УДК 621.372
DOI 10.22213/2410-9304-2019-1-78-87

ГОРИЗОНТАЛЬНАЯ СКОЛЬЗЯЩАЯ ПРОСТРАНСТВЕННО-ЧАСТОТНАЯ ОБРАБОТКА ДВУМЕРНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ СИГНАЛОВ

О. В. Пономарева, доктор технических наук, профессор, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова, Ижевск, Россия

Предложен метод обработки двумерных дискретных сигналов в пространственно-частотной области – метод горизонтально скользящего двумерного дискретного преобразования Фурье. Рассмотрен математический аппарат прямого двумерного дискретного преобразования Фурье в алгебраической и матричной форме. Рассмотрены этапы выполнения двумерного дискретного преобразования Фурье с помощью одномерного быстрого преобразования Фурье. Разработан эффективный метод и алгоритм горизонтально скользящего двумерного дискретного преобразования Фурье, который позволяет вычислять коэффициенты данного преобразования в реальном масштабе времени. Проведена оценка эффективности алгоритма горизонтально скользящего двумерного дискретного преобразования Фурье с точки зрения вычислительных затрат в сравнении с известными алгоритмами. В результате экспериментальных исследований на модельных двумерных дискретных сигналах доказана обоснованность, эффективность и достоверность предложенного метода и алгоритма горизонтально скользящего двумерного дискретного преобразования Фурье. Проведено сравнении разработанного метода горизонтально скользящего двумерного дискретного преобразования Фурье с со стандартным методом получения коэффициентов двумерного дискретного преобразования с точки зрения вычислительных затрат. Построены поверхности относительной экономии вычислений в разработанном алгоритме в сравнении со стандартным алгоритмом горизонтально скользящей обработки двумерных дискретных сигналов.

Ключевые слова: двумерный дискретный сигнал, двумерное дискретное преобразование Фурье, пространственная область, пространственно-частотный спектр, пространственно-частотная обработка.

Введение

Трудно переоценить роль и место методов цифровой обработки дискретных двумерных сигналов, которое они занимают в различных областях научных исследований. Эти методы имеют самое широкое применение в таких предметных областях, как медицинская радиология, биологические и астрономические исследования, компьютерная томография, ангиография, контроль и техническая диагностика в промышленности, лазерная техника, контроль дорожного движения, дистанционное зондирование земной поверхности, экологический мониторинг, метеорология, криминалистика, геологическая разведка полезных ископаемых, пассивная и активная гидролокация, морская геология, сейсмология, акустика, психоакустика, музыкальная акустика, трансмиссионная и сканирующая электронная микроскопия, физика высокотемпературной плазмы, построение 3D-моделей сложных прикладных объектов, компьютерная графика. Отметим, что данный вид сигналов, во-первых, относится к информационным, поскольку содержит информацию о свойствах, состояниях и характеристиках исследуемых сложных технических систем, и, во-вторых, в силу своей специфики требуют разработки новых и совершенствования существующих методов их двумерной спектральной обработки.

Классическим методом пространственно-частотной обработки двумерных дискретных сигналов является двумерное дискретное преобразование Фурье, позволяющее получать двумерный пространственно-частотный спектр. В то же время имеется ряд приложений [1–28], где необходимо находить значения двумерного пространственно-частотного спектра не на всех пространственных частотах, а на их подмножестве. В этом случае применение полного варианта двумерного дискретного преобразования Фурье даже на основе быстрого преобразования Фурье становится малоэффективным, поскольку большая часть полученных коэффициентов двумерного дискретного преобразования Фурье не используется.

Целью данной работы является разработка методов и алгоритмов горизонтальной скользящей пространственно-частотной обработки двумерных дискретных сигналов на основе двумерного дискретного преобразования Фурье.

Основные положения

Пусть задан дискретный двумерный комплексный сигнал $x(n_1, n_2)$ в виде двумерной комплексной последовательности конечной длины (т. е. при $0 \le n_1 \le (N_1 - 1)$ и $0 \le n_2 \le (N_2 - 1)$) в прямоугольной опорной области (конкретно на плоскости).

Прямое двумерное дискретное преобразование Фурье (ПДДПФ) двумерного сигнала $x(n_1, n_2)$, которое представляет собой частный случай прямого двумерного *z*-преобразования

$$S_{N_1,N_2}(k_1,k_2) = X(z_1,z_2)\ \Big|_{z_1=W_{N_1}^{k_1},\ z_2=W_{N_2}^{k_2}}, \qquad (1)$$

может быть описано в алгебраической и в матричной форме.

Алгебраическая форма:

$$S_{N_1,N_2}(k_1,k_2)=\frac{1}{N_1\cdot N_2}\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}x(n_1,n_2)\ \exp\left[-j2\pi\left(\frac{k_1 n_1}{N_1}+\frac{k_2 n_2}{N_2}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{N_1\cdot N_2}\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}x(n_1,n_2)\ \cdot W_{N_1}^{k_1 n_1}\cdot W_{N_2}^{k_2 n_2}\,, \qquad (2)$$

где $k_1=\overline{0,(N_1-1)}$, $k_2=\overline{0,(N_2-1)}$ – пространственные частоты; $x(n_1,n_2)$ – двумерный сигнал, $n_1=\overline{0,N_1-1,}$ $n_2=\overline{0,N_2-1,}$; $W_{N_1}^{k_1 n_1}=$ $=\exp(-j\frac{2\pi}{N_1}(k_1 n_1))$; $W_{N_2}^{k_2 n_2}=\exp(-j\frac{2\pi}{N_2}(k_2 n_2))$; $S_{N_1,N_2}(k_1,k_2)$ – коэффициенты (бины) ДДПФ (двумерный векторный пространственно-частотный спектр).

