

УДК 621.372

DOI 10.22213/2410-9304-2019-1-88-94

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ В ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ОБЛАСТИ ДВУМЕРНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ С ПОМОЩЬЮ БЫСТРЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУРЬЕ

О. В. Пономарева, доктор технических наук, профессор, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова, Ижевск, Россия

А. В. Пономарев, кандидат экономических наук, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова, Ижевск, Россия

Показано, что обобщение одномерных методов цифровой обработки дискретных сигналов на двумерный случай является не только нетривиальной задачей, но часто решение такой проблемы просто невозможно. Предложено решение задачи интерполяции в пространственной области двумерных дискретных сигналов с помощью быстрых преобразований Фурье. Показано различие задач интерполяции и аппроксимации двумерных дискретных сигналов. Дано определение дискретного двумерного сигнала на прямоугольной пространственной опорной плоскости в виде матрицы. Приведен математический аппарат матричного и алгебраического дискретного двумерного преобразования Фурье двумерных дискретных сигналов в пространственной области. Рассмотрен математический аппарат матричного и алгебраического дискретного двумерного преобразования Фурье двумерных дискретных сигналов в пространственно-частотной области. Разработан метод и алгоритм интерполяции действительных и комплексных дискретных двумерных сигналов в пространственной области. Проиллюстрирована обоснованность и достоверность предложенного метода интерполяции. Приведены результаты экспериментальных исследований предложенного алгоритма интерполяции на модельных двумерных дискретных комплексных сигналах. Выдвинута рабочая гипотеза повышения эффективности предложенного алгоритма интерполяции путем обобщения базиса дискретного двумерного преобразования Фурье (системы двумерных дискретных экспоненциальных функций), с целью учета специфики предложенного метода интерполяции.

Ключевые слова: двумерное дискретное преобразование Фурье, циклическая двумерная корреляционная функция, пространственная область, пространственно-частотная область, каноническое разложение случайного сигнала.

Введение

Цифровая обработка дискретных двумерных сигналов, частным случаем которых является цифровая обработка изображений, является одним из основных направлений научных исследований во многих предметных областях. Среди предметных областей, в которых широко применяется данный вид обработки, следует назвать медицину, активную и пассивную гидролокацию, сейсмологию, контроль и диагностику естественных и искусственных систем, исследования в космической области. Дискретные двумерные сигналы являются, с одной стороны, информационными, поскольку содержат информацию об исследуемых сложных прикладных объектах [1–28], с другой стороны, требуют разработки специальных двумерных методов обработки. Отметим, что обобщение одномерных методов обработки на двумерный случай является не только не тривиальной задачей, но иногда просто невозможно. Например, в общем случае не удастся обобщить одномерную концепцию изолированных полюсов, нулей и корней на двумерный случай. Кроме того, большую роль в ограниченном

применении перспективных одномерных методов обработки сигналов, принципиально допускающих обобщение на двумерный случай, играет и так называемое *проклятие размерности*.

Целью данной работы является разработка методов интерполяции действительных и комплексных дискретных двумерных сигналов в пространственной области на основе быстрых преобразований Фурье.

Основной раздел

С математической точки зрения *дискретный двумерный сигнал* $x(n_1, n_2)$ *конечной длины* – это двумерная последовательность конечной длины, являющаяся множеством действительных (или в общем случае комплексных) чисел, определенных для упорядоченных пар целых чисел n_1 и n_2 при $0 \leq n_1 \leq N_1 - 1$; $0 \leq n_2 \leq N_2 - 1$ [29–31].

