса в трубе имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Чистый приток} \\ \text{массы фазы } j \\ \text{в объем } \mathcal{V} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Чистый прирост} \\ \text{массы фазы } j \\ \text{внутри объема } \mathcal{V} \end{array} \right\}. \quad (14)$$

Если прирост массы j -й фазы равен нулю, то закон сохранения массы для каждой фазы можно описать следующим уравнением:

$$\sum Q_j^{in} - \sum Q_j^{out} = 0. \quad (15)$$

Массовые расходы Q_j являются первичными неизвестными. В гидравлике нет эквивалента закону Дарси. Массовые скорости потока не могут быть выражены через простые функции давлений. Требуется еще одно уравнение для описания изменений давления в сети промыслового оборудования.

Закон сохранения импульса

Рассмотрим установившийся поток внутри цилиндрической трубы. Чистый поток количества движения должен быть уравновешен другими силами, действующими в трубе.

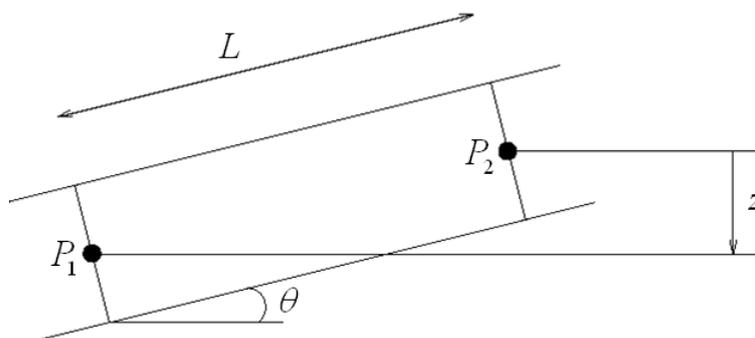


Рис. 1. Определение параметров трубы

Если мы рассмотрим конечный объем трубы, как показано на рис. 1, закон сохранения импульса для однофазного потока запишется в виде

$$\frac{P_2 - P_1}{L} = \frac{(\rho v)(v_2 - v_1)}{L} + \frac{2\tau_w}{r} + g\sin\theta, \quad (16)$$

где v – средняя скорость; τ_w – усилие сдвига; r – радиус трубы. Коэффициент трения определяется как

$$f = \frac{\tau_w}{\left(\frac{\rho v^2}{2}\right)}, \quad (17)$$

в этом случае падение давления на длину L будет равно

$$\frac{P_2 - P_1}{L} = \frac{(\rho v)(v_2 - v_1)}{L} + \frac{2fv^2\rho}{d} + g\sin\theta. \quad (18)$$

Члены в правой части представляют собой компоненты ускорения, трения и подъема соответственно.

По аналогии можно вывести закон сохранения импульса для многофазного потока в трубе, тогда градиент давления вычисляется как

$$\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)_{\text{ускорение}} + \left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)_{\text{трение}} + \left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)_{\text{подъем}}. \quad (19)$$

Компонент подъема соответствует устанавливаемому в трубе гидростатическому равновесию.

Вклад ускорения объясняется изменением кинетической энергии или наличием конвективного ускорения. Если скорость

флюидов не меняется, этот член равен нулю. В нефтепромысловом деле членом ускорения обычно пренебрегают из-за малых изменений скоростей флюидов в скважинах и трубах.

Компонент потерь на трение есть результат потери энергии из-за сопротивления, которое оказывают стенки трубы, движению флюида. Для однофазного потока коэффициент трения зависит от числа Рейнольдса и относительной шероховатости и оценивается по уравнениям или результатам экспериментов. Тем не менее для упрощения задачи компонент трения в данной работе не учитывался. Такая аппроксимация может оказаться неточной для горизонтальных скважин или труб, для которых компонент подъема относительно мал.