Матричная форма:

$$S_{N_1\times N_2}=\frac{1}{N_1\cdot N_2}F^{(2)}_{N_1\times N_1}\cdot X_{N_1\times N_2}\cdot F^{(1)}_{N_2\times N_2}\,, \qquad (3)$$

где

$$X_{N_1\times N_2}=\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc}0 & 1 & . & . & (N_2-1)\end{array}\ \ n_2 \\ \begin{array}{c}0\\1\\.\\.\\(N_1-1)\\ n_1\end{array} & \begin{bmatrix} x(0,0) & x(0,1) & . & . & x(0,N_2-1)\\ x(1,0) & x(1,1) & . & . & x(1,N_2-1)\\ . & . & . & . & .\\ . & . & . & . & .\\ x(N_1-1,0) & x(N_1-1,1) & . & . & x(N_1-1,N_2-1)\end{bmatrix}\end{array}; \qquad (4)$$

$$F^{(1)}_{N_2\times N_2}=\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc}0 & 1 & . & . & (N_2-1)\end{array}\ \ k_2 \\ \begin{array}{c}0\\1\\.\\.\\(N_2-1)\\ n_2\end{array} & \begin{bmatrix} W_{N_2}^{0\cdot 0} & W_{N_2}^{0\cdot 1} & . & . & W_{N_2}^{0\cdot(N_2-1)}\\ W_{N_2}^{1\cdot 0} & W_{N_2}^{1\cdot 1} & . & . & W_{N_2}^{1\cdot(N_2-1)}\\ . & . & . & . & .\\ . & . & . & . & .\\ W_{N_2}^{(N_2-1)\cdot 0} & W_{N_2}^{(N_2-1)\cdot 1} & . & . & W_{N_2}^{(N_2-1)\cdot(N_2-1)}\end{bmatrix}\end{array}; \qquad (5)$$

$$F^{(2)}_{N_1\times N_1}=\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc}0 & 1 & . & . & (N_1-1)\end{array}\ \ n_1 \\ \begin{array}{c}0\\1\\.\\.\\(N_1-1)\\ k_1\end{array} & \begin{bmatrix} W_{N_1}^{0\cdot 0} & W_{N_1}^{0\cdot 1} & . & . & W_{N_1}^{0\cdot(N_2-1)}\\ W_{N_1}^{1\cdot 0} & W_{N_1}^{1\cdot 1} & . & . & W_{N_1}^{1\cdot(N_2-1)}\\ . & . & . & . & .\\ . & . & . & . & .\\ W_{N_1}^{(N_1-1)\cdot 0} & W_{N_1}^{(N_1-1)\cdot 1} & . & . & W_{N_1}^{(N_1-1)\cdot(N_1-1)}\end{bmatrix}\end{array}. \qquad (6)$$

Как известно, ядро ПДДПФ (2) разделимо, что позволяет выполнить ПДДПФ в два этапа.

Этап первый. Представим $S_{N_1,N_2}(k_1,k_2)$ в следующем виде:

$$S_{N_1,N_2}(k_1,k_2)=$$

$$=\frac{1}{N_1\cdot N_2}\sum_{n_1=0}^{N_1-1}W_{N_1}^{k_1 n_1}\Big[\sum_{n_2}^{N_2-1}x(n_1,n_2)\ W_{N_2}^{k_2 n_2}\Big].$$

При изменении $n_1=\overline{0,(N-1)}$ выражение в квадратных скобках есть не что иное, как N_1 одномерных ДПФ. Обозначим результат выполнения каждого из N_1 одномерных ДПФ как

$$S_{N_2}(n_1,k_2)=\frac{1}{N_2}\sum_{n_2=0}^{N_2-1} x(n_1,n_2)\,W_{N_2}^{k_2 n_2},$$

$$n_1=\overline{0,\left(N_1-1\right)}. \tag{7}$$

Этап второй. Используя результаты, полученные на первом этапе, представим $S_{N_1,N_2}(k_1,k_2)$ в следующем виде:

$$S_{N_1,N_2}(k_1,k_2)=\frac{1}{N_1}\sum_{n_1=0}^{N_1-1} W_{N_1}^{k_1 n_1}\, S_{N_2}(n_1,k_2),$$

$$k_2=\overline{0,\left(N_2-1\right)}. \tag{8}$$

Выражение (8) тоже есть не что иное, как N_2 одномерных ДПФ, выполнив которые, мы получаем искомый результат – двумерный векторный пространственно-частотный спектр $S_{N_1,N_2}(k_1,k_2)$.

Таким образом, для получения $S_{N_1,N_2}(k_1,k_2)$ $k_1=\overline{0,(N_1-1)}$, $k_2=\overline{0,(N_2-1)}$ необходимо выполнить $N_1\cdot N_2$ одномерных ДПФ. Отметим, что при вычислении одномерных ДПФ может быть эффективно использованы алгоритмы быстрого преобразования Фурье – БПФ.

Рассмотрим пространственно-частотную обработку двумерных дискретных сигналов в горизонтально скользящем пространственном окне анализа. На рис. 1 приведен пример горизонтального сдвига пространственного окна анализа.

Рассмотрим предпосылки для разработки методов скользящей пространственно-частотной обработки двумерных дискретных сигналов на основе двумерного дискретного преобразования Фурье. Для этого обратимся к матричной форме ДДПФ (3) и соотношениям (7)–(9).

ПРОСТРАНСТВЕННОЕ ОКНО 3 x 3, НУЛЕВОЙ СДВИГ

$x(0,0)$	$x(0,1)$	$x(0,2)$	$x(0,3)$	$x(0,4)$
$x(1,0)$	$x(1,1)$	$x(1,2)$	$x(1,3)$	$x(1,4)$
$x(2,0)$	$x(2,1)$	$x(2,2)$	$x(2,3)$	$x(2,4)$
$x(3,0)$	$x(3,1)$	$x(3,2)$	$x(3,3)$	$x(3,4)$
$x(4,0)$	$x(4,1)$	$x(4,2)$	$x(4,3)$	$x(4,4)$

а

ПРОСТРАНСТВЕННОЕ ОКНО 3 x 3, СДВИГ ГС $^+$

$x(0,0)$	$x(0,1)$	$x(0,2)$	$x(0,3)$	$x(0,4)$
$x(1,0)$	$x(1,1)$	$x(1,2)$	$x(1,3)$	$x(1,4)$
$x(2,0)$	$x(2,1)$	$x(2,2)$	$x(2,3)$	$x(2,4)$
$x(3,0)$	$x(3,1)$	$x(3,2)$	$x(3,3)$	$x(3,4)$
$x(4,0)$	$x(4,1)$	$x(4,2)$	$x(4,3)$	$x(4,4)$

