

УДК 621.0:519.873

DOI 10.22213/2410-9304-2018-3-97-102

## РАЗНОВИДНОСТЬ ФАЗОВОГО УКРУПНЕНИЯ ПОЛУМАРКОВСКИХ СИСТЕМ НА ПРИМЕРЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ СИНХРОННОЙ АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ ЛИНИИ\*

В. Я. Копп, доктор технических наук, профессор, Севастопольский государственный университет, Севастополь, Россия

М. В. Заморёнов, кандидат технических наук, доцент, Севастопольский государственный университет, Севастополь, Россия

Н. И. Чаленков, аспирант, Севастопольский государственный университет, Севастополь, Россия

*В статье рассматривается фазовое укрупнение полумарковских систем, не требующее определения стационарного распределения вложенной цепи Маркова. Под фазовым укрупнением понимается эквивалентная замена полумарковской системы с общим фазовым пространством состояний системой с дискретным пространством состояний. Нахождение стационарного распределения вложенной цепи Маркова для систем с непрерывным фазовым пространством состояний является сложной и не всегда разрешимой задачей, так как в ряде случаев приводит к решению интегральных уравнений с ядрами, содержащими сумму и разность переменных. Для таких уравнений известно только частное решение, а общих решений на настоящий день не существует. Для этой цели доказывается лемма о виде функции распределения разности двух случайных величин при условии, что первая больше вычитаемой. Показано, что вид функции распределения разности СВ при указанном условии зависит от одной константы, которая определяется численным методом решения уравнения, приводимого в лемме. Использование данного метода демонстрируется на примере моделирования автоматизированной синхронной линии со свободным циклом функционирования. Автоматизированные синхронные линии со свободным циклом функционирования находят все большее применение в машино-приборостроении как имеющие значительное преимущество по сравнению с синхронными линиями, функционирующими по жесткому циклу, а также с автоматизированными линиями с рефлекторным управлением, обеспечивающими передачу продукции при наличии опроса датчиков окончания обслуживания, установленных на каждой позиции.*

**Ключевые слова:** полумарковская система, фазовое укрупнение, аппроксимация, автоматизированная линия, стационарное распределение.

### Введение

Математический аппарат полумарковских (ПМ) процессов [1, 2] является мощным средством моделирования стохастических систем. Удобству его применения способствует алгоритм фазового укрупнения, подробно формализованный в [3]. Один из важнейших и наиболее сложных его этапов – определение стационарного распределения вложенной цепи Маркова (ВЦМ), что не всегда является разрешимой задачей. Анализ литературы [4–13] показывает, что в ряде случаев определение стационарного распределения ВЦМ приводит к необходимости решать системы интегральных уравнений, содержащих функции от сумм и разностей переменных, а единых методов решения таких задач в общем виде не существует. Имеются отдельные частные решения для некоторых конкретных задач. Сказанное значительно затрудняет использование аппарата ПМ-процессов. Если же стационарное распределение ВЦМ найдено, то можно использовать алгоритм фазового укрупнения ПМ-систем, что в данном случае не вызывает особых сложностей, хотя и требует значительных математических выкладок. При этом

ПМ-состояния на графе, содержащие непрерывную компоненту, эквивалентно заменяются укрупненными дискретными состояниями. Дальнейшее построение ПМ-модели не вызывает сложностей потому, что, во-первых, для определения стационарного распределения ВЦМ для дискретной системы требуется решать систему алгебраических уравнений, а не интегральных, а во-вторых, из [14, 15] известны методы, позволяющие получать точное решение системы уравнений марковского восстановления для дискретных случаев при условии, что к используемым функциям распределения случайных величин применимо преобразование Лапласа.

### Постановка задачи

Целью статьи является упрощение аналитических преобразований за счет предлагаемого метода аппроксимации.

Известным и широко используемым приемом фазового укрупнения полумарковских систем является прием, основанный на использовании формулы для определения функции распределения (ФР) разности двух случайных величин (СВ) при условии, что первая больше вычитаемой [16]. Так, например, при вычитании СВ  $\beta$

© Копп В. Я., Заморёнов М. В., Чаленков Н. И., 2018

\*Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства образования и науки Российской Федерации (№ 1.10513.2018/11.12) при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 18-01-00392а).