В результате принятых упрощений, получим следующее

$$\frac{P_2 - P_1}{L} = g\bar{\rho}\sin\theta, \quad (20)$$

или, если L стремиться к нулю,

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \bar{\rho}z. \quad (21)$$

Здесь вертикальная ось z направлена вниз. Средняя плотность $\bar{\rho}$ есть нелинейная функция массового расхода Q_j .

Вследствие высоких скоростей флюидов силами поверхностного натяжения для течений в трубах пренебрегают. Как следствие, единственная переменная P определяет давление в трубах и рассматривается как еще одно первичное неизвестное. Имеется n_p уравнений сохранения массы, одно урав-

нение сохранения импульса и $n_p + 1$ первичное неизвестное. Для трехфазной фильтрации нефть-вода-газ, например, в добывающей скважине модели нелетучей нефти первичными неизвестными являются массовые расходы нефти Q_o , воды Q_w и газа Q_g , а также давление P в трубе.

Численное представление уравнений движения флюидов

Уравнения, описывающие движение флюидов в пласте, скважинах и трубах, обладают сильной нелинейностью. Кроме того, они включают производные по времени и пространству, которые непросто вычислить. Поэтому задачу нельзя решить прямым способом, т. е. требуются численные методы и процедуры линеаризации.

Производные по времени и пространству заменяются их дискретными конечно-разностными аналогами.

Дискретизация во времени

Предположим, что решение известно в момент времени $t = t^n$, и мы ищем решение в момент $t = t^{n+1}$. Верхний индекс n соответствует моменту времени в начале временного шага, тогда как $n + 1$ – моменту времени в конце шага Δt , и

$$\Delta t = t^{n+1} - t^n. \quad (22)$$

Временная дискретизация некоторого количества X можно выразить с помощью оператора Δ_t :

$$\frac{\partial X}{\partial t} \approx \frac{\Delta_t X}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} (X^{n+1} - X^n). \quad (23)$$

Дискретизация по пространству

В МКР область разбивается на конечные объемы. Каждый объем обладает постоянными физическими свойствами. Узел – это точка внутри объема, которой назначаются значения этих свойств. Здесь и далее α обозначает либо объем, либо узел, соответствующий этому объему. Пространственная дискретизация вдоль оси ξ некоторого количества X есть

$$\frac{\partial X}{\partial \xi} \approx \frac{\Delta_\xi X}{\Delta \xi} = \frac{X_{\xi+\Delta \xi} - X_\xi}{\Delta \xi}. \quad (24)$$

Матричное представление

Применяя законы сохранения, описанные выше, к каждому конечному объему, получим систему нелинейных уравнений. Если N_n – число конечных объемов или узлов, а N_α – число первичных неизвестных для узла α , общее количество уравнений определяется как

$$N = \sum_{\alpha=1}^{N_n} N_\alpha. \quad (25)$$

Вектор \mathbf{u}_α – локальный вектор первичных неизвестных для узла α , который состоит из N_α компонент. Для обобщенной модели нелетучей нефти N_α равно трем, т. к. первичные неизвестные – это P_o , S_w и S_g . Локальный вектор неизвестных имеет вид

$$\mathbf{u}_\alpha = \begin{bmatrix} P_{o_\alpha} \\ S_{w_\alpha} \\ S_{g_\alpha} \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Блочный вектор \mathbf{u} размерности N обозначает глобальный вектор неизвестных:

$$\mathbf{u} = [\mathbf{u}_1 \quad \dots \quad \mathbf{u}_{N_n}]^T. \quad (27)$$

Введем также следующие определения:

– вектор \mathbf{a}_α соответствует локальному аккумулярованию для узла α , соответственно, глобальный аккумулятивный вектор обозначен как \mathbf{a} ;

– вектор \mathbf{f}_α соответствует локальному потоку в объем или из него для узла α , соответственно, глобальный потоковый вектор обозначен как \mathbf{f} , который также включает члены отбора.

