УДК 621.372
DOI: 10.22213/2410-9304-2019-3-97-104

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННО-ИНВАРИАНТНЫХ СИСТЕМ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

А. В. Пономарев, кандидат экономических наук, доцент, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова, Ижевск, Россия

В статье рассмотрены теоретические вопросы дискретных линейных пространственно-инвариантных систем обработки сигналов. Даны определения некоторых основных понятий в области двумерной обработки дискретных сигналов. На основе анализа природы происхождения дискретных двумерных сигналов подробно рассмотрены свойства дискретных линейных пространственно-инвариантных систем: суперпозиция, пропорциональность (гомогенность, однородность), коммутативность, физическая реализуемость, устойчивость. В работе приведены результаты анализа принципов, лежащих в основе пространственно-инвариантных (изопланатических) относительно сдвига систем. Подробно рассмотрены свойства разделимых дискретных линейных пространственно-инвариантных систем. Определены характеристики суперсистем, полученных последовательным (каскадным) и параллельным соединением дискретных линейных пространственно-инвариантных субсистем с известными дискретными двумерными передаточными функциями. Рассмотрены дискретные обобщенные линейные двумерные системы. В статье названы причины актуальности и своевременности развития теории линейных пространственно-инвариантных систем обработки дискретных сигналов, а также синтеза двумерных унитарных преобразований с варьируемыми параметрами.

Ключевые слова: линейная пространственно-инвариантная система, обобщенная линейная двумерная система, гомогенность, однородность, коммутативность, физическая реализуемость, устойчивость.

Введение

Прежде чем перейти к рассмотрению теоретических вопросов линейных пространственно-инвариантных систем обработки сигналов, приведем определения некоторых основных понятий в области двумерной обработки сигналов.

В данной работе под *дискретным двумерным сигналом* $x(m,n)$ понимается двумерная последовательность, являющаяся множеством действительных (или в общем случае комплексных) чисел, определенных для упорядоченных пар целых чисел m и n как при $-\infty < m,n < +\infty$ (двумерная последовательность бесконечной длины), так и при $0 \le m \le N_1 - 1$ и $0 \le n \le N_2 - 1$ (двумерная последовательность конечной длины).

Из двух видов описаний дискретного двумерного сигнала $x(m,n)$ в прямоугольной опорной области[1], т. е. при $0 \le m \le N_1 - 1$ и $0 \le n \le N_2 - 1$ наиболее часто используется матричное представление:

$$X_{N_1 \times N_2} =$$

$$= \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & . & . & (N_2 - 1) \end{array} \quad n \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ (N_1 - 1) \\ m \end{array} & \left[\begin{array}{ccccc} x(0,0) & x(0,1) & . & . & x(0,N_2) \\ x(1,0) & x(1,1) & . & . & x(1,N_2) \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ x(N_1,0) & x(N_1,1) & . & . & x(N_1,N_2) \end{array} \right] \end{array} . \quad (1)$$

Природа происхождения дискретных двумерных сигналов может быть различной:

- дискретный двумерный сигнал может быть дискретным по определению, например, как результат считывания амплитуд сигналов с решетки датчиков при сейсморазведке или с решетки гидрофонов при пассивной гидролокации;
- дискретный двумерный сигнал может быть получен в результате двумерной дискретизации непрерывной двумерной функции $x(t_1, t_2)$, где переменные t_1 и t_2 принадлежат континууму величин, описывающих тот или иной объект, то или иное явление[2].

Отметим, что если в первом случае дискретный двумерный сигнал является двумерной по-

[1] **Опорная область** – это диапазон значений переменных m и n, для которого двумерная последовательность отлична от нуля. Типичный дискретный двумерный сигнал в виде двумерной последовательности конечной длины имеет прямоугольную конечную опорную область, т. е. $0 \le m \le N_1 - 1$ и $0 \le n \le N_2 - 1$.

[2] В данной работе при дискретизации непрерывной двумерной функции $x(t_1, t_2)$ предполагается **прямоугольная равномерная сетка** $x(n,m) = x(n \cdot \Delta_n, m \cdot \Delta_m) = x(t_1, t_2) \big|_{t_1 = n \cdot \Delta_n,\, t_2 = m \cdot \Delta_m}$

следовательностью конечной длины из-за ограниченности числа датчиков в решетке в опорной области, то во втором случае диапазон переменных m и n в опорной области дискретного двумерного сигнала обычно ограничивается, исходя из практических соображений.