из СВ  $\alpha$  при условии, что  $\alpha > \beta$ , эта разность обозначается  $\gamma = [\alpha - \beta]^+$ , а ее ФР  $F_\gamma(t)$  имеет вид

$$F_\gamma(t) = \frac{\int_0^\infty [F_1(t+y) - F_1(y)] dF_2(y)}{\int_0^\infty \bar{F}_1(t) dF_2(t)}, \quad (1)$$

где  $F_1(t)$  и  $F_2(t)$  ФР СВ  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно.

Сложность заключается в том, что иногда приходится применять эту формулу несколько раз, причем СВ ФР, разности которых определяются сами, являются разностями других СВ при указанном условии.

В качестве примера приведем модель синхронной автоматизированной линии (САЛ) со свободным ритмом функционирования. В САЛ такого типа продукция от ячейки к ячейке перемещается по мере возможности. Модель такой линии рассмотрена в [17].

В данной работе построена модель многофазной системы на основе следующего подхода, заключающегося в моделировании прохождения двух заявок: сначала первой и второй, затем второй и третьей и т. д. Такой подход позволяет моделировать многофазную САЛ со свободным ритмом не только в стационарном режиме, но и в переходном.

Сначала строится модель для трехфазной САЛ. Далее на ее основе для стационарного и переходного режимов строится модель многофазной САЛ с произвольным числом фаз.

Процесс функционирования трехфазной САЛ рассмотрен ниже.

САЛ функционирует следующим образом: происходит последовательное обслуживание изделия сначала на первой технологической ячейке (ТЯ<sub>1</sub>), затем на второй (ТЯ<sub>2</sub>), а затем на третьей (ТЯ<sub>3</sub>). Передача изделия, обслуженного на предыдущей ячейке к последующей, происходит сразу при наличии свободной последующей ячейки.

Времена обслуживания изделия на ТЯ<sub>*i*</sub>, ( $i = \overline{1,3}$ ) – СВ  $\alpha_i$  с функциями распределения (ФР)  $F_i(t)$  общего вида. Они являются исходными данными для моделирования. В общем случае ФР времен обслуживания различных заявок на одних и тех же ячейках могут отличаться.

Допущения:

1. СВ  $\alpha_i$  предполагаются независимыми, имеющими конечные математические ожидания и дисперсии; у ФР  $F_i(t)$  существуют плотности  $f_i(t)$ .

2. Продукция на вход СЛ постоянно поступает, с выхода постоянно удаляется, а передача изделия от ячейки к ячейке происходит мгновенно.

Требуется определить ФР и математическое ожидание времени обслуживания изделий на САЛ, а также ее производительность.

Граф состояний для такой системы представлен на рис. 1.

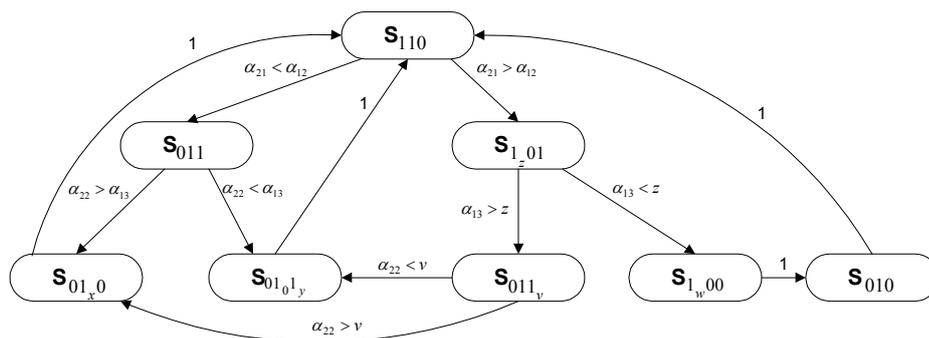


Рис. 1. Граф состояний трехфазной системы

Состояния на графе следующие:

$S_{110}$  – 1-я заявка начала обслуживаться на 2-й ячейке, а 2-я на 1-й ячейке;

$S_{011}$  – при условии ( $\alpha_{21} < \alpha_{12}$ ) 1-я заявка начала обслуживаться на 3-й ячейке, а 2-я на 2-й;

$S_{01_x0}$  – 1-я заявка закончила обслуживание на 3-й ячейке, а до конца обслуживания 2-й заявки на 2-й ячейке осталось время  $x$ ;