Локальный вектор невязки для узла α определяется как

$$\mathbf{r}_\alpha = \mathbf{f}_\alpha - \frac{1}{\Delta t} \Delta_t \mathbf{a}_\alpha. \quad (28)$$

Если \mathbf{r} – это глобальный вектор невязки, то дискретизированная система уравнений имеет следующий вид:

$$\mathbf{r} = \mathbf{f} - \frac{1}{\Delta t} \Delta_t \mathbf{a} = \mathbf{0}. \quad (29)$$

Несмотря на дискретизацию системы уравнений, она все еще остается нелинейной. Коэффициенты, входящие в эти уравнения, зависят от первичных неизвестных.

Метод линеаризации

Для преодоления трудностей, связанных с нелинейным характером уравнений, был применен способ линеаризации на основе метода Ньютона – Рафсона. Глобальный вектор невязки \mathbf{r} раскладывается в ряд Тейлора как функция от \mathbf{u} :

$$\begin{aligned} \mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{N_n}) \approx \mathbf{r}(\mathbf{u}_1^{(0)}, \dots, \mathbf{u}_{N_n}^{(0)}) + \\ + \left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{u}_1} \right|^{(0)} (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_1^{(0)}) + \dots + \left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{u}_{N_n}} \right|^{(0)} (\mathbf{u}_{N_n} - \mathbf{u}_{N_n}^{(0)}), \end{aligned} \quad (30)$$

где было пренебрежено членом второго порядка, а вектор неизвестных $\mathbf{u}^{(0)}$ есть оценка неизвестных в момент времени $t = t^{n+1}$. Обычно в качестве первого приближения для неизвестных в конце шага по времени берется значение в момент $t = t^n$:

$$\mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{u}^n. \quad (31)$$

Разложение в ряд Тейлора можно также записать в виде

$$\mathbf{r} \approx \mathbf{r}^{(0)} + \sum_{\alpha} \left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{u}_{\alpha}} \right|^{(0)} \delta \mathbf{u}_{\alpha}^{(0)} \approx \mathbf{r}^{(0)} + \mathbf{J}^{(0)} \delta \mathbf{u}^{(0)}. \quad (32)$$

Блочная матрица размерностью $N \times N$ \mathbf{J} называется матрицей Якоби и определяется как

$$\mathbf{J} \equiv \left[\mathbf{J}_{\alpha, \beta} \right]_{1 \leq \alpha, \beta \leq N_n} = \left[\frac{\partial \mathbf{r}_{\alpha}}{\partial \mathbf{u}_{\beta}} \right]_{1 \leq \alpha, \beta \leq N_n}, \quad (33)$$

где $\mathbf{J}_{\alpha, \beta}$ – локальная матрица Якоби с размерностью $N_{\alpha} \times N_{\beta}$.

Для обобщенной модели нелетучей нефти локальный якобиан получается как

$$\mathbf{J}_{\alpha, \beta} \equiv \frac{\partial \mathbf{r}_{\alpha}}{\partial \mathbf{u}_{\beta}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r_{\bar{g}_{\alpha}}}{\partial P_{o\beta}} & \frac{\partial r_{\bar{g}_{\alpha}}}{\partial S_{w\beta}} & \frac{\partial r_{\bar{g}_{\alpha}}}{\partial S_{g\beta}} \\ \frac{\partial r_{\bar{w}_{\alpha}}}{\partial P_{o\beta}} & \frac{\partial r_{\bar{w}_{\alpha}}}{\partial S_{w\beta}} & \frac{\partial r_{\bar{w}_{\alpha}}}{\partial S_{g\beta}} \\ \frac{\partial r_{\bar{g}_{\alpha}}}{\partial P_{o\beta}} & \frac{\partial r_{\bar{g}_{\alpha}}}{\partial S_{w\beta}} & \frac{\partial r_{\bar{g}_{\alpha}}}{\partial S_{g\beta}} \end{bmatrix}. \quad (34)$$

В случае если \mathbf{u} – это точное решение системы, то

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{r}^{(0)} + \mathbf{J}^{(0)} \delta \mathbf{u}^{(0)} \neq \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (35)$$