Дискретный двумерный сигнал $x(n_1, n_2)$ на прямоугольной пространственной опорной плоскости при $0 \leq n_1 \leq N_1 - 1$ и $0 \leq n_2 \leq N_2 - 1$ может быть представлен в виде матрицы

$$X_{N_1 \times N_2} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & \dots & (N_2 - 1) \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ (N_1 - 1) \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccc} x(0,0) & x(0,1) & \dots & x(0, N_2 - 1) \\ x(1,0) & x(1,1) & \dots & x(1, N_2 - 1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x(N_1 - 1, 0) & x(N_1 - 1, 1) & \dots & x(N_1 - 1, N_2 - 1) \end{array} \right] \end{matrix} \cdot \begin{matrix} n_2 \\ \dots \\ n_2 \end{matrix} \quad (1)$$

При выборе для векторного и спектрального анализа дискретных двумерных сигналов унитарного двумерного преобразования Фурье мы используем систему двумерных дискретных экспоненциальных функций (ДДЭФ) (система является базисом двумерного дискретного преобразования Фурье):

$$\begin{aligned} def_{N_1, N_2}(k_1, n_1, k_2, n_2) &= [\exp(-j \frac{2\pi}{N_1}(k_1 n_1))] \times \\ &\times [\exp(-j \frac{2\pi}{N_2}(k_2 n_2))] = [W_{N_1}^{k_1 n_1}] \cdot [W_{N_2}^{k_2 n_2}] = \\ &= [\cos(\frac{2\pi}{N_1} k_1 n_1) - j \sin(\frac{2\pi}{N_1} k_1 n_1)] \times \\ &\times [\cos(\frac{2\pi}{N_2} k_2 n_2) - j \sin(\frac{2\pi}{N_2} k_2 n_2)], \quad (2) \end{aligned}$$

где $\overline{k_1, k_2}$ – пространственные частоты; $\overline{k_1, n_1} = \overline{0, (N_1 - 1)}$; $\overline{k_2, n_2} = \overline{0, (N_2 - 1)}$.

Алгебраическая форма прямого двумерного дискретного преобразования Фурье (ПДДПФ) двумерного сигнала $x(n_1, n_2)$:

$$\begin{aligned} S_{N_1, N_2}(k_1, k_2) &= \\ &= \frac{1}{N_1 \cdot N_2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x(n_1, n_2) W_{N_1}^{k_1 n_1} \cdot W_{N_2}^{k_2 n_2}, \quad (3) \end{aligned}$$

$$S_{N_1 \times N_2} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & \dots & (N_2 - 1) \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ (N_1 - 1) \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccc} S(0,0) & S(0,1) & \dots & S(0, N_2 - 1) \\ S(1,0) & S(1,1) & \dots & S(1, N_2 - 1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S(N_1 - 1, 0) & S(N_1 - 1, 1) & \dots & S(N_1 - 1, N_2 - 1) \end{array} \right] \end{matrix} \cdot \begin{matrix} k_2 \\ \dots \\ k_2 \end{matrix} \quad (5)$$

Введем матрицы базисных систем преобразований ДДПФ:

где $\overline{k_1} = \overline{0, (N_1 - 1)}$, $\overline{k_2} = \overline{0, (N_2 - 1)}$ – пространственные частоты; $x(n_1, n_2)$ – двумерный сигнал, $\overline{n_1} = \overline{0, N_1 - 1}$, $\overline{n_2} = \overline{0, N_2 - 1}$, $S_{N_1, N_2}(k_1, k_2)$ – коэффициенты ДДПФ (двумерный векторный пространственно-частотный спектр сигнала $x(n_1, n_2)$).

Алгебраическая форма обратного двумерного дискретного преобразования Фурье (ОДДПФ) двумерного векторного пространственно-частотного спектра $S_{N_1, N_2}(k_1, k_2)$:

$$x(n_1, n_2) = \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} S_{N_1, N_2}(k_1, k_2) W_{N_1}^{-k_1 n_1} \cdot W_{N_2}^{-k_2 n_2}, \quad (4)$$

где $\overline{n_1} = \overline{0, (N_1 - 1)}$, $\overline{n_2} = \overline{0, (N_2 - 1)}$; $S_{N_1, N_2}(k_1, k_2)$ – двумерный векторный пространственно-частотный спектр двумерного сигнала $x(n_1, n_2)$.