$S_{001_y}$  – 2-я заявка закончила обслуживание на 2-й ячейке, а до конца обслуживания 1-й заявки на 3-ей ячейке осталось время  $y$ ;

$S_{1z01}$  – 1-я заявка закончила обслуживаться на 2-й ячейке и началось ее обслуживание на 3-й, а 2-я заявка еще обслуживается на 1-й ячейке (остаточное время  $z$ );

$S_{1w00}$  – 1-я заявка закончила обслуживаться на 3-й ячейке, а 2-я заявка еще обслуживается на 1-й (остаточное время  $w$ );

$S_{010}$  – 2-я заявка начала обслуживание на 2-й ячейке, а 1-я заявка окончила обслуживаться на 3-й;

$S_{011v}$  – 1-я заявка еще обслуживается на 3-й ячейке (остаточное время  $v$ ), а вторая заявка закончила обслуживание на 1-й и начала на 2-й.

Имеем два подмножества:

$$E_+ = (S_{011}, S_{01x0}, S_{01v}, S_{011v}, S_{010});$$

$$E_- = (S_{110}, S_{1z01}, S_{1w00}).$$

Подмножество

$$E_+ = (S_{011}, S_{01x0}, S_{01v}, S_{011v}, S_{010})$$

соответствует состояниям, в которых 2-я заявка обслуживается на 2-й ячейке. Необходимо определить ФР времени пребывания системы в подмножестве состояний  $E_+$ .

Определяем ФР времени пребывания в состоянии  $S_{1z01}$ , которое равно  $\theta_{1z01} = (z \wedge \alpha_{13})$ , где  $\wedge$  – обозначение минимума двух СВ.

Тогда

$$\bar{F}_{1z01}(t) = \bar{F}_z(t) \bar{F}_{13}(t),$$

где

$$F_z(t) = \frac{\int_0^\infty [F_{21}(t+y) - F_{21}(y)] f_{12}(y) dy}{\int_0^\infty [1 - F_{21}(y)] f_{12}(y) dy}. \quad (2)$$

$F_z(t)$  является ФР СВ  $z = [\alpha_{21} - \alpha_{12}]^+$ , о которой сказано выше.

Попадание в состояние  $S_{011v}$  из состояния  $S_{110}$  с вероятностью  $P(\alpha_{21} > \alpha_{12}) \cdot P(\alpha_{13} > z)$  обеспечивает функцию распределения времени  $\theta_{011v} = (\alpha_{22} \wedge v)$  пребывания в этом состоянии,

причем  $v = [\alpha_{13} - z]^+ = \left\{ \alpha_{13} - [\alpha_{21} - \alpha_{12}]^+ \right\}^+$ . Тогда

$$\bar{F}_{011v}(t) = \bar{F}_v(t) \bar{F}_{22}(t),$$

где

$$F_v(t) = \frac{\int_0^\infty [F_{13}(t+y) - F_{13}(y)] f_{1z01}(y) dy}{\int_0^\infty [1 - F_{13}(y)] f_{1z01}(y) dy}, \quad (3)$$

Попадание в состояние  $S_{1w00}$  из состояния  $S_{110}$  с вероятностью  $P(\alpha_{21} > \alpha_{12}) \cdot P(\alpha_{13} < z)$  обеспечивает функцию распределения времени  $\theta_{1w00} = w$  пребывания в этом состоянии, причем

$$w = [z - \alpha_{13}]^+ = \left\{ [\alpha_{21} - \alpha_{12}]^+ - \alpha_{13} \right\}^+.$$

Тогда

$$F_{1w00}(t) = \frac{\int_0^\infty [F_{1z01}(t+y) - F_{1z01}(y)] f_{13}(y) dy}{\int_0^\infty [1 - F_{1z01}(y)] f_{13}(y) dy}. \quad (4)$$

Теперь можно записать выражение для ФР времени обслуживания 2-й заявки на 2-й ячейке с учетом блокировки 1-й –  $\psi_{22}(t)$ :

$$\psi_{22}(t) = P_{110}^{011} \cdot \varphi_{011}(t) + P_{110}^{1z01} \cdot [P\{\alpha_{13} > z\} \varphi_{011v} + P\{z > \alpha_{13}\} \varphi_{1w00}], \quad (5)$$

где  $P_{110}^{011}$ ,  $P_{110}^{1z01}$ ,  $\varphi_{011}(t)$ ,  $\varphi_{011v}(t)$ ,  $\varphi_{1w00}(t)$  найдены в [18].