Теоретические вопросы линейных пространственно-инвариантных систем обработки сигналов

В общем случае дискретная двумерная система обработки сигналов преобразует входной дискретный двумерный сигнал $x(m,n)$ в выходной дискретный двумерный сигнал $y(m,n)$ с помощью некоторого оператора преобразования Φ (рис. 1).

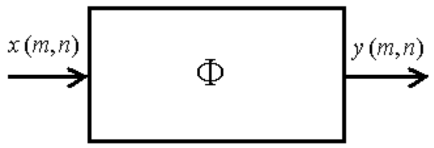

Рис. 1. Представление двумерной дискретной системы

Введем два условных обозначения оператора преобразования Φ:

$$x(m,n) \xrightarrow{\Phi} y(m,n); \quad y(m,n) = \Phi[x(m,n)].$$

Дискретная двумерная система называется линейной, если для нее соблюдается *принцип суперпозиции*:

$$\text{если: } x_1(m,n) \xrightarrow{\Phi} y_1(m,n) \quad \text{и}$$
$$x_2(m,n) \xrightarrow{\Phi} y_2(m,n),$$
$$\text{то: } x_1(m,n) + x_2(m,n) \xrightarrow{\Phi} y_1(m,n) + y_2(m,n); \tag{2}$$

и справедлив *принцип пропорциональности*[3]:

$$a \cdot x_1(m,n) + b \cdot x_2(m,n) \xrightarrow{\Phi} a \cdot y_1(m,n) + $$
$$+ b \cdot y_2(m,n). \tag{3}$$

Дискретная линейная двумерная система называется *пространственно-инвариантной* (*изопланатической*) *относительно сдвига системой*[4]:

$$\text{если: } x_1(m,n) \xrightarrow{\Phi} y_1(m,n), \ \forall \text{ целых } m_0 \text{ и } n_0,$$
$$\text{то: } x_1(m-m_0,\, n-n_0) \xrightarrow{\Phi} y_1(m-m_0,\, n-n_0). \tag{4}$$

Дискретные линейные пространственно – инвариантные системы (ДЛПИ-системы) обладают *свойством коммутативности* (рис. 2):

$$\text{если: } x\ (m,n) \xrightarrow{\text{ДЛПИ система №1}} y_1(m,n) \text{ и}$$
$$x(m,n) \xrightarrow{\text{ДЛПИ система №2}} y_2(m,n),$$

то:

$$x(m,n) \xrightarrow{\text{ДЛПИ система №1}} \xrightarrow{\text{ДЛПИ система №2}} z(m,n);$$
$$x(m,n) \xrightarrow{\text{ДЛПИ система №2}} \xrightarrow{\text{ДЛПИ система №1}} z(m,n). \tag{5}$$

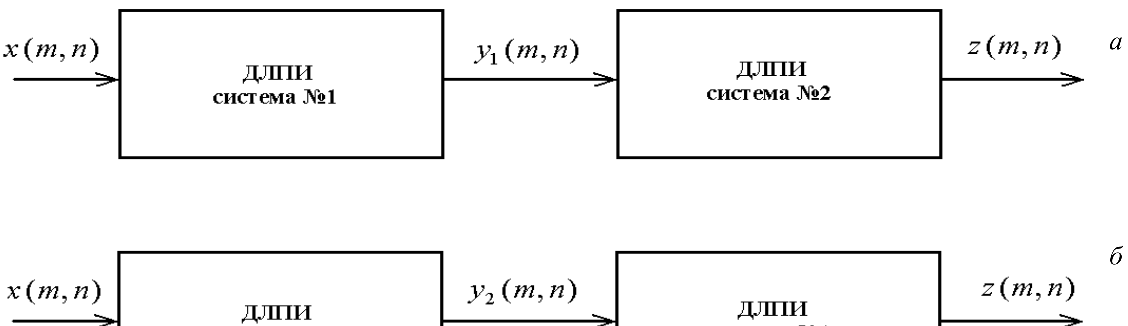

Рис. 2. Свойство коммутативности дискретных линейных пространственно-инвариантных систем

Отклик ДЛПИ-системы на дискретный двумерный единичный импульс (единичный отсчет) $u_0(m,n)$:

$$u_0(m,n) = \begin{cases} 1 \text{ при } & m = n = 0, \\ 0 \text{ при } & m,n \neq 0 \end{cases} \tag{6}$$

представляет собой *дискретную двумерную импульсную характеристику ДЛПИ-системы* $h(m,n)$. В том случае когда $h(m,n) = 0,\ m,n < 0$, ДЛПИ-система называется *физически реализуемой*. Как и в случае одномерной линейной системы с постоянными параметрами, вход и вы-

[3] В зарубежных и отечественных информационных источниках принцип пропорциональности часто называют **свойством гомогенности, или однородности.**

[4] **Пространственно-инвариантные относительно сдвига системы** часто называют дискретными двумерными линейными системами с постоянными параметрами (ДЛПП-системами).