Если же \mathbf{u} не точное решение, а хорошая аппроксимация (лучше чем $\mathbf{u}^{(0)}$), тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\mathbf{u}) \approx \mathbf{0}, \\ \mathbf{r}^{(0)} + \mathbf{J}^{(0)} \delta \mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (36)$$

Последнее уравнение (36) линейно, т. к. $\mathbf{r}^{(0)}$ и $\mathbf{J}^{(0)}$ представляют собой функции от известной оценки $\mathbf{u}^{(0)}$. Решение (36) есть $\mathbf{u}^{(1)}$. Продолжая таким же образом, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^{(0)} + \mathbf{J}^{(0)} (\mathbf{u}^{(1)} - \mathbf{u}^{(0)}) = \mathbf{0} \text{ дает } \mathbf{u}^{(1)}, \\ \mathbf{r}^{(1)} + \mathbf{J}^{(1)} (\mathbf{u}^{(2)} - \mathbf{u}^{(1)}) = \mathbf{0} \text{ дает } \mathbf{u}^{(2)}, \\ \vdots \\ \mathbf{r}^{(v)} + \mathbf{J}^{(v)} (\mathbf{u}^{(v+1)} - \mathbf{u}^{(v)}) = \mathbf{0} \text{ дает } \mathbf{u}^{(v+1)}. \end{aligned} \quad (37)$$

Процедура повторяется до тех пор, пока значение невязки $\mathbf{r}(\mathbf{u}^{(v)})$ и/или изменение $\delta \mathbf{u}^{(v)}$ не станет достаточно мало. $\mathbf{u}^{(v)}$ в конце последней итерации берется в качестве решения:

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^{(v)}. \quad (38)$$

На рис. 2 изображена блок-схема итерационной процедуры Ньютона – Рафсона. Сразу отметим, что в ней не представлена техника адаптивного изменения шага по времени. В частности, если число итераций Ньютона – Рафсона мало, то Δt утраивается. Кроме того, на рис. 2 не показаны итерации, требующиеся для решения системы линейных алгебраических уравнений.