б

Рис. 1. Пример горизонтального скольжения дискретного пространственного окна анализа 3×3 по двумерному дискретному сигналу: *а* – нулевой сдвиг; *б* – сдвиг ГС$^+$ на один отсчет

Пусть нам необходимо найти коэффициент (бин) двумерного дискретного преобразования $S_{N_1,N_2}(k_1 k_2)$ на пространственной частоте (k_1,k_2) по отсчетам входного сигнала $x(n_1,n_2)$. В этом случае матричное уравнение (3) преобразуется к виду

$$S(k_1,k_2)=[W_{N_1}^{k_1\cdot 0},W_{N_1}^{k_1\cdot 1},\ldots W_{N_1}^{k_1\cdot(N_1-1)}]\times$$

$$\times X_{N_1\times N_2}\cdot\begin{bmatrix} W_{N_2}^{0\cdot k_2} \\ W_{N_2}^{1\cdot k_2} \\ . \\ . \\ W_{N_2}^{(N_2-1)\cdot k_2}\end{bmatrix}. \tag{9}$$

На первом этапе согласно выражению (9) проводим умножение базисной функции частоты k_2 и длительностью N_2 на матрицу дискретного двумерного сигнала $x(n_1,n_2)$. В результате получаем столбцевую матрицу $S_{N_2}(n_1,k_2)$ размером N_1, затратив на эту процедуру $N_2\cdot N_1$ комплексных умножений и $(N_2-1)\cdot N_1$ комплексных сложений. Далее, на втором этапе осуществляем умножение базисной функции частоты k_1 и длительностью N_1 на столбцевую матрицу размером N_1, полученную на первом этапе, затратив на эту процедуру N_1 комплексных умножений и (N_1-1) комплексных сложений.

Таким образом, на получение одного коэффициента двумерного дискретного преобразования $S_{N_1,N_2}(k_1 k_2)$ на пространственной частоте (k_1,k_2) необходимо затратить $N_2\cdot(N_1+1)$ комплексных умножений и $(N_2-1)\cdot(N_1+1)$ комплексных сложений. Учитывая, что выполнение одного комплексного умножения требует четырех действительных умножений и двух действительных сложений, а одно комплексное сложение двух действительных сложений, то на получение значения одного коэффициента двумерного дискретного преобразования $S_{N_1,N_2}(k_1 k_2)$ необходимо затратить $4 \cdot N_1 \cdot (N_2+1)$ действительных умножений и $4 \cdot N_1 N_2$ действительных сложений.

Отметим, что этот объем вычислений необходимо выполнять при каждом сдвиге двумерного пространственного окна анализа по двумерному сигналу $x(n_1,n_2)$ (рис. 1). В то же время из рис. 1 нетрудно видеть, что при любом виде сдвига двумерного сигнала $x(n_1,n_2)$ большое число значений комплексной матрицы $X_{N_1 \times N_2}$ в пространственном окне анализа остается неизменным.

Введем в рассмотрение понятие горизонтальной скользящей обработки двумерных дискретных сигналов $x(n_1,n_2)$ в пространственно-частотной области по видам скольжения пространственного окна анализа по двумерному дискретному сигналу: *ГС скользящая обработка* двумерных дискретных сигналов в пространственно-частотной области (ГС$^+$ и ГС$^-$).

Отметим, что сдвиг пространственного окна по двумерному дискретному сигналу можно рассматривать и как сдвиг двумерного дискретного сигнала в пространственном окне анализа в противоположном направлении движению пространственного окна.

Метод горизонтально скользящей обработки двумерных дискретных сигналов в пространственно-частотной области

Рассмотрим метод ГС$^+$ скользящей обработки двумерных дискретных сигналов в пространственно-частотной области, который позволяет устранить указанную выше избыточность при нахождении коэффициента (бина) двумерного дискретного преобразования $S_{N_1,N_2}(k_1,k_2)$ на пространственной частоте (k_1,k_2).

Введем обозначение $S_{N_1,N_2}^{(k_1,k_2)}(r)$ для бина двумерного дискретного преобразования $S_{N_1,N_2}(k_1,k_2)$, полученного при сдвиге ГС$^+$ пространственного окна анализа на r отсчетов вправо по двумерному дискретному сигналу $x(n_1,n_2)$:

$$S_{N_1,N_2}^{(k_1,k_2)}(r) = \frac{1}{N_1 \cdot N_2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x[(n_1),(n_2+r)] \cdot W_{N_1}^{k_1 n_1} \cdot W_{N_2}^{k_2 n_2};$$

где $r = 0,1,2,....$ (10)

Из соотношения (10) непосредственно следует, что при $r=0$

$$S_{N_1,N_2}^{(k_1,k_2)}(0) = \frac{1}{N_1 \cdot N_2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x(n_1,n_2) \cdot W_{N_1}^{k_1 n_1} \cdot W_{N_2}^{k_2 n_2}, \tag{11}$$

а при $r=1$

$$S_{N_1,N_2}^{(k_1,k_2)}(1) = \frac{1}{N_1 \cdot N_2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x[(n_1),(n_2+1)] \cdot W_{N_1}^{k_1 n_1} \cdot W_{N_2}^{k_2 n_2}. \tag{12}$$

Введя переменную $m_2 = n_2 + 1$, преобразуем выражение (12) к виду

$$S_{N_1,N_2}^{(k_1,k_2)}(1) = \frac{1}{N_1 \cdot N_2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{m_2=1}^{N_2} x(n_1,m_2) \cdot W_{N_1}^{k_1 \cdot n_1} \cdot W_{N_2}^{k_2 \cdot (m_2-1)}. \tag{13}$$