ход ДЛПИ-системы связаны между собой *операцией двумерной свертки*:

$$y(m,n) = x(m,n) * h(m,n) =$$

$$= \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} h(m_1,n_1) \cdot x(m-m_1,n-n_1) =$$

$$= \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} x(m_1,n_1) \cdot h(m-m_1,n-n_1) . \quad (7)$$

В работах [1–3] справедливо отмечаются сложности вычислительного характера применения на практике непосредственно соотношения (7), поскольку для нахождения выходного сигнала ДЛПИ-системы в этом случае необходимо, как правило, вычислять все члены двойной суммы. Далее будут приведены некоторые полезные соотношения для вычисления дискретной двумерной свертки.

Ситуация существенно упрощается для *разделимых ДЛПИ-систем*, импульсные характеристики которых могут быть представлены в виде произведения:

$$h(m,n) = h_1(m) \cdot h_2(n) . \quad (8)$$

Для этого класса систем двумерная свертка (7) находится как последовательное вычисление одномерных сверток. Действительно:

$$y(m,n) = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} h_1(m_1) \cdot h_2(m_2) \cdot x(m-m_1,n-n_1) =$$

$$= \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} h_1(m_1) \cdot [\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} h_2(n_1) \cdot x(m-m_1,n-n_1)] . \quad (9)$$

При изменении m_1 от $-\infty$ до $+\infty$ суммы в квадратных скобках образуют последовательность m_1 одномерных сверток. Обозначив последовательность m_1 одномерных сверток в квадратных скобках через $g(m-m_1,n)$, мы приходим к вычислению следующих m_1 одномерных сверток:

$$y(m,n) = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} h_1(m_1) \cdot g(m-m_1,n) . \quad (10)$$

ДЛПИ-система является *устойчивой системой*, если при ограниченном входном дискретном двумерном сигнале $x(m,n)$ ее выходной дискретный двумерный сигнал $y(m,n)$ ограничен. Необходимым и достаточным условием для устойчивости ДЛПИ систем является *ограниченность их импульсных характеристик*:

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(m,n)| < \infty . \quad (11)$$

Важнейшим математическим инструментом представления дискретного двумерного сигнала $x(m,n)$ являются его *прямое и обратное двумерные z-преобразования.*

Прямое двумерное z-преобразование:

$$X(z_1,z_2) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(m,n) \cdot z_1^{-m} z_2^{-n} . \quad (12)$$

Обратное двумерное z-преобразование:

$$x(m,n) = \frac{1}{4\pi} \oint_{B_1} \oint_{B_2} X(z_1^{m-1} z_2^{n-1}) dz_1 \, dz_2 , \quad (13)$$

где B_1 и B_2 – контуры интегрирования в плоскостях z_1 и z_2.

Введя для прямого и обратного двумерных z-преобразований условные обозначения: $x(m,n) \xrightarrow{z} X(z_1,z_2)$ и $x(m,n) \xleftarrow{z} X(z_1,z_2)$, приведем без доказательств следующие важнейшие соотношения:

$$\text{если: } y(m,n) = x(m,n) * h(m,n) ;$$

$$x(m,n) \xrightarrow{z} X(z_1,z_2) ; \; h(m,n) \xrightarrow{z} H(z_1,z_2) ;$$

$$y(m,n) \xrightarrow{z} Y(z_1,z_2) ,$$

$$\text{то: } Y(z_1,z_2) = X(z_1,z_2) \cdot H(z_1,z_2) ;$$

$$y(m,n) \xleftarrow{z} Y(z_1,z_2) . \quad (14)$$

Дискретная двумерная передаточная функция системы[5] (рис. 1) представляет собой отношение двумерного z-преобразования выходного дискретного двумерного сигнала $y(m,n)$ системы к двумерному z-преобразованию входного дискретного двумерного сигнала $x(m,n)$ системы:

$$H(z_1,z_2) = Y(z_1,z_2) / X(z_1,z_2) =$$

$$=[\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(m,n) \cdot z_1^{-m} z_2^{-n}] / [\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(m,n) \cdot z_1^{-m} z_2^{-n}] . \quad (15)$$

На рис. 3 и 4 приведены характеристики суперсистемы, полученной последовательным и параллельным соединением ДЛПИ субсистем с известными дискретными двумерными передаточными функциями $H_1(z_1,z_2)$, $H_2(z_1,z_2)$, а также импульсными характеристиками $h_1(m,n)$, $h_2(m,n)$ при входном сигнале $x(m,n) \xrightarrow{z} X(z_1,z_2)$

[5] **Дискретную двумерную передаточную функцию** в отечественных и зарубежных информационных источниках часто называют *дискретной двумерной системной функцией*.