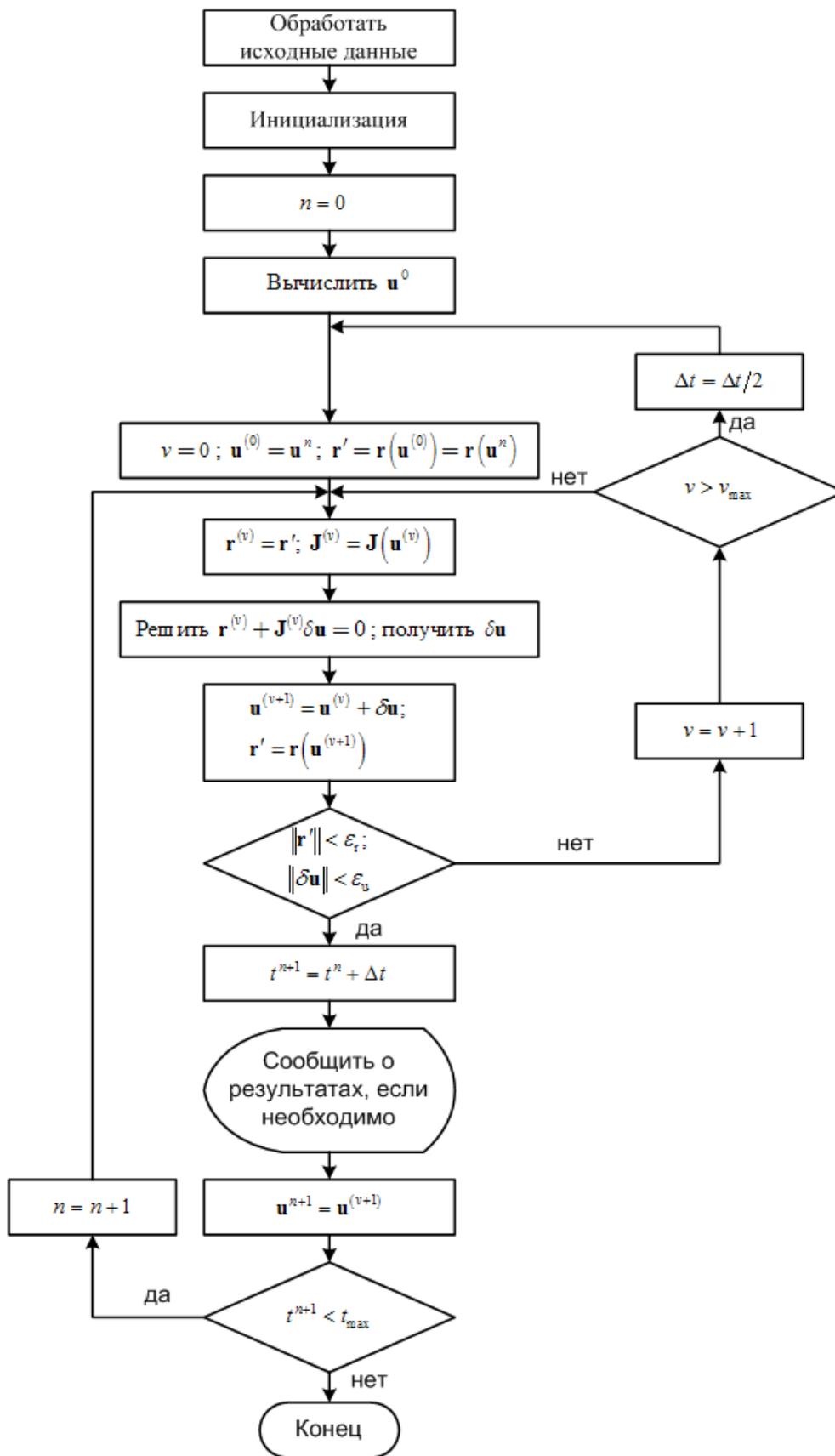


Рис. 2. Блок-схема итерационной процедуры Ньютона – Рафсона

Выводы

При моделировании в масштабе месторождения потоки флюидов рассчитывались как в скважинах, так и в подводящих трубах. Рассматривались только цилиндрические трубы. Устья скважин могли группироваться через наземные объекты. Полученные уравнения можно использовать для произвольных комбинаций фаз и компонент. Однако в работе использована только модель нелетучей нефти. Применение полученных уравнений для любых комбинаций фаз и компонент является дальнейшей задачей исследований.

Библиографические ссылки

1. *Juanes R.* Displacement theory and multiscale numerical modeling of three-phase flow in porous media, Ph. D. Thesis, University of California, Berkeley, California, 2003. 377 p.
2. *Horne R. N.* Modern well test analysis: a computer-aided approach. 4th printing. Palo Alto: Petroway, 1990. 183 p.
3. *Швидлер М. И.* Статистическая гидродинамика пористых сред. М.: Недра, 1985. 288 с.
4. *Харин А. Ю., Харина С. Б.* Гидродинамические методы исследования нефтяных скважин: учеб. пособие. Уфа: Изд-во УГНТУ, 2004. 108 с.
5. *Schiozer D. J.* Simultaneous simulation of reservoir and surface facilities, Ph.D Thesis, Stanford University, 1994. 172 с.
6. *Wong T. W. and Aziz K.* Considerations in the development of multipurpose reservoir simulation models // First and Second International Forum on Reservoir Simulation, Alpbach, Austria, 1988 and 1989. 77-208 p.
7. *Wesseling P.* Principles of computational fluid dynamics, Springer, Berlin, 2001. 644 p.
8. *Truesdell C., Noll W.* The non-linear field theories of mechanics. Springer, Berlin, 1992. 591 p.
9. *Thiele M. R.* Modeling multiphase flow in heterogeneous media using streamtubes, Ph. D. Thesis, Stanford University, Stanford, California, 1994. 203 p.