Используя свойство разделимости ядра ПДДПФ, выражение (13) представим в следующем виде:

$$S_{N_1,N_2}^{(k_1,k_2)}(1) = \frac{1}{N_1} \left[\sum_{n_1=0}^{N_1-1} W_{N_1}^{k_1 \cdot n_1} \left\{ \frac{1}{N_2} \sum_{m_2=1}^{N_2} x(n_1,m_2) \cdot W_{N_2}^{k_2 \cdot m_2} \cdot W_{N_2}^{-k_2} \right\} \right]. \tag{14}$$

Изменим пределы суммирования суммы в фигурных скобках соотношения (14) путем сложения и вычитания соответствующих членов:

$$\frac{1}{N_2} \sum_{m_2=1}^{N_2} x(n_1,m_2) \cdot W_{N_2}^{k_2 \cdot m_2} \cdot W_{N_2}^{-k_2} =$$

$$= \frac{W_{N_2}^{-k_2}}{N_2} \left\{ \left[\sum_{m_2=0}^{N_2-1} x(n_1,m_2) \cdot W_{N_2}^{k_2 \cdot m_2} \right] - \left[x(n_1,0) \cdot W_{N_2}^{k_2 \cdot 0} - x(n_1,N_2) \cdot W_{N_2}^{k_2 \cdot N_2} \right] \right\} =$$

$$= W_{N_2}^{-k_2} \cdot \left[S_{N_2}^{(n_1,k_2)}(0) - \frac{1}{N_2} \left(x(n_1,0) - x(n_1,N_2) \right) \right], \tag{15}$$

где $S_{N_2}^{(n_1,k_2)}(0)$ – результат одномерного ДПФ на частоте k_2 (первый этап, формула (9)).

Выражение (14) с учетом соотношения (15) можно переписать в следующем виде:

$$S_{N_1,N_2}^{(k_1,k_2)}(1)=\frac{1}{N_1}\left\{\sum_{n_1=0}^{N_1-1} W_{N_1}^{k_1\cdot n_1}\cdot W_{N_2}^{-k_2}\cdot\left[S_{N_2}^{(n_1,k_2)}(0)-\frac{1}{N_2}\left(x(n_1,0)-x(n_1,N_2)\right)\right]\right\}. \qquad (16)$$

Формулой (16) определен метод скользящей обработки при сдвиге ГС$^+$ в пространственно-частотной области, позволяющий рекуррентно вычислить коэффициент двумерного дискретного преобразования $S_{N_1,N_2}^{(k_1,k_2)}(r)$ на пространственной частоте (k_1,k_2) по отсчетам входного сигнала $x[n_1,(n_2+r)]$ $n_1=\overline{0,N_1-1}$, $n_2=\overline{0,N_2-1}$, $r=1,2,3,...$

Приведем алгоритм, реализующий разработанный метод скользящей обработки при ГС$^+$ сдвиге в пространственно-частотной области, который позволяет с помощью рекуррентной процедуры находить коэффициент двумерного дискретного преобразования $S_{N_2}^{(n_1,k_2)}(r)$ на r шаге, используя результат предыдущего шага – $S_{N_2}^{(n_1,k_2)}(r-1)$.

Алгоритм скользящей обработки в пространственно-частотной области при ГС$^+$ сдвиге двумерных дискретных сигналов

1. Найти столбцевую матрицу $S_{N_2}(n_1,k_2)$ размером n_1 путем умножения базисной функции длительностью n_2 и частоты k_2 на матрицу дискретного двумерного сигнала $x(n_1,n_2)$.

2. Запомнить столбцевую матрицу $S_{N_2}(n_1,k_2)$ как столбцевую матрицу $S_{N_2}^{(n_1,k_2)}(0)$.

3. Вычислить значение коэффициента двумерного дискретного преобразования $S_{N_1,N_2}(k_1k_2)$ путем умножения столбцевой матрицы $S_{N_2}(n_1,k_2)$ на базисную функцию длительностью n_1 и частоты k_1.

4. Осуществить ГС$^+$ сдвиг дискретного пространственного окна на один отсчет вправо по двумерному сигналу $x(n_1,n_2)$ и получить матрицу дискретного двумерного сигнала $x[n_1,(n_2+1)]$.

5. Сформировать согласно соотношению (16) столбцевую матрицу $S_{N_2}^{(n_1,k_2)}(1)$.

6. Вычислить значение коэффициента двумерного дискретного преобразования $S_{N_1,N_2}(k_1k_2)$ путем умножения столбцевой матрицы $S_{N_2}^{(n_1,k_2)}(1)$ на базисную функцию длительностью N_1 и частоты k_1.

7. Перейти к выполнению пункта № 4.

Отметим, что выход алгоритма скользящей обработки в пространственно-частотной области при ГС$^+$ сдвиге двумерных дискретных сигналов на скользящий режим (выполнение первых трех этапов) может осуществляться с помощью алгоритмов быстрого преобразования Фурье (алгоритмов БПФ).

Рассмотрим эффективность предлагаемого алгоритма скользящей обработки двумерных дискретных сигналов в пространственно-частотной области в сравнении со стандартным методом получения коэффициента двумерного дискретного преобразования $S_{N_1,N_2}(k_1k_2)$. После несложных выкладок можно установить, что:

– стандартный алгоритм скользящей обработки двумерных дискретных сигналов в пространственно-частотной области требует для получения коэффициента $S_{N_1,N_2}(k_1k_2)$ двумерного дискретного преобразования $4\cdot N_1\cdot(N_2+1)$ действительных умножений и $4\cdot N_1\cdot N_2$ действительных сложений;

– предлагаемый алгоритм скользящей обработки двумерных дискретных сигналов в пространственно-частотной области требует для получения коэффициента $S_{N_1,N_2}(k_1k_2)$ двумерного дискретного преобразования $8\cdot N_1$ действительных умножений и $(10\cdot N_1-2)$ действительных сложений.

Введем критерий эффективности, в качестве которого, аналогично работе [29], используем относительную экономию вычислений при применении сравниваемых алгоритмов A и B:

$$\gamma=\frac{\text{число операций в алгоритме } A-\text{число операций в алгоритме } B}{\text{число операций в алгоритме } A}\cdot 100\%. \qquad (17)$$

Под числом операций в соотношении (17) будем понимать число действительных умножений или число действительных умножений и сложений (в случае применения высокоскоростных умножителей) в сравниваемых алгоритмах.