Двумерный векторный пространственно-частотный спектр $S_{N_1, N_2}(k_1, k_2)$ на прямоугольной частотно-пространственной опорной плоскости при $0 \leq k_1 \leq N_1 - 1$ и $0 \leq k_2 \leq N_2 - 1$ может быть представлен в виде матрицы

$$F_{N_2 \times N_2}^{(1)} = \begin{matrix} & & 0 & 1 & \dots & (N_2 - 1) \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ (N_2 - 1) \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccc} W_{N_2}^{0 \cdot 0} & W_{N_2}^{0 \cdot 1} & \dots & W_{N_2}^{0 \cdot (N_2 - 1)} \\ W_{N_2}^{1 \cdot 0} & W_{N_2}^{1 \cdot 1} & \dots & W_{N_2}^{1 \cdot (N_2 - 1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{N_2}^{(N_2 - 1) \cdot 0} & W_{N_2}^{(N_2 - 1) \cdot 1} & \dots & W_{N_2}^{(N_2 - 1) \cdot (N_2 - 1)} \end{array} \right] & \begin{matrix} k_2 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{matrix} \end{matrix} ; \quad (6)$$

$$F_{N_1 \times N_1}^{(2)} = \begin{matrix} & & 0 & 1 & \dots & (N_1 - 1) \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ (N_1 - 1) \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccc} W_{N_1}^{0 \cdot 0} & W_{N_1}^{0 \cdot 1} & \dots & W_{N_1}^{0 \cdot (N_1 - 1)} \\ W_{N_1}^{1 \cdot 0} & W_{N_1}^{1 \cdot 1} & \dots & W_{N_1}^{1 \cdot (N_1 - 1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{N_1}^{(N_1 - 1) \cdot 0} & W_{N_1}^{(N_1 - 1) \cdot 1} & \dots & W_{N_1}^{(N_1 - 1) \cdot (N_1 - 1)} \end{array} \right] & \begin{matrix} n_1 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{matrix} \end{matrix} . \quad (7)$$

Используя соотношения (1), (4)–(7), а также разделимость ядра ДДПФ (2), введем *матричную форму ПДДПФ*:

$$S_{N_1 \times N_2} = \frac{1}{N_1 \cdot N_2} F_{N_1 \times N_1}^{(2)} \cdot X_{N_1 \times N_2} \cdot F_{N_2 \times N_2}^{(1)} \quad (8)$$

и *матричную форму ОДДПФ*:

$$X_{N_1 \times N_2} = [F_{N_1 \times N_1}^{(2)}]^* \cdot S_{N_1 \times N_2} \cdot [F_{N_2 \times N_2}^{(1)}]^*, \quad (9)$$

где символ * обозначает комплексное сопряжение.

Поскольку различие задач интерполяции и аппроксимации двумерных дискретных сигналов зачастую излагается фрагментарно, кратко рассмотрим этот вопрос. При интерполяции двумерных дискретных сигналов, известных на множестве упорядоченных пар целых чисел n_1 и n_2 при $0 \leq n_1 \leq N_1 - 1$; $0 \leq n_2 \leq N_2 - 1$ (узлах интерполяции), интерполирующая дискретная функция должна совпадать в узлах интерполяции. При аппроксимации двумерных дискретных сигналов в общем случае такого требования нет.

Метод интерполяции двумерных дискретных сигналов в пространственной области основан на трех основных положениях:

- двумерной версии теоремы Котельникова;
- двумерном z -преобразовании;
- взаимосвязи операций дискретизации и периодизации в пространственной и пространственно-частотной областях в случае применения двумерного дискретного преобразования Фурье.

Согласно теореме Котельникова (в зарубежных информационных источниках – Shannon, Nyquist, sampling theorem) в результате дискретизации двумерного сигнала, двумерный спектр которого ограничен пространственными частотами f_1 и f_2 , происходит, во-первых, периодизация в пространственно-частотной области его двумерного спектра, во-вторых, исходный непрерывный сигнал может быть теоретически точно восстановлен при частотах дискретизации исходного двумерного непрерывного сигнала $2f_1$ и $2f_2$ соответственно. Практически этого сделать невозможно, поскольку для этого исходный сигнал должен быть известен на опорной плоскости в бесконечных интервалах.