Следует отметить, что использование формул (2)–(4) в составе (5) приводит к крайне громоздким выражениям, в значительной степени затрудняющим расчеты.

#### Решение задачи

В статье предлагается метод аппроксимации выражения (1) с произвольной степенью точности, позволяющий использовать его многократно с незначительными сложностями.

Остановимся подробнее на формуле (1). Она представляет собой смесь [19]. В этой формуле выражение

$$\frac{[F_1(t+y) - F_1(y)]}{\int_0^\infty \bar{F}_1(t) f_2(t) dt}$$

представляет собой зависящее от действительного параметра  $y > 0$  семейство функций распределения, а  $F_2(y)$  – весовую функцию.

Выберем в качестве весовой функции единичный скачок. Для этого примем

$$F_2(y) = 1_x(y) = \begin{cases} 1, & y > x; \\ 0, & y \leq x. \end{cases}$$

При этом плотность распределения (ПР) равна

$$f_2(y) = \delta(y - x),$$

где  $\delta(y - x)$  – дельта-функция.

Подставив последнее выражение в (1), получим

$$F_\gamma(t, x) = \frac{\int_0^\infty F_1(t+y)\delta(y-x)dy - \int_0^\infty F_1(y)\delta(y-x)dy}{\int_0^\infty \bar{F}_1(y)\delta(y-x)dy} = \frac{F_1(t+x) - F_1(x)}{\bar{F}_1(x)} = F_B(t, x). \quad (6)$$

Отметим, что выражение (6) совпадает с выражением для функции распределения разности  $\alpha - x$ , где  $x$  – константа, для которой выполняется условие  $x < t$  [20]. Указанное выражение иногда называют «время вперед». Обозначим его  $F_B(t, x) = F_1(t, x_B)$ .

Сформулируем и докажем следующую лемму об аппроксимации функции распределения времени разности двух СВ ( $\alpha - \beta$ ) при условии, что  $(\alpha > \beta)$ .

*Лемма.* Функция  $F_\gamma(t)$  распределения времени разности двух СВ ( $\alpha - \beta$ ) с функциями распределения  $F_1(t)$  и  $F_2(t)$  соответственно, при условии, что  $(\alpha > \beta)$ , определяемая выражением

$$F_\gamma(t) = \frac{\int_0^\infty F_1(t+y)f_2(y)dy - \int_0^\infty F_1(y)f_2(y)dy}{\int_0^\infty \bar{F}_1(y)f_2(y)dy},$$

с учетом того, что

$$F_2(t) = 1_x(t) = \begin{cases} 1, & t \geq x_B; \\ 0, & t < x_B, \end{cases}$$

имеет вид

$$F_\gamma(t, x) = \frac{F_1(t+x_B) - F_1(x_B)}{\bar{F}_1(x_B)},$$

где значение параметра  $x_B$  выбирается из равенства.

$$\frac{\int_0^\infty [F_1(t+y) - F_1(y)]f_2(y)dy}{\int_0^\infty \bar{F}_1(y)f_2(y)dy} = \frac{F_1(t+x_B) - F_1(x_B)}{\bar{F}_1(x_B)}. \quad (7)$$

**Доказательство.**

Запишем правую и левую части (7) через вероятностные соотношения.

Для правой части (7):

$$F(t, x) = P\{\alpha - x \leq t / \alpha > x_B\} = \frac{P\{x < \alpha \leq t + x_B\}}{P\{\alpha > x_B\}} = \frac{P\{\alpha - x_B \leq t\} - P\{\alpha < x_B\}}{P\{\alpha > x_B\}}. \quad (8)$$

Для левой части (7):

$$\frac{[P\{\alpha - \beta \leq t\} - P\{\alpha < \beta\}]}{P\{\alpha > \beta\}}. \quad (9)$$

Рассмотрим числители (8) и (9), то есть выражения  $P\{\alpha - \beta \leq t\} - P\{\alpha < \beta\}$  и  $P\{\alpha - x_B \leq t\} - P\{\alpha < x_B\}$ .