Приведенные результаты достаточно просто можно обобщить на суперсистемы, полученные последовательным и параллельным соединением L ДЛПИ-субсистем с известными дискретными двумерными передаточными функциями $H_i(z_1, z_2),\ i = \overline{1, L}$, а также импульсными характеристиками $h_i(m,n),\ i = \overline{1, L}$, при входном сигнале $x(m,n) \xrightarrow{z} X(z_1, z_2)$.

Отметим следующие линейные операции, широко применяемые при обработке как одномерных, так и многомерных сигналов: суперпозиция, свертка, унитарные преобразования[6].

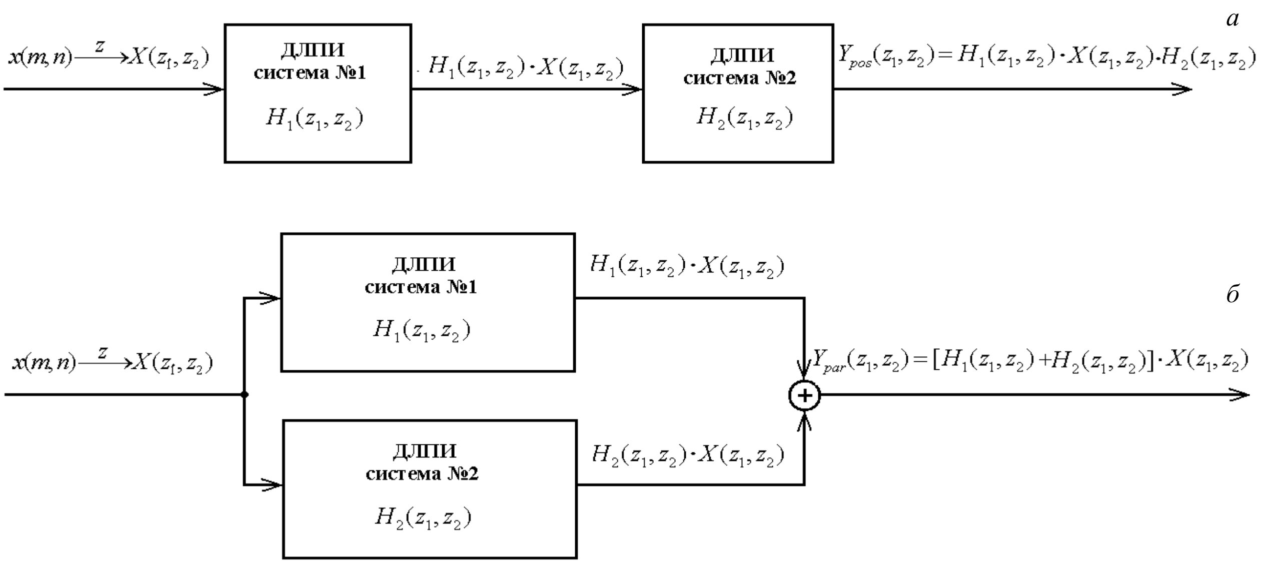

Рис. 3. Дискретная двумерная передаточная функция суперсистемы, полученная последовательным и параллельным соединением ДЛПИ-субсистем: *а* – последовательное соединение систем; *б* – параллельное соединение систем