В том случае когда исходный сигнал $x(n_1, n_2)$ является дискретным и казуальным ($x(n_1, n_2) \equiv 0$ при $n_1 \geq N_1$; $n_2 \geq N_2$), для него справедливо прямое и обратное двумерное z -преобразования:

Прямое двумерное z -преобразование:

$$X(z_1, z_2) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(m, n) \cdot z_1^{-m} z_2^{-n} . \quad (10)$$

Обратное двумерное z -преобразование:

$$x(m, n) = \frac{1}{4\pi} \oint_{B_1} \oint_{B_2} X(z_1^{m-1} z_2^{n-1}) dz_1 dz_2 . \quad (11)$$

При этом нетрудно видеть, что ДДПФ есть частный случай прямого двумерного z -преобразования:

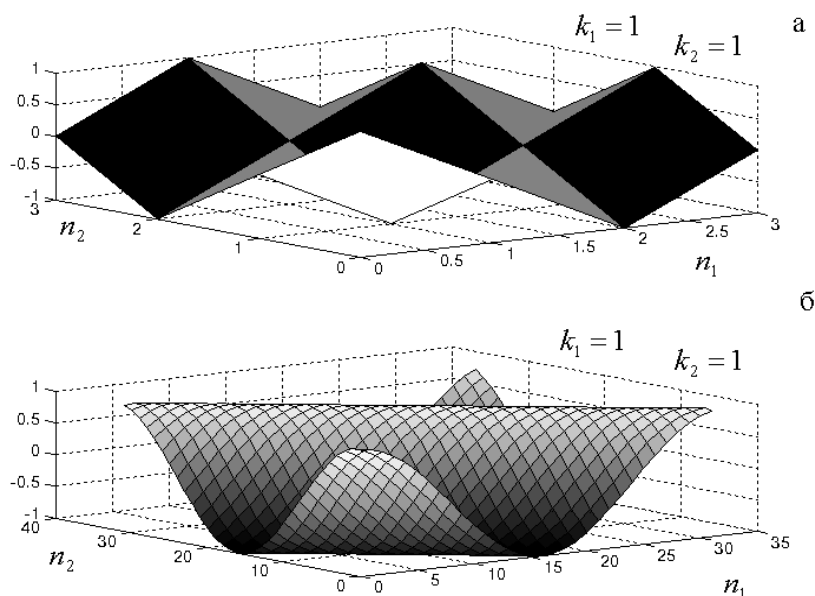
$$S_{N_1, N_2}(k_1, k_2) = X(z_1, z_2) \Big|_{z_1 = W_{N_1}^{k_1 n_1}, z_2 = W_{N_2}^{k_2 n_2}} . \quad (12)$$

Из соотношений (2), (3), (9)–(12) и непосредственно следует, что, выполнив ДДПФ $x(n_1, n_2)$, поместив в середину двумерного спектра $S_{N_1, N_2}(k_1, k_2)$ нулевые строки и нулевые столбцы в количестве $(m_1 - 1) \cdot N_1$ и $(m_2 - 1) \cdot N_2$ соответственно и выполнив ОДПФ получен-

ного на предыдущем шаге спектра, мы получим интерполированный двумерный сигнал $x_{\text{int}}(n_1, n_2)$, $0 \leq n_1 \leq (m_1 - 1)N_1$; $0 \leq n_2 \leq (m_2 - 1)N_2$.

Обсуждение результатов

На рисунке проиллюстрирована эффективность рассмотренного метода и алгоритма.



Интерполяция двумерной дискретной экспоненциальной функции: *a* – двумерная дискретная экспоненциальная функция $\text{Re}[def_{N_1, N_2}(k_1, n_1, k_2, n_2)]$, заданная на опорной плоскости 4×4 ; *b* – интерполированная дискретная экспоненциальная функция $\text{Re}[def_{N_1, N_2}(k_1, n_1, k_2, n_2)]$ с коэффициентом интерполяции $m_1 = m_2 = 8$

Заключение

Предложен эффективный метод и алгоритм интерполяции двумерных дискретных сигналов в сравнении с методом и алгоритмом интерполяции двумерных дискретных сигналов непосредственно с помощью интерполирующей функции вида $\sin x / x$. Вместе с тем необходимо отметить, что вычислительные затраты (даже с учетом разделимости ядра ДДПФ и применения алгоритмов БПФ) в предложенном методе и алгоритме интерполяции двумерных дискретных сигналов остаются значительными (даже с учетом разделимости ядра ДДПФ и применения алгоритмов БПФ). Необходим активный поиск преобразования, базис которого бы учитывал специфику данного метода интерполяции двумерных дискретных сигналов.