Так как  $0 \leq x \leq \infty$ , то всегда существует такое  $x_B$ , при котором выполняется равенство:

$$P\{\alpha - \beta \leq t\} = P\{\alpha - x_B \leq t\}.$$

Но если это так, то

$$P\{\alpha \leq t + \beta\} = P\{\alpha \leq t + x_B\}$$

и, следовательно,

$$P\{\alpha < \beta\} = P\{\alpha < x_B\}.$$

Откуда получаем:

$$\frac{[P\{\alpha - \beta\} - P\{\alpha < \beta\}] < t}{P\{\alpha > \beta\}} = \frac{P\{x < \alpha - x_B \leq t\}}{P\{\alpha > x_B\}}. \quad (10)$$

Из выражения (10) вытекает равенство

$$F_\gamma(y) = \frac{\int_0^\infty [F_1(t+y) - F_1(y)]f_2(y)dy}{\int_0^\infty \bar{F}_1(y)f_2(y)dy} = \frac{F_1(t+x_B) - F_1(x_B)}{\bar{F}_1(x_B)},$$

$$F_\gamma(y) = F_1(t, x_B).$$

Лемма доказана.

**Пример**

Приведем пример аппроксимации функции  $F_\gamma(t)$  функцией  $F_1(t, x_B)$ . Функция  $F_1(t)$  является функцией распределения обобщенного закона Эрланга четвертого порядка с параметрами  $\lambda_1 = 0,5$ ,  $\lambda_2 = 2$ ,  $\lambda_3 = 1,9$  и  $\lambda_4 = 3,2$ , а функция  $F_2(t)$  имеет функцию распределения обобщенного закона Эрланга второго порядка с параметрами  $\beta_1 = 1,9$ ,  $\beta_2 = 3,2$ . Плотность распреде-

ления  $f^{(n)}(t)$  обобщенного закона Эрланга  $n$ -го порядка имеет вид

$$f^{(n)}(t) = (-1)^{n-1} \prod_{i=1}^n \lambda_i \sum_{j=1}^n \frac{e^{-\lambda_j t}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (\lambda_j - \lambda_k)} (t > 0),$$

где  $\lambda_i (i = \overline{1, n})$  – параметры обобщенного закона Эрланга  $n$ -го порядка.

Применяя формулу (7) при различных  $x_b$ , т. е.  $x_{b1} = 0$ ,  $x_{b2} = 0,667763158$  и  $x_{b3} = 5$ , получим следующие результаты моделирования. Математические ожидания функций  $F_1(t, x_{b1})$ ,  $F_1(t, x_{b2})$ ,  $F_\gamma(t)$  и  $F_1(t, x_{b3})$  соответственно равны  $m_{x_{b1}} = 3,338815793$ ,  $m_{x_{b2}} = m_\gamma = 2,726304253$  и  $m_{x_{b3}} = 2,004498414$ .

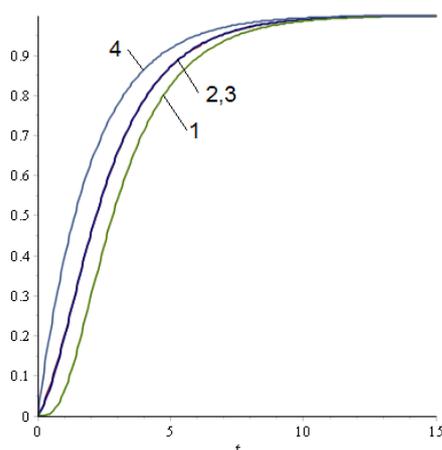


Рис. 2. Результаты моделирования: кривая 1 – функция  $F_1(t, x_{b1})$  при  $x_{b1} = 0$ ; кривые 2, 3 – соответственно функция  $F_1(t, x_{b2})$  при  $x_{b2} = 0,667763158$  и  $F_\gamma(x)$ ; кривая 4 – функция  $F_1(t, x_{b3})$  при  $x_{b3} = 5$

Как видно из рис. 2, при  $m_{x_{b2}} = m_\gamma = 2,726304253$  кривые 2, 3 полностью совпадают, что подтверждает правильность доказанной леммы, а следовательно, и выражения (7).