На рис. 2 приведена относительная экономия операций умножения в процентах при применении предлагаемого алгоритма в сравнении со стандартным алгоритмом получения коэффициента двумерного дискретного преобразования $S_{N_1, N_2}(k_1 k_2)$.

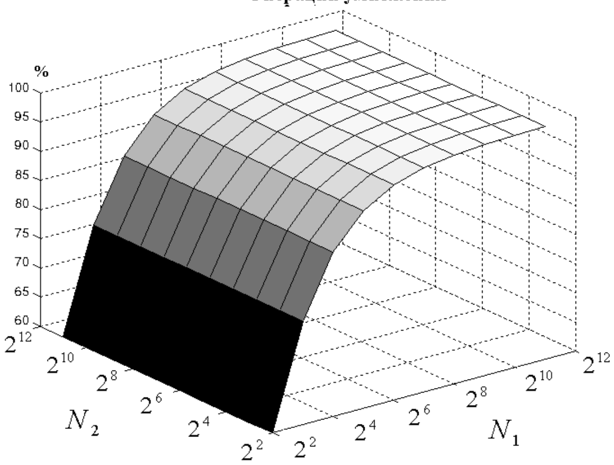

Рис. 2. Относительная экономия умножений γ в процентах в сравнении со стандартным алгоритмом

На рис. 3 приведена относительная экономия операций умножения и сложения в процентах при применении предлагаемого алгоритма в сравнении со стандартным алгоритмом получения коэффициента двумерного дискретного преобразования $S_{N_1, N_2}(k_1 k_2)$.

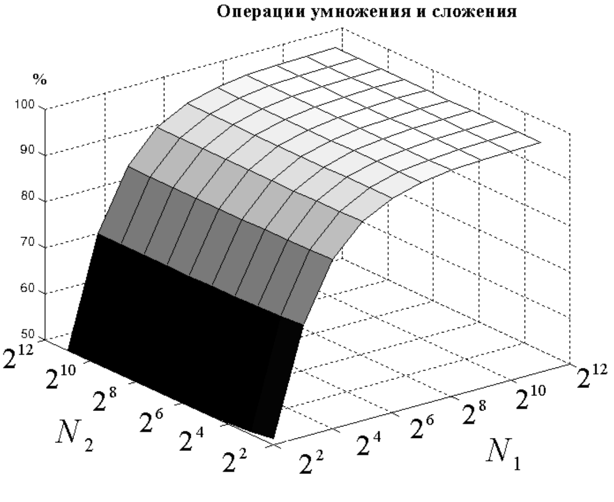

Рис. 3. Относительная экономия умножений и сложений γ в процентах в сравнении со стандартным алгоритмом

Рассмотрим метод ГС⁻ скользящей обработки двумерных дискретных сигналов в пространственно-частотной области, который позволяет устранить указанную выше избыточность при нахождении коэффициента (бина) двумерного дискретного преобразования $S_{N_1, N_2}(k_1 k_2)$ на пространственной частоте (k_1, k_2).

Введем обозначение $S_{N_1,N_2}^{(k_1,k_2)}(-r)$ для бина двумерного дискретного преобразования $S_{N_1, N_2}(k_1 k_2)$, полученного при сдвиге ГС⁻ пространственного окна анализа на r отсчетов влево по двумерному дискретному сигналу $x(n_1, n_2)$:

$$S_{N_1,N_2}^{(k_1,k_2)}(-r) = \\ = \frac{1}{N_1 \cdot N_2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x[(n_1),(n_2 - r)] \cdot W_{N_1}^{k_1 n_1} \cdot W_{N_2}^{k_2 n_2}, \quad (18)$$

где $r = 0,1,2,....$

Из соотношения (10) непосредственно следует, что при $r = 0$

$$S_{N_1,N_2}^{(k_1,k_2)}(0) = \\ = \frac{1}{N_1 \cdot N_2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x(n_1, n_2) \cdot W_{N_1}^{k_1 n_1} \cdot W_{N_2}^{k_2 n_2}, \quad (19)$$

а при $r = -1$

$$S_{N_1,N_2}^{(k_1,k_2)}(-1) = \\ = \frac{1}{N_1 \cdot N_2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x[(n_1),(n_2 - 1)] \cdot W_{N_1}^{k_1 n_1} \cdot W_{N_2}^{k_2 n_2}. \quad (20)$$

Введя переменную $m_2 = n_2 - 1$, преобразуем выражение (12) к виду

$$S_{N_1,N_2}^{(k_1,k_2)}(-1) = \\ = \frac{1}{N_1 \cdot N_2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{m_2=-1}^{N_2-2} x(n_1, m_2) \cdot W_{N_1}^{k_1 \cdot n_1} \cdot W_{N_2}^{k_2 \cdot (m_2+1)}. \quad (21)$$

Используя свойство разделимости ядра ПДДПФ, выражение (21) представим в следующем виде:

$$S_{N_1,N_2}^{(k_1,k_2)}(-1) = \frac{1}{N_1} \times \\ \times \left[\sum_{n_1=0}^{N_1-1} W_{N_1}^{k_1 \cdot n_1} \left\{ \frac{1}{N_2} \sum_{m_2=-1}^{N_2-2} x(n_1, m_2) \cdot W_{N_2}^{k_2 \cdot m_2} \cdot W_{N_2}^{+k_2} \right\} \right]. \quad (22)$$

Изменим пределы суммирования суммы в фигурных скобках соотношения (22) путем сложения и вычитания соответствующих членов:

$$\frac{1}{N_2} \sum_{m_2=-1}^{N_2-2} x(n_1, m_2) \cdot W_{N_2}^{k_2 \cdot m_2} \cdot W_{N_2}^{+k_2} =$$

$$= \frac{W_{N_2}^{+k_2}}{N_2} \left\{ \left[\sum_{m_2=0}^{N_2-1} x(n_1, m_2) \cdot W_{N_2}^{k_2 \cdot m_2} \right] + \right.$$

$$\left. + \left[x(n_1, -1) \cdot W_{N_2}^{k_2 \cdot 0} - x(n_1, N_2 - 1) \cdot W_{N_2}^{k_2 \cdot N_2} \right] \right\} = W_{N_2}^{+k_2} \times$$

$$\times \left[S_{N_2}^{(n_1, k_2)}(0) + \frac{1}{N_2} \left(x(n_1, -1) - x(n_1, N_2 - 1) \right) \right], \tag{23}$$

где $S_{N_2}^{(n_1, k_2)}(0)$ – результат одномерного ДПФ на частоте k_2 (первый этап, формула (9)).