Библиографические ссылки

1. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов / пер. с англ. М. : Мир, 1978. 839 с.
2. Марпл-мл. С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения / пер. с англ. М. : Мир, 1990. 584 с.

3. Gonzalez R. C., Woods R. E. Digital Image Processing, 4th Ed. Published by Pearson. 2018. 1168 p.

4. Прэнтт У. Цифровая обработка изображений : в 2 кн. / пер. с англ. М. : Мир, 1982. 790 с.

5. Пономарева О. В., Пономарев А. В. Восстановление значений непрерывных частотных спектров дискретных сигналов методом параметрического дискретного преобразования Фурье // Вестник ИжГТУ имени М. Т. Калашникова. 2015. Т. 18. № 3. С. 88–91.

6. Пономарева О. В. Измерение спектров комплексных сигналов на конечных интервалах методом апериодического дискретного преобразования Фурье // Интеллектуальные системы в производстве. 2014.- №1(23).-С.100-107.

7. Пономарева О. В., Пономарев А. В., Пономарев В. А. Измерение скользящего взвешенного энергетического дискретно-временного спектра тональных компонент // Интеллектуальные системы в производстве, 2014. № 2 (24). С. 126–132.

8. Пономарев В. А., Пономарева О. В. Инвариантность текущего энергетического Фурье-спектра действительных дискретных сигналов на конечных интервалах // Технология и конструирование в электронной аппаратуре. 2014. № 1. С. 15–22.

9. Пономарев В. А., Пономарева О. В., Пономарева Н. В. Метод быстрого вычисления дискретного

преобразования Гильберта в частотной области // Современные информационные и электронные технологии. 2014. № 15. С. 183–184.

10. Пономарева О. В., Пономарев А. В., Пономарева Н. В. Формализованное описание погрешности измерения вероятностных характеристик случайных процессов процессорными измерительными средствами // Современные информационные и электронные технологии. 2013. № 14. С. 90–93.

11. Пономарева Н. В., Пономарева О. В., Хворенков В. В. Определение огибающей ангармонического дискретного сигнала на основе преобразования Гильберта в частотной области // Интеллектуальные системы в производстве. 2018. Т. 16. № 1. С. 33–40.

12. Пономарев В. А., Пономарева О. В. Тенденции развития дискретных косвенных измерений параметров электрических сигналов // Метрология. 2017. № 1. С. 20–32.

13. Пономарева О. В., Пономарева Н. В., Пономарева В. Ю. Применение временных окон в векторном спектральном анализе дискретных сигналов // Интеллектуальные системы в производстве. 2016. № 4 (31). С. 19–21.

14. Пономарева Н. В. Проблемы компьютерной спектральной обработки сигналов в музыкальной акустике // Интеллектуальные системы в производстве. 2018. Т. 16. № 1. С. 26–33.

15. Пономарева Н. В. Цифровая спектральная обработка сигналов в музыкальной акустике // DSPA: Вопросы применения цифровой обработки сигналов. 2018. Т. 8. № 2. С. 37–42.

16. Пономарев В. А., Пономарева Н. В. Метод и алгоритм выделения музыкально-акустического сигнала из его смеси со случайным дискретным телеграфным сигналом // Перспективные информационные технологии (ПИТ 2018) : труды Международной научно-технической конференции / под ред. С. А. Прохорова. 2018. С. 161–164.

17. Пономарева Н. В. Предобработка дискретных сигналов при спектральном анализе в системе компьютерной математики MATLAB // Интеллектуальные системы в производстве. 2016. № 4 (31). С. 32–34.