### Заключение

Предложенная модель позволяет рассчитывать производительность САЛ не только в стационарных, но и в переходных режимах, что особенно важно при мелких партиях и частой смене продукции в гибких производственных системах. В дальнейших исследованиях предполагается использовать доказанную лемму для создания метода фазового укрупнения нерегенерирующих систем, исключающего необходимость определять стационарное распределение ВЦМ для ПМ-систем с общим пространством состояний.

### Библиографические ссылки

1. Королюк В. С. Стохастические модели систем / отв. ред. А. Ф. Турбин. Киев : Наук. думка, 1989. 208с.
2. Королюк В. С., Турбин А. Ф. Процессы марковского восстановления в задачах надежности систем. Киев : Наук. думка, 1982. 236 с.
3. Там же.
4. Ushakov I. A. Probabilistic Reliability Models (Wiley, 2012).
5. Yao D. D., Buzacott J. A. Flexible Manufacturing Systems: A Review of Analytical Models, Management Science, 32 (1986) 890-905.
6. MacGregor Smith J., Tan B. (Eds.) Handbook of Stochastic Models and Analysis of Manufacturing System Operations (Springer-Verlag New York, 2013).
7. Curry G. L., Feldman R. M. Manufacturing Systems Modeling and Analysis, 2nd Edition (Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011), p. 338.
8. Limnios N., Nikulin M. Recent Advances in Reliability Theory: Methodology, Practice, and Inference, eds. N. Limnios, M. Nikulin (Springer Science+Business Media, New York, 2000), p. 514.
9. Limnios N., Oprisan G. Semi-Markov Processes and Reliability (Springer Science+Business Media, New York, 2001).
10. Jansen J., Limnios N. (Eds.) Semi-Markov Models and Applications (Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 1999).
11. Korolyuk V. S., Swishchuk A. Semi-Markov Random Evolutions (Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, Boston, London, 1995).
12. Korolyuk V. S., Limnios N. Stochastic Systems in Merging Phase Space (World Scientific, Imperial College Press, 2005).
13. Silvestrov D., Silvestrov S. Nonlinearly Perturbed Semi-Markov Processes (Springer, Cham, 2017), 143 p.
14. Zamoryonov M. V., Kopp V. Ya., Chengar O. V., Rapatskiy Yu. L. Simulation of a single-component system using the trajectories method taking into account the scheduling preventive maintenance. Cybernetics and Mathematics Applications in Intelligent Systems Proceedings of the 6th Computer Science On-line Conference 2017 (CSOC2017), vol 2 / Springer International Publishing Switzerland 2017. – P. 264-271
15. Загорёнов М. В., Копп В. Я., Загорёнова Д. В., Скидан А. А. Моделирование процесса функционирования обслуживающего устройства с необесцениваемыми отказами методом путей // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. Вып. 7: в 2 ч. Ч. 1. Тула : Изд-во ТулГУ, 2016. С. 71–82.
16. Королюк В. С., Турбин А. Ф. Фазовое укрупнение сложных систем. Киев : Вища шк., 1978. 112 с.
17. Копп В. Я. Моделирование автоматизированных производственных систем : монография. Севастополь : СевНТУ, 2012. 700 с.
18. Там же.
19. Байхельт Ф., Франкен П. Надежность и техническое обслуживание. Математический подход / пер. с нем. М. : Радио и связь, 1988. 392 с.

20. *Konn B. Ya.* Моделирование автоматизированных производственных систем : монография. Севастополь : СевНТУ, 2012. 700 с.

### References

1. Korolyuk V. S. *Stokhasticheskie modeli system* [Stochastic models of systems]. (eds. A.F. Turbin). Kiev, Nauk. dumka. Publ., 1989, 208 p. (in Russ.)

2. Korolyuk V. S., Turbin A. F. *Processy markovskogo vosstanovleniya v zadachah nadezhnosti system* [Markov recovery processes in system reliability problems]. Kiev, Nauk. dumka Publ., 1982, 236 p. (in Russ.)

3. Ibid.

4. Ushakov I. A. Probabilistic Reliability Models (Wiley, 2012).

5. Yao D. D., Buzacott J. A. Flexible Manufacturing Systems: A Review of Analytical Models, Management Science, 32 (1986) 890-905.

7. MacGregor Smith J., Tan B. (Eds.), Handbook of Stochastic Models and Analysis of Manufacturing System Operations (Springer-Verlag New York, 2013).