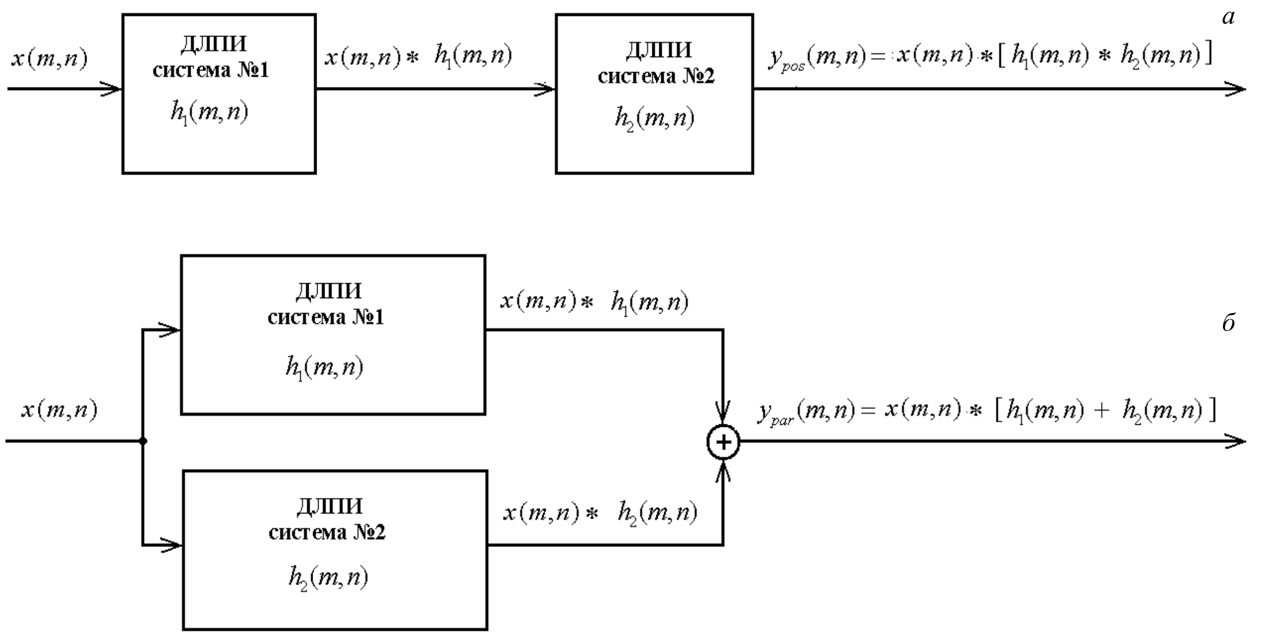

Рис. 4. Дискретная двумерная импульсная характеристика ДЛПИ-суперсистемы, полученной последовательным и параллельным соединением ДЛПИ-субсистем: *а* – последовательное соединение систем; *б* – параллельное соединение систем.

В работах [4, 5] введено обобщение понятий суперпозиции (2) и пропорциональности (3), что позволило расширить класс ДЛПИ-систем, включив в него класс *гомоморфных систем*.

Дискретная двумерная система с оператором преобразования Ψ называется *обобщенной линейной системой*, если для нее соблюдается *принцип обобщенной суперпозиции* и справедлив

[6] Преобразование заданного нормированного векторного пространства называется *унитарным,* если оно сохраняет норму вектора.

принцип обобщенной пропорциональности. Введем для прямого двумерного Ψ - преобразования условное обозначение: $x(m,n) \xrightarrow{\Psi} y(m,n)$.

Принцип обобщенной суперпозиции и принцип обобщенной пропорциональности:

$$\text{если: } x_1(m,n) \xrightarrow{\Psi} y_1(m,n),$$
$$x_2(m,n) \xrightarrow{\Psi} y_2(m,n),$$
$$x_3(m,n) = x_1(m,n) \cdot L \cdot x_2(m,n),$$
$$x_3(m,n) \xrightarrow{\Psi} y_3(m,n),$$

где L – оператор взаимодействия $x_1(m,n)$ и $x_2(m,n)$,

то: оператор Ψ дискретной обобщенной системы должен обладать свойством обобщенной суперпозиции:

$$x_3(m,n) \xrightarrow{\Psi} y_1(m,n) \cdot L \cdot y_2(m,n), \quad (16)$$

и принципу обобщенной пропорциональности:

$$b \cdot L_1 \cdot x\ (m,n) \xrightarrow{\Psi} b \cdot L_1 \cdot y\ (m,n), \quad (17)$$

где b – постоянная величина, а L_1 – оператор обобщенного умножения.

Если оператор преобразования L некоторой дискретной характеристической системы может быть сведен к сложению матриц, а оператор L_1 к умножению матрицы на постоянную величину, то обобщенная дискретная линейная система (рис. 5, *а*) может быть представлена в виде дискретной гомоморфной системы, приведенной на рис. 5, *б*.

Дискретная гомоморфная система (рис. 5, *б*) состоит из трех гомоморфных подсистем:

- дискретной характеристической подсистемы с оператором Θ;
- ДЛПИ-подсистемы;
- дискретной характеристической подсистемы с оператором Θ^{-1}.