18. Пономарев В. А., Пономарева Н. В. Цифровой спектрально-временной анализ музыкально-акустических сигналов на основе параметрического дискретного преобразования Фурье // Приборостроение в XXI веке – 2017. Интеграция науки, образования и производства : сборник материалов XIII Международной научно-технической конференции. Ижевск, 2018. С. 307–312.

19. Пономарева Н. В., Пономарев В. В. Метод быстрого получения прореженных коэффициентов дискретного преобразования Фурье на основе параметрических дискретных экспоненциальных базисов // DSPA: Вопросы применения цифровой обработки сигналов. 2017. Т. 7. № 1. С. 172–177.

20. Пономарева Н. В., Пономарева В. Ю. Локализация спектральных пиков методом параметрического дискретного преобразования Фурье // Интеллекту-

альные системы в производстве. 2016. № 2 (29). С. 15–18.

21. Пономарева Н. В., Пономарева В. Ю. Метод измерения частоты сигналов на базе параметрического дискретного преобразования Фурье // DSPA: Вопросы применения цифровой обработки сигналов. 2016. Т. 6. № 2. С. 393–397.

22. Аппроксимационный подход к решению задач анализа и интерпретации экспериментальных данных / В. И. Батищев, А. Г. Золин, Д. Н. Косарев, А. Е. Романеев // Вестник Самарского государственного университета. Сер. Технические науки. 2006. № 40. С. 57–65.

23. Батищев В. И., Мелентьев В. С. Измерительно-моделирующий подход к определению интегральных характеристик периодических сигналов // Известия высших учебных заведений. Электромеханика. 2003. № 6. С. 36–39.

24. Батищев В. И., Волков И. И., Золин А. Г. Использование стохастического базиса в задачах восстановления сигналов и изображений // Автметрия. 2017. Т. 53. № 4. С. 127–134.

25. Батищев В. И., Волков И. И., Золин А. Г. Исследование аппроксимационных свойств функциональных базисов в задачах реконструкции изображений при дистанционном зондировании земли // Проблемы управления и моделирования в сложных системах труды XVIII Международной конференции / под ред. Е. А. Федосова, Н. А. Кузнецова, В. А. Виттиха. 2016. С. 304–307.

26. Prokhorov S. A., Kulikovskikh I. M. Unique Condition for generalized Laguerre Functions to solve pole Position Problem // Signal Processing. 2015. Vol. 108. Pp. 25–29.

27. Прохоров С. А., Графкин В. В. Структурно-спектральный анализ случайных процессов. Самара, 2010.

28. Прозоров Д. Е., Петров Е. П. Быстрый поиск шумоподобных сигналов / под ред. Е. П. Петрова. Киров, 2006.

29. Марпл-мл. С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения / пер. с англ. М. : Мир, 1990. 584 с.

30. Gonzalez R. C., Woods R. E. Digital Image Processing, 4th Ed. Published by Pearson. 2018. 1168 p.

31. Прэнтт У. Цифровая обработка изображений : в 2 кн. / пер. с англ. М. : Мир, 1982. 790 с.

References

1. Rabiner L., Gould B. *Teoriya i primeneniye cifrovoy obrabotki signalov. Perevod s angl.* [Theory and application of digital signal processing]. Moscow, World., 1978, 839 p. (in Russ.)

2. Marpl-ml. S.L. *Cifrovoy spektral'nyy analiz i ego prilozheniya: Perevod s angl.* [Digital Spectral Analysis and its Applications]. Moscow, World., 1990, 584 p. (in Russ.)