8. Curry G. L., Feldman R. M. Manufacturing Systems Modeling and Analysis, 2nd Edition (Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011), p. 338.

9. Limnios N., Nikulin M. Recent Advances in Reliability Theory: Methodology, Practice, and Inference, eds. N. Limnios, M. Nikulin (Springer Science+Business Media, New York, 2000), p. 514.

10. Limnios N., Oprisan G. Semi-Markov Processes and Reliability (Springer Science+Business Media, New York, 2001).

11. Jansen J., Limnios N. (Eds.), Semi-Markov Models and Applications (Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 1999).

12. Korolyuk V. S., Swishchuk A. Semi-Markov Random Evolutions (Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, Boston, London, 1995).

13. Korolyuk V. S., Limnios N. Stochastic Systems in Merging Phase Space (World Scientific, Imperial College Press, 2005).

14. Silvestrov D., Silvestrov S. Nonlinearly Perturbed Semi-Markov Processes (Springer, Cham, 2017), 143 p.

15. Zamoryonov M. V., Kopp V. Ya., Chengar O. V., Rapatskiy Yu. L. Simulation of a single-component system using the trajectories method taking into account the scheduling preventive maintenance. Cybernetics and Mathematics Applications in Intelligent Systems Proceedings of the 6th Computer Science On-line Conference 2017 (CSOC2017), Vol 2 / Springer International Publishing Switzerland 2017. – P. 264-271

16. Zamoryonov M. V., Kopp V. Ya., Zamoryonova D. V., Skidan A. A. [Simulation of the process of functioning of the service device with non-estimated failures by the method of paths]. Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki. Vol. 7, no. 2. CH. 1. Tula, TulGU Publ., 2016, pp. 71-82.

15. Korolyuk V. S., Turbin A. F. *Fazovoe ukрупnenie slozhnyh sistem* [Phase integration of complex systems]. Kiev, Vishcha shkola Publ., 1978, 112 p. (in Russ.)

17. Kopp V. Ya. *Modelirovanie avtomatizirovannyh proizvodstvennyh system* [Modeling of automated production systems]. Sevastopol, SevNTU Publ., 2012, 700 p. (in Russ.)

18. Ibid.

19. Bajhel't F., Franken P. *Nadezhnost' i tekhnicheskoe obsluzhivanie. Matematicheskij podhod*. [Reliability and maintenance. Mathematical approach]. Moscow, Radio i svyaz' Publ., 1988, 392 p. (in Russ.)

20. Kopp V. Ya. *Modelirovanie avtomatizirovannyh proizvodstvennyh system* [Modeling of automated production systems]. Sevastopol, SevNTU Publ., 2012, 700 p. (in Russ.)

\*\*\*

### A Kind of Phase Enlargement of Semi-Markov Systems on the Example of Modeling a Synchronous Automated Line

*V. Ya. Kopp*, DSc in Engineering, Professor, Sevastopol State University

*M. V. Zamorenov*, PhD in Engineering, Associate Professor, Sevastopol State University

*N. I. Chalenkov*, Post-graduate, Sevastopol State University

*The paper deals with the phase enlargement of semi-Markov systems that does not require the definition of the stationary distribution of the embedded Markov chain. Phase enlargement is the equivalent replacement of a semi-Markov system with a common phase space of states by a system with a discrete state space. The determination of the stationary distribution of the embedded Markov chain for systems with a continuous phase space of states is a complex and not always solvable problem, since in a number of cases it leads to the solution of integral equations with kernels containing the sum and difference of variables. For such equations only a particular solution is known, but there are no general solutions for the present day. For this purpose, we prove a lemma on the form of the distribution function of the difference of two random variables, provided that the first is greater than the subtrahend. It is shown that the form of the distribution function of the difference RV under this condition depends on one constant, which is determined by the numerical method for solving the equation given in the lemma. The use of this method is demonstrated using the example of simulation of an automated synchronous line with a free cycle of operation. Automated synchronous lines with a free operation cycle are increasingly used in machine-tool construction as having a significant advantage in comparison with synchronous lines operating in a rigid cycle, as well as with automated lines with a reflex control that ensure the transfer of products in the presence of polling of end-of-service sensors installed at each position.*

**Keywords:** semi-Markov system, phase enlargement, approximation, automated line, stationary distribution.