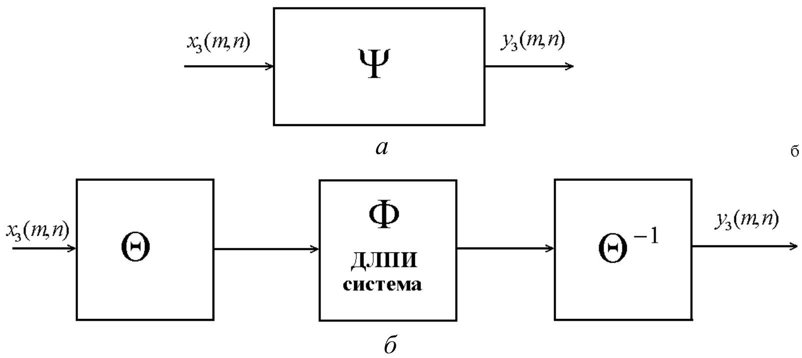

Рис. 5. Обобщенные системы: *а* – дискретная обобщенная система; *б* – гомоморфная система

На рис. 5 Θ – оператор преобразования характеристической системы, обладающий следующими свойствами:
$x_3(m,n) = x_1(m,n) \cdot L \cdot x_2(m,n) \xrightarrow{\Theta} \{x_4(m,n) + {}$ $+ x_5(m,n)\}$; $b \cdot L_1 \cdot x\ (m,n) \xrightarrow{\Theta} b \cdot y(m,n)$;
Θ^{-1} – оператор преобразования системы обратный оператору Θ, где $x_1(m,n) \xrightarrow{\Theta} x_4(m,n)$;
$x_2(m,n) \xrightarrow{\Theta} x_5(m,n)$; $x\ (m,n) \xrightarrow{\Theta} y(m,n)$.

Отметим, что в частном случае для мультипликативных систем, в которых операторами L и L_1 систем являются, соответственно, умножение и возведение в степень, в качестве операторов характеристических систем Θ и Θ^{-1} применяются операции логарифмирования и потенцирования.

Заключение

В настоящее время развитие теории линейных пространственно-инвариантных систем обработки дискретных сигналов является важным и актуальным научным направлением двумерного спектрального анализа, а синтез двумерных унитарных преобразований с варьируемыми параметрами областью активного поиска [6–31]. Это объясняется, во-первых, широким распространением двумерных сигналов во многих предметных областях (например, метеорологии, контроле и технической диагностике, медицине, геологии, акустике и гидроакустике, криминалистике), во-вторых, бурным развитием теории цифровой обработки и разработкой эффективных методов и алгоритмов одномерного спектрального оценивания, в-третьих, проблемами обобщения одномерных линейных систем на двумерные в силу различия в теории этих классов линейных систем.

Библиографические ссылки

1. *Пономарева О. В.* Основы теории дискретных косвенных измерений параметров сигналов. Ижевск : Изд-во ИжГТУ, 2016. 172 с.

2. *Рабинер Л., Гоулд Б.* Теория и применение цифровой обработки сигналов / пер. с англ. М. : Мир. 1978.–839 с.

3. *Dudgeon D. E.* Multidimensional Digital Signal Processing Prentice Hall, 1995. 406 p.

4. *Gonzalez R. C., Woods R. E.* Digital Image Processing, 4th Ed. Published by Pearson. 2018. 1168 pages**.**

5. *Прэтт У.* Цифровая обработка изображений : в 2 кн. / пер. с англ. М. : Мир, 1982. 790 с.

6. *Пономарев В. А., Пономарева О. В., Пономарев А. В.* Измерение временных спектров дискретных сигналов на конечных интервалах // Вестник ИжГТУ имени М. Т. Калашникова. 2016. Т. 19. № 2. С. 80–83.

7. *Пономарева О. В.* Развитие теории и разработка методов и алгоритмов цифровой обработки информационных сигналов в параметрических базисах Фурье : дис. ... д-ра техн. наук: 05.13.01. Ижевск, 2016. 357 с.

8. *Пономарева О. В., Пономарев А. В.* Интерполяция в пространственной области двумерных дискретных сигналов с помощью быстрых преобразований Фурье // Интеллектуальные системы в производстве. 2019. Т. 17. № 1. С. 88–94.

9. *Пономарев В. А., Пономарева О. В.* Тенденции развития дискретных косвенных измерений параметров электрических сигналов // Метрология. 2017. № 1. С. 20–32.

10. *Пономарева О. В.* Неинвариантность скользящего энергетического параметрического Фурье-спектра действительных тональных сигналов // Цифровая обработка сигналов. 2014. № 2. С. 7–14.

11. *Пономарева О. В., Пономарев А. В.* Быстрый метод горизонтальной скользящей простванственно-частотной обработки // Интеллектуальные системы в производстве. 2019. Т. 17. № 2. С. 81–87.