Выражение (22) с учетом соотношения (23) можно переписать в следующем виде:

$$S_{N_1, N_2}^{(k_1, k_2)}(-1) = \frac{1}{N_1} \left\{ \sum_{n_1=0}^{N_1-1} W_{N_1}^{k_1 \cdot n_1} \times W_{N_2}^{+k_2} \times \right.$$

$$\left. \times \left[S_{N_2}^{(n_1, k_2)}(0) + \frac{1}{N_2} \left(x(n_1, -1) - x(n_1, N_2 - 1) \right) \right] \right\}. \tag{24}$$

Формулой (24) определен метод скользящей обработки при сдвиге ГС$^-$ в пространственно-частотной области, позволяющий рекуррентно вычислить коэффициент двумерного дискретного преобразования $S_{N_1, N_2}^{(k_1, k_2)}(-r)$ на пространственной частоте (k_1, k_2) по отсчетам входного сигнала $x[n_1, (n_2 - r)]$ $n_1 = \overline{0, N_1 - 1}$, $n_2 = \overline{0, N_2 - 1}$, $r = 1, 2, 3, ...$

Алгоритм скользящей обработки в пространственно-частотной области при сдвиге ГС$^-$ двумерных дискретных сигналов аналогичен изложенному выше алгоритму скользящей ГС$^+$ обработки. Что касается эффективности алгоритма скользящей обработки в пространственно-частотной области при сдвиге ГС$^-$ двумерных дискретных сигналов, то она в точности такая же, как и эффективность алгоритма скользящей обработки в пространственно-частотной области при сдвиге ГС$^+$.

Выводы

Разработан эффективный метод и алгоритм горизонтально скользящего двумерного дискретного преобразования Фурье, который позволяет вычислять коэффициенты данного преобразования в реальном масштабе времени.

Проведена в сравнении с известными алгоритмами оценка эффективности алгоритма скользящего двумерного дискретного преобразования Фурье с точки зрения вычислительных затрат.

В результате экспериментальных исследований доказана достоверность и обоснованность предложенного метода и алгоритма горизонтально скользящей двумерной дискретной обработки сигналов.

Библиографические ссылки

1. *Рабинер Л., Гоулд Б.* Теория и применение цифровой обработки сигналов / пер. с англ. М. : Мир, 1978. 839 с.

2. *Марпл-мл. С. Л.* Цифровой спектральный анализ и его приложения / пер. с англ. М. : Мир, 1990. 584 с.

3. *Gonzalez R. C., Woods R. E.* Digital Image Processing, 4th Ed. Published by Pearson. 2018. 1168 p.

4. *Прэтт У.* Цифровая обработка изображений : в 2 кн. / пер. с англ. М. : Мир, 1982. 790 с.

5. *Пономарева О. В., Пономарев А. В.* Восстановление значений непрерывных частотных спектров дискретных сигналов методом параметрического дискретного преобразования Фурье // Вестник ИжГТУ имени М. Т. Калашникова. 2015. Т. 18. № 3. С. 88–91.

6. *Пономарева О. В.* Измерение спектров комплексных сигналов на конечных интервалах методом апериодического дискретного преобразования Фурье // Интеллектуальные системы в производстве. 2014.-№1(23).-С.100-107.

7. *Пономарева О. В., Пономарев А. В., Пономарев В. А.* Измерение скользящего взвешенного энергетического дискретно-временного спектра тональных компонент // Интеллектуальные системы в производстве, 2014. № 2 (24). С. 126–132.

8. *Пономарев В. А., Пономарева О. В.* Инвариантность текущего энергетического Фурье-спектра действительных дискретных сигналов на конечных интервалах // Технология и конструирование в электронной аппаратуре. 2014. № 1. С. 15–22.

9. *Пономарев В. А., Пономарева О. В., Пономарева Н. В.* Метод быстрого вычисления дискретного преобразования Гильберта в частотной области // Современные информационные и электронные технологии. 2014. № 15. С. 183–184.

10. Пономарева О. В., Пономарев А. В., Пономарева Н. В. Формализованное описание погрешности измерения вероятностных характеристик случайных процессов процессорными измерительными средствами // Современные информационные и электронные технологии. 2013. № 14. С. 90–93.

11. *Пономарева Н. В., Пономарева О. В., Хворенков В. В.* Определение огибающей ангармонического дискретного сигнала на основе преобразования Гильберта в частотной области // Интеллектуальные системы в производстве. 2018. Т. 16. № 1. С. 33–40.

12. *Пономарев В. А., Пономарева О. В.* Тенденции развития дискретных косвенных измерений параметров электрических сигналов // Метрология. 2017. № 1. С. 20–32.

13. *Пономарева О. В., Пономарева Н. В., Пономарева В. Ю.* Применение временных окон в векторном спектральном анализе дискретных сигналов // Интеллектуальные системы в производстве. 2016. № 4 (31). С. 19–21.

14. *Пономарева Н. В.* Проблемы компьютерной спектральной обработки сигналов в музыкальной акустике // Интеллектуальные системы в производстве. 2018. Т. 16. № 1. С. 26–33.

15. *Пономарева Н. В.* Цифровая спектральная обработка сигналов в музыкальной акустике // DSPA: Вопросы применения цифровой обработки сигналов. 2018. Т. 8. № 2. С. 37–42.

16. *Пономарев В. А., Пономарева Н. В.* Метод и алгоритм выделения музыкально-акустического сигнала из его смеси со случайным дискретным телеграфным сигналом // Перспективные информационные технологии (ПИТ 2018) : труды Международной научно-технической конференции / под ред. С. А. Прохорова. 2018. С. 161–164.