Thesis, Stanford University, Stanford, California, 1994. 203 p.

10. *Neta B.* Numerical solution of partial differential equations, Monterey, 2003. 248 p.

11. *Lomax H., Pulliam T. H. and Zingg D. W.* Fundamentals of computational fluid dynamics, 1999. 265 p.

References

1. *Juanes R.* Displacement theory and multiscale numerical modeling of three-phase flow in porous media, Ph. D. Thesis, University of California, Berkeley, California, 2003. 377 p.
2. *Horne R. N.* Modern well test analysis: a computer-aided approach. – 4th printing. Palo Alto: Petroway, 1990. 183 p.
3. *Shvidler M. I.* (1985). *Statisticheskaya gidrodinamika poristykh sred* [Statistical hydrodynamics of porous media]. Moscow: Nedra. 288 p.
4. *Kharin A. Yu., Harina S. B.* (1994). *Gidrodinamicheskie metody issledovaniya neftyanykh skvazhin* [Hydrodynamic methods of investigation of oil wells]. Ufa: UGHTU. 108 p.
5. *Schiozer D. J.* Simultaneous simulation of reservoir and surface facilities, Ph.D Thesis, Stanford University, 1994. 172 с.
6. *Wong T. W. and Aziz K.* Considerations in the development of multipurpose reservoir simulation models, in First and Second International Forum on Reservoir Simulation, Alpbach, Austria, 1988 and 1989. 77-208 p.
7. *Wesseling P.* Principles of computational fluid dynamics, Springer, Berlin, 2001. 644 p.
8. *Truesdell C., Noll W.* The non-linear field theories of mechanics. Springer, Berlin, 1992. 591 p.
9. *Thiele M. R.* Modeling multiphase flow in heterogeneous media using streamtubes, Ph. D. Thesis, Stanford University, Stanford, California, 1994. 203 p.
10. *Neta B.* Numerical solution of partial differential equations, Monterey, 2003. 248 p.
11. *Lomax H., Pulliam T. H. and Zingg D. W.* Fundamentals of computational fluid dynamics, 1999. 265 p.

Mathematical Model and Numerical Presentation of Equations for Joint Fluid Motion

S. V. Denisov, PhD in Engineering, Associate Professor, Ufa State Petroleum Technical University, Ufa, Russia
A. N. Krasnov, PhD in Engineering, Associate Professor, Ufa State Petroleum Technical University, Ufa, Russia
A. A. Shushkov, PhD in Engineering, Udmurt Federal Research Center, UB RAS, Izhevsk, Russia

A modern analysis of the hydrocarbon field development system and forecast of production dynamics under different operating conditions is carried out using mathematical models of reservoir behavior, the effective use of which requires significant computational costs. The uncertainty associated with the characteristics of the formation and its

saturating fluids lead to the need for a pre-liminary hydrodynamic study of the formation's reaction to a change in the production (injection) regime in the wells.

Mathematical modeling of multiphase flow in a porous medium, to a large extent, is still an open question. The main difficulty is related to its diverse nature. In fact, it is necessary to consider a multiphase flow as a problem with complex physics, i.e., when different processes prevail on different scales. Such complex behavior is not desirable to reduce to the creation of simplified mathematical models, which are a generalization of models that describe a single-phase flow well. This is especially true for a three-phase flow, which was traditionally modeled by the direct application of a two-phase description.

The purpose of this paper is to develop a universal approach to the creation of a software package for the hydrodynamic modeling of oil fields, which we will simply call the simulator. This method is a network approach to creating a simulator of deposits and provides a higher level of standardization than the classical method. To solve this problem, we present a mathematical model and a numerical representation of the equations for the joint movement of fluids.

Keywords: hydrodynamic modeling, multi-phase mixture, non-volatile oil.

Получено: 21.05.18