12. *Пономарева О. В.* Измерение спектров комплексных сигналов на конечных интервалах методом апериодического дискретного преобразования Фурье // Интеллектуальные системы в производстве. 2014. № 1 (23). С. 100–107.

13. *Пономарев В. А., Пономарева О. В., Пономарева Н. В.* Метод быстрого вычисления дискретного преобразования Гильберта в частотной области // Современные информационные и электронные технологии. 2014. Т. 1. № 15. С. 183–184.

14. *Пономарева О. В., Пономарев А. В., Пономарева Н. В.* Иерархическое морфологическо-информационное описание систем функционального диагностирования объектов // Современные информационные и электронные технологии, 2013. – Т.1. – № 14. – С. 121–124.

15. *Пономарева О. В., Пономарев А. В., Пономарева Н. В.* Формализованное описание погрешности измерения вероятностных характеристик случайных процессов процессорными измерительными средствами // Современные информационные и электронные технологии. 2013. Т. 2. № 14. С. 90–93.

16. *Пономарева О. В.* Теоретико-вероятностные характеристики случайных дискретных мнформационных сигналов и аксиомы их измерения // Интеллектуальные системы в производстве. 2019. Т. 17. № 2. С. 73–80.

17. *Пономарева Н. В.* Проблемы компьютерной спектральной обработки сигналов в музыкальной акустике // Интеллектуальные системы в производстве. 2018. Т. 16. № 1. С. 26–32.

18. *Пономарева Н. В., Пономарева О. В., Хворенков В. В.* Определение огибающей ангармонического дискретного сигнала на основе преобразования Гильберта в частотной области // Интеллектуальные системы в производстве. 2018. Т. 16. № 1. С. 33–40.

19. *Пономарева Н. В., Пономарева В. Ю.* Локализация спектральных пиков методом параметрического дискретного преобразования Фурье // Интеллектуальные системы в производстве. 2016. № 2 (29). С. 15–18.

20. *Пономарева Н. В.* Предобработка дискретных сигналов при спектральном анализе в системе компьютерной математики – MATLAB // Интеллектуальные системы в производстве. 2016. № 4 (31). С. 32–34.

21. *Пономарева О. В., Пономарева Н. В., Пономарева В. Ю.* Применение временных окон в векторном анализе дискретных сигналов // Интеллектуальные системы в производстве. 2016. № 2 (29). С. 19–21.

22. *Пономарев В. А., Пономарева О. В., Пономарева Н. В.* Инверсия дискретного времени и параметрическое дискретное преобразование Фурье // Интеллектуальные системы в производстве. 2016. № 4 (31). С. 25–31.

23. *Пономарев В. А., Пономарева О. В.* Обобщение дискретного преобразования Фурье для интерполяции во временной области // Известия высших учебных заведений. Радиоэлектроника. 1983. Т. XXVI. № 9. С. 67–68.

24. *Пономарева О. В.* Инвариантность скользящего энергетического спектра Фурье дискретных сигналов в базисной системе параметрических экспоненциальных функций // Вестник ИжГТУ имени М. Т. Калашникова. 2014. № 2 (62). С. 102–106.

25. *Пономарева О. В., Алексеев В. А., Пономарев А. В.* Быстрый алгоритм измерения спектра действительных сигналов методом апериодического дискретного преобразования Фурье // Вестник ИжГТУ имени М. Т. Калашникова. 2014. № 2(62). С. 106–109.

26. *Пономарев В. А., Пономарева О. В.* Инвариантность текущего энергетического Фурье - спектра комплексных дискретных сигналов на конечных интервалах // Известия высших учебных заведений России. Радиоэлектроника. 2014. № 2. С. 8–16.

27. *Пономарева О. В., Пономарев В. А.* Измерение текущего энергетического фурье-спектра комплексных и действительных сигналов на конечных интервалах // Интеллектуальные системы в производстве. 2013. № 2(22). С. 149–157.

28. *Пономарев В. А., Пономарева О. В., Пономарев А. В.* Обобщенная функционально-структурная модель информационно-измерительных систем функционального диагностирования объектов // Современные информационные и электронные технологии. 2013. Т. 1. № 14. С. 115–118.

29. *Пономарева О. В., Пономарева Н. В.* Модификация фильтра на основе частотной выборки путем обобщения разностного уравнения нерекурсивного гребенчатого фильтра // Современные информационные и электронные технологии. 2013. Т. 1. № 14. С. 244–247.

30. *Пономарева О. В.* Горизонтальная скользящая пространственно-частотная обработка двумерных дискретных действительных сигналов // Интеллектуальные системы в производстве. 2019. Т. 17. № 1. С. 78–87.