3. Gonzalez R.C., Woods R.E. Digital Image Processing, 4th Ed. Published by Pearson. 2018. 1168 p.

4. Preht U. *Cifrovaya obrabotka izobrazhenij. V 2-h knigah. Perevod s angl.* [Digital image processing]. Moscow, World., 1982, 790 p. (in Russ.).
5. Ponomareva O.V., Ponomarev A.V. [Recovery of values of continuous frequency spectra of discrete signals by the method of parametric discrete Fourier transform]. *Vestnik IzhGTU imeni M.T. Kalashnikova*, 2015, vol. 18, no. 3, pp. 88-91 (in Russ.).
6. Ponomareva O.V. [Measurement of the spectra of complex signals at finite intervals by the method of aperiodic discrete Fourier transform]. *Intellektual'nye sistemy v proizvodstve*, 2014, no. (23) pp. 100-107. 2014 (in Russ.).
7. Ponomareva O.V., Ponomarev A.V., Ponomarev V.A. [Measurement of the spectra of complex signals at finite intervals by the method of aperiodic discrete Fourier transform]. *Intellektual'nye sistemy v proizvodstve*, 2014, no. 1 (23), pp. 100-107 (in Russ.).
8. Ponomarev V.A., Ponomareva O.V. [Invariance of the current energy Fourier spectrum of real discrete signals at finite intervals]. *Technology and design in electronic equipment*, 2014, no. 1, pp. 15-22 (in Russ.).
9. Ponomarev V.A., Ponomareva O.V., Ponomareva N.V. [The method of fast calculation of the discrete Hilbert transform in the frequency domain]. *Modern information and electronic technologies*, 2014, no. 15, pp. 183-184 (in Russ.).
10. Ponomareva O.V., Ponomarev A.V., Ponomareva N.V. Formalized description of the measurement error of the probabilistic characteristics of random processes with processor measurement tools]. *Modern information and electronic technologies*, 2013, no. 4, pp. 90-93 (in Russ.).
11. Ponomareva N.V., Ponomareva O.V., Hvorenkov V.V. [Determination of anharmonic discrete signal envelope based on the Hilbert transform in the frequency domain]. *Intellektual'nye sistemy v proizvodstve*, 2018, vol. 16, no. 1, pp. 33-40 (in Russ.).
12. Ponomarev V.A., Ponomareva O.V. [Trends in the development of discrete indirect measurements of the parameters of electrical signals]. *Metrology*, 2017, no. 1, pp. 20-32 (in Russ.).
13. Ponomareva O.V., Ponomareva N.V., Ponomareva V.YU. [The use of time windows in the vector spectral analysis of discrete signals]. *Intellektual'nye sistemy v proizvodstve*. 2016, no. 4 (31), pp. 19-21 (in Russ.).
14. Ponomareva N.V. [Problems of computer spectral signal processing in musical acoustics]. *Intellektual'nye sistemy v proizvodstve*, 2018, vol. 16, no. 1, pp. 26-33 (in Russ.).
15. Ponomareva N.V. [Digital spectral signal processing in musical acoustics]. *DSPA Issues of application of digital signal processing*, 2018, vol. 8, no. 2, pp. 37-42 (in Russ.).
16. Ponomarev V.A., Ponomareva N.V. [Method and algorithm for extracting a musical-acoustic signal from its mixture with a random discrete telegraph signal. In the collection]. *Advanced Information Technologies (PIT 2018). Proceedings of the International Scientific and Technical Conference. Edited by S.A. Prokhorov*, 2018, pp. 161-164 (in Russ.).
17. Ponomareva N.V. [Pre-processing of discrete signals in spectral analysis in the computer mathematics system MATLAB]. *Intellektual'nye sistemy v proizvodstve*, 2016, no. 4 (31), pp. 32-34 (in Russ.).
18. Ponomarev V.A., Ponomareva N.V. [Digital spectral-temporal analysis of musical-acoustic signals based on the parametric discrete Fourier transform]. *In the collection: Instrumentation in the XXIst century - 2017. Integration of science, education and production. Collection of materials XXI International Scientific and Technical Conference. Izhevsk*, 2018, pp. 307-312 (in Russ.).
19. Ponomareva N.V., Ponomarev V.V. [The method of quickly obtaining thinned coefficients of the discrete Fourier transform based on parametric discrete exponential bases]. *DSPA: Issues of application of digital signal processing*, 2017, vol.7, no. 1, pp. 172-177 (in Russ.).
20. Ponomareva N.V., Ponomareva V.YU. [Localization of spectral peaks by the parametric discrete Fourier transform method]. *Intellektual'nye sistemy v proizvodstve*, 2016, no. 2 (29), pp. 15-18 (in Russ.).
21. Ponomareva N.V., Ponomareva V.YU. [Method for measuring the frequency of signals based on the parametric discrete Fourier transform]. *DSPA: Issues of application of digital signal processing*, 2016, vol. 6, no. 2, pp. 393-397 (in Russ.).
22. Batishchev V.I., Zolin A.G., Kosarev D.N., Romaneev A.E. [Approximation approach to solving the problems of analyzing and interpreting experimental data]. *Herald of Samara State University. Series: Engineering*, 2006, no. 40, pp. 57-65 (in Russ.).
23. Batishchev V.I., Melent'ev V.S. [Measuring and modeling approach to determining the integral characteristics of periodic signals] *News of higher educational institutions. Electromechanics*, 2003, no. 6, pp. 36-39 (in Russ.).
24. Batishchev V.I., Volkov I.I., Zolin A.G. [The use of the stochastic basis in the problems of the restoration of signals and images]. *Avtometriya*, 2017, vol. 53, no. 4, pp. 127-134 (in Russ.).
25. Batishchev V.I., Volkov I.I., Zolin A.G. [The study of the approximation properties of functional bases in the tasks of image reconstruction during remote sensing of the earth]. *In the collection: Control and modeling problems in complex systems, works of the XVIII International Conference. Edited by: E.A. Fedosova, N.A. Kuznetsova, V.A. Witych*, 2016, pp. 304-307 (in Russ.).
26. Prokhorov S.A., Kulikovskikh I.M. Unique Condition for generalized Laguerre Functions to solve pole Position Problem, *Signal Processing*, 2015. vol. 108. pp. 25-29.
27. Prokhorov S.A., Grafkin V.V. *Strukturno-spektral'nyj analiz sluchajnykh processov* [Structural and spectral analysis of random processes]. Samara, 2010 (in Russ.).
28. Prozorov D.E., Petrov E.P. *Bystryj poisk shumopodobnykh signalov. Edited by: E.P. Petrova* [Quick search for noise-like signals]. Kirov, 2006 (in Russ.).