17. *Пономарева Н. В.* Предобработка дискретных сигналов при спектральном анализе в системе компьютерной математики MATLAB // Интеллектуальные системы в производстве. 2016. № 4 (31). С. 32–34.

18. *Пономарев В. А., Пономарева Н. В*. Цифровой спектрально-временной анализ музыкально-акустических сигналов на основе параметрического дискретного преобразования Фурье // Приборостроение в XXI веке – 2017. Интеграция науки, образования и производства : сборник материалов XIII Международной научно-технической конференции. Ижевск, 2018. С. 307–312.

19. *Пономарева Н. В., Пономарев В. В.* Метод быстрого получения прореженных коэффициентов дискретного преобразования Фурье на основе параметрических дискретных экспоненциальных базисов // DSPA: Вопросы применения цифровой обработки сигналов. 2017. Т. 7. № 1. С. 172–177.

20. *Пономарева Н. В., Пономарева В. Ю.* Локализация спектральных пиков методом параметрического дискретного преобразования Фурье // Интеллектуальные системы в производстве. 2016. № 2 (29). С. 15–18.

21. *Пономарева Н. В., Пономарева В. Ю.* Метод измерения частоты сигналов на базе параметрического дискретного преобразования Фурье // DSPA: Вопросы применения цифровой обработки сигналов. 2016. Т. 6. № 2. С. 393–397.

22. Аппроксимационный подход к решению задач анализа и интерпретации экспериментальных данных / В. И. Батищев, А. Г. Золин, Д. Н. Косарев, А. Е. Романеев // Вестник Самарского государственного университета. Сер. Технические науки. 2006. № 40. С. 57–65.

23. *Батищев В. И., Мелентьев В. С.* Измерительно-моделирующий подход к определению интегральных характеристик периодических сигналов // Известия высших учебных заведений. Электромеханика. 2003. № 6. С. 36–39.

24. *Батищев В. И., Волков И. И., Золин А. Г.* Использование стохастического базиса в задачах восстановления сигналов и изображений // Автометрия. 2017. Т. 53. № 4. С. 127–134.

25. *Батищев В. И., Волков И. И., Золин А. Г.* Исследование аппроксимационных свойств функциональных базисов в задачах реконструкции изображений при дистанционном зондировании земли // Проблемы управления и моделирования в сложных системах труды XVIII Международной конференции / под ред. Е. А. Федосова, Н. А. Кузнецова, В. А. Виттиха. 2016. С. 304–307.

26. *Prokhorov S. A., Kulikovskikh I. M.* Unique Condition for generalized Laguerre Functions to solve pole Position Problem // Signal Processing. 2015. Vol. 108. Pp. 25-29.

27. *Прохоров С. А., Графкин В. В.* Структурно-спектральный анализ случайных процессов. Самара, 2010.

28. *Прозоров Д. Е., Петров Е. П.* Быстрый поиск шумоподобных сигналов / под ред. Е. П. Петрова. Киров, 2006.

29. *Пономарева О. В., Пономарев А. В.* Восстановление значений непрерывных частотных спектров дискретных сигналов методом параметрического дискретного преобразования Фурье // Вестник ИжГТУ имени М. Т. Калашникова. 2015. Т. 18. № 3. С. 88–91.

References

1. Rabiner L., Gould B. *Teoriya i primenenie cifrovoj obrabotki signalov. Perevod s angl.* [Theory and application of digital signal processing]. Moscow, World., 1978, 839 p.(in Russ.)

2. Marpl-ml. S.L. *Cifrovoj spektral'nyj analiz i ego prilozheniya: Perevod s angl.* [Digital Spectral Analysis and its Applications]. Moscow, World., 1990, 584 p. (in Russ.).

3. Gonzalez R.C., Woods R.E. Digital Image Processing, 4th Ed. Published by Pearson. 2018. 1168 p.

4. Prehtt U. *Cifrovaya obrabotka izobrazhenij*. *V 2-h knigah. Perevod s angl*. [Digital image processing]. Moscow, World., 1982, 790 p. (in Russ.).

5. Ponomareva O.V., Ponomarev A.V. [Recovery of values of continuous frequency spectra of discrete signals by the method of parametric discrete Fourier transform]. *Vestnik IzhGTU imeni M.T. Kalashnikova*, 2015, vol. 18, no. 3, pp. 88-91 (in Russ.).

6. Ponomareva O.V. [Measurement of the spectra of complex signals at finite intervals by the method of aperiodic discrete Fourier transform]. *Intellektual'nye sistemy v proizvodstve*, 2014, no. (23) pp. 100-107.2014 (in Russ.).

7. Ponomareva O.V., Ponomarev A.V., Ponomarev V.A. [Measurement of the spectra of complex signals at finite intervals by the method of aperiodic discrete Fourier transform]. *Intellektual'nye sistemy v proizvodstve*, 2014, no. 1 (23), pp. 100-107 (in Russ.).

8. Ponomarev V.A., Ponomareva O.V. [Invariance of the current energy Fourier spectrum of real discrete signals at finite intervals]. *Technology and design in electronic* equipment, 2014, no. 1, pp. 15-22 (in Russ.).

9. Ponomarev V.A., Ponomareva O.V., Ponomareva N.V. [The method of fast calculation of the discrete Hilbert transform in the frequency domain]. *Modern information and electronic technologies,* 2014, no. 15, pp. 183-184 (in Russ.).

10. Ponomareva O.V., Ponomarev A.V., Ponomareva N.V. Formalized description of the measurement error of the probabilistic characteristics of random processes with processor measurement tools]. *Modern information and electronic technologies*, 2013, no. 4, pp. 90-93 (in Russ.).

11. Ponomareva N.V., Ponomareva O.V., Hvorenkov V.V. [Determination of anharmonic discrete signal envelope based on the Hilbert transform in the frequency domain]. *Intellektual'nye sistemy v proizvodstve*, 2018, vol. 16, no. 1, pp. 33-40 (in Russ.).

12. Ponomarev V.A., Ponomareva O.V. [Trends in the development of discrete indirect measurements of the parameters of electrical signals]. *Metrology*, 2017, no. 1, pp. 20-32 (in Russ.).

13. Ponomareva O.V., Ponomareva N.V, Ponomareva V.YU. [The use of time windows in the vector spectral analysis of discrete signals]. *Intellektual'nye sistemy v proizvodstve.* 2016, no. 4 (31), pp. 19-21 (in Russ.).

14. Ponomareva N.V. [Problems of computer spectral signal processing in musical acoustics]. *Intellektual'nye sistemy v proizvodstve*, 2018, vol. 16, no. 1, pp. 26-33 (in Russ.).

15. Ponomareva N.V. [Digital spectral signal processing in musical acoustics]. *DSPA Issues of application of digital signal processing*, 2018, vol. 8, no. 2, pp. 37-42 (in Russ.).

16. Ponomarev V.A., Ponomareva N.V. [Method and algorithm for extracting a musical-acoustic signal from its mixture with a random discrete telegraph signal. In the collection]. *Advanced Information Technologies (PIT 2018). Proceedings of the International Scientific and Technical Conference. Edited by S.A. Prokhorov*, 2018, pp. 161-164 (in Russ.).

17. Ponomareva N.V. [Pre-processing of discrete signals in spectral analysis in the computer mathematics system MATLAB]. *Intellektual'nye sistemy v proizvodstve*, 2016, no. 4 (31). pp. 32-34 (in Russ.).

18. Ponomarev V.A., Ponomareva N.V.[Digital spectral-temporal analysis of musical-acoustic signals based on the parametric discrete Fourier transform]. *In the collection: Instrumentation in the XX1st century - 2017. Integration of science, education and production. Collection of materials XX1 International Scientific and Technical Conference*. Izhevsk, 2018, pp. 307-312 (in Russ.).

19. Ponomareva N.V., Ponomarev V.V. [The method of quickly obtaining thinned coefficients of the discrete Fourier transform based on parametric discrete exponential bases]. *DSPA: Issues of application of digital signal processing*, 2017, vol.7, no. 1, pp. 172-177 (in Russ.).

20. Ponomareva N.V., Ponomareva V.YU. [Localization of spectral peaks by the parametric discrete Fourier transform method]. *Intellektual'nye sistemy v proizvodstve*, 2016, no. 2 (29), pp. 15-18 (in Russ.).

21. Ponomareva N.V, Ponomareva V.YU. [Method for measuring the frequency of signals based on the parametric discrete Fourier transform]. *DSPA: Issues of application of digital signal processing*, 2016, vol. 6, no. 2, pp. 393-397 (in Russ.).

22. Batishchev V.I., Zolin A.G.,Kosarev D.N., Romaneev A.E. [Approximation approach to solving the problems of analyzing and interpreting experimental data]. *Herald of Samara State University. Series: Engineering*, 2006, no. 40, pp. 57-65 (in Russ.).

23. Batishchev V.I., Melent'ev V.S. [Measuring and modeling approach to determining the integral characteristics of periodic signals] *News of higher educational institutions. Electromechanics*, 2003, no. 6, pp. 36-39 (in Russ.).

24. Batishchev V.I., Volkov I.I., Zolin A.G. [The use of the stochastic basis in the problems of the restoration of signals and images]. *Avtometriya*, 2017, vol. 53, no. 4, pp.127-134 (in Russ.).

25. Batishchev V.I., Volkov I.I., Zolin A.G. [The study of the approximation properties of functional bases in the tasks of image reconstruction during remote sensing of the earth]. *In the collection: Control and modeling problems in complex systems, works of the XVIII International Conference. Edited by: E.A. Fedosova, N.A. Kuznetsova, V.A. Wittych,* 2016, pp. 304-307 (in Russ.).

26. Prokhorov S.A., Kulikovskikh I.M. Unique Condition for generalized Laguerre Functions to solve pole Position Problem, Signal Processing, 2015. vol. 108. pp. 25-29.

27. Prohorov S.A., Grafkin V.V. *Strukturno-spektral'nyj analiz sluchajnyh processov* [Structural and spectral analysis of random processes]. Samara, 2010 (in Russ.).

28. Prozorov D.E., Petrov E.P. *Bystryj poisk shumopodobnyh signalov. Edited by: E.P.Petrova* [Quick search for noise-like signals]. Kirov, 2006 (in Russ.).

29. Ponomareva O.V., Ponomarev A.V. [Recovery of values of continuous frequency spectra of discrete signals by the method of parametric discrete Fourier transform]. *Vestnik IzhGTU imeni M.T. Kalashnikova*, 2015, vol. 18, no. 3, pp. 88-91 (in Russ.).

* * *

Horizontal Moving Spatial Frequency Processing of Two-Dimensional Discrete Real Signals

O. V. Ponomareva, DSc in Engineering, Professor, Kalashnikov ISTU

A method for processing two-dimensional discrete signals in the spatial-frequency domain is proposed - a method of horizontal moving of two-dimensional discrete Fourier transform. The mathematical apparatus of the direct two-dimensional discrete Fourier transform in algebraic and matrix form is considered. The stages of performing a two-dimensional discrete Fourier transform using a one-dimensional fast Fourier transform are considered. An efficient method and algorithm for a horizontally sliding two-dimensional discrete Fourier transform have been developed, which allows us to calculate the coefficients of a given transform in real time. The estimation of the efficiency of the algorithm of the horizontally sliding two-dimensional discrete Fourier transform from the point of view of computational costs in comparison with the known algorithms is carried out. As a result of experimental studies on model two-dimensional discrete signals, the validity, efficiency, and reliability of the proposed method and algorithm for a horizontally sliding two-dimensional discrete Fourier transform have been proved. A comparison is made of the developed method of a horizontally sliding two-dimensional discrete Fourier transform with a standard method for obtaining the coefficients of a two-dimensional discrete transform in terms of computational costs. The surfaces of relative savings of computations are constructed in the developed algorithm in comparison with the standard algorithm of horizontal moving processing of two-dimensional discrete signals.

Keywords: two-dimensional discrete signal, two-dimensional discrete Fourier transform, spatial domain, spatial-frequency spectrum, spatial-frequency processing.

Получено: 15.02.19