29. Marpl-mI. S.L. *Cifrovoj spektral'nyj analiz i ego prilozheniya: Perevod s angl.* [Digital Spectral Analysis and its Applications]. Moscow, World., 1990, 584 p. (in Russ.).

30. Gonzalez R.C., Woods R.E. *Digital Image Processing*, 4th Ed. Published by Pearson. 2018. 1168 p.

31. Preht U. *Cifrovaya obrabotka izobrazhenij. V 2-h knigah. Perevod s angl.* [Digital image processing]. Moscow, World., 1982, 790 p. (in Russ.).

Interpolation in the Spatial Domain of Two-dimensional Discrete Signals Using Fast Fourier Transforms

O. V. Ponomareva, DSc in Engineering, Professor, Kalashnikov ISTU

A. V. Ponomarev, PhD in Economics, Associate Professor, Kalashnikov ISTU

It is shown that the generalization of one-dimensional methods of digital processing of discrete signals to the two-dimensional case is not only a nontrivial problem, but often the solution of such a problem is impossible. A solution to the problem of interpolation in the spatial domain of two-dimensional discrete signals using fast Fourier transforms is proposed. The difference between the task of interpolation and approximation of two-dimensional discrete signals is shown. The definition of a discrete two-dimensional signal on a rectangular spatial reference plane in the form of a matrix is given. The mathematical apparatus of matrix and algebraic discrete two-dimensional Fourier transform of two-dimensional discrete signals in the space-frequency domain is considered. A method and algorithm for interpolation of real and complex discrete two-dimensional signals in the spatial domain is developed. The validity and reliability of the proposed interpolation method are illustrated. The results of experimental studies of the proposed interpolation algorithm on model two-dimensional discrete complex signals are presented. A working hypothesis is proposed to improve the efficiency of the proposed interpolation algorithm by generalizing the basis of the discrete two-dimensional Fourier transform (a system of two-dimensional discrete exponential functions) in order to take into account the specifics of the proposed interpolation method.

Keywords: two-dimensional discrete Fourier transform, cyclic two-dimensional correlation function, spatial domain, spatial frequency domain, canonical decomposition of a random signal.

Получено: 15.02.19