31. *Пономарев А. В.* Двумерная обработка сигналов в дискретных базисах Фурье // Интеллектуальные системы в производстве. 2019. Т. 17. № 1. С. 71–77.

References

1. Ponomareva O.V. *Osnovy teorii diskretnyh kosvennyh izmerenij parametrov signalov* [Fundamentals of the theory of discrete indirect measurement parameters of signals]. Izhevsk: Publishing IzhGTU, 2016, 172 p. (in Russ.).

2. Rabiner L., Gould B. *Teoriya i primenenie cifrovoj obrabotki signalov. Perevod s angl.* [Theory and application of digital signal processing]. Moscow, Mir Publ., 1978, 839 p.(in Russ.).

3. Dudgeon D.E. Multidimensional Digital Signal Processing Prentice Hall, 1995. 406 p.

4. Gonzalez R.C., Woods R.E. Digital Image Processing, 4th Ed. Published by Pearson. 2018. 1168 pages.

5. Prehtt U. *Cifrovaya obrabotka izobrazhenij. V 2-h knigah. Perevod s angl.* [Digital image processing]. Moscow, Mir Publ., 1982, 790 p. (in Russ.).

6. Ponomarev V.A., Ponomareva O.V., Ponomarev A.V. [Measurement of time spectra of discrete signals at finite intervals]' *Vestnik IzhGTU imeni M.T.Kalashnikova,* 2016, vol. 19, no. 2, pp. 80-83 (in Russ.).

7. Ponomareva O.V. *Razvitie teorii i razrabotka metodov i algoritmov cifrovoj obrabotki informacionnyh signalov v parametricheskih bazisah Fur'e* [Development of the theory and development of methods and algorithms for digital processing of information signals in parametric Fourier bases]: PhD thesis. Izhevsk, 2016, 357 p. (in Russ.).

8. Ponomareva O.V., Ponomarev A.V. [Spatial interpolation of two-dimensional discrete signals using fast Fourier transforms]. *Intellektual'nye sistemy v proizvodstve.* 2019, vol. 17, no. 1, pp. 88-94 (in Russ.).

9. Ponomarev V.A., Ponomareva O.V. [Trends in the development of discrete indirect measurements of the parameters of electrical signals]. *Metrology*, 2017, no. 1, pp. 20-32 (in Russ.).

10. Ponomareva O.V. [Noninvariance of the sliding energy parametric Fourier spectrum of real tonal signals]. *Cifrovaya obrabotka signalov*, 2014, no. 2, pp. 7-14 (in Russ.).

11. Ponomareva O.V., Ponomarev A.V. [Fast Horizontal Sliding Frequency Span Processing Method]. *Intellektual'nye sistemy v proizvodstve.* 2019, vol. 17, no. 2, pp. 81-87 (in Russ.).

12. Ponomareva O.V. [Measurement of the spectra of complex signals at finite intervals by the method of aperiodic discrete Fourier transform]. *Intellektual'nye sistemy v proizvodstve*, 2014, no. (23), pp. 100-107 (in Russ.).

13. Ponomarev V.A, Ponomareva O.V., Ponomareva N.V. [The method of fast calculation of the discrete Hilbert transform in the frequency domain]. *Modern information and electronic technologies,* 2014, no. 15, pp. 183-184 (in Russ.).

14. Ponomareva O.V., Ponomarev A.V., Ponomareva N.V. [Hierarchical morphological and informational description of the systems of functional diagnostics of objects]. *Modern information and electronic technologies,* 2013, no.14, pp. 121-124 (in Russ.).

15. Ponomareva O.V., Ponomarev A.V., Ponomareva N.V. Formalized description of the measurement error of the probabilistic characteristics of random processes with processor measurement tools]. *Modern information and electronic technologies*, 2013, no. 14, pp. 90-93 (in Russ.).

16. Ponomareva O.V. [Probability Theoretical Characteristics of Random Discrete Mformation Signals and the Axioms of Their Measurement]. *Intellektual'nye sistemy v proizvodstve.* 2019, vol. 17, no. 2, pp. 73-80 (in Russ.).

17. Ponomareva N.V. [Problems of computer spectral signal processing in musical acoustics] *Intellektual'nye sistemy v proizvodstve*, 2018, vol. 16, no. 1, pp. 26-33 (in Russ.).

18. Ponomareva N.V., Ponomareva O.V., Hvorenkov V.V. [Determination of anharmonic discrete signal envelope based on the Hilbert transform in the frequency domain]. *Intellektual'nye sistemy v proizvodstve*, 2018, vol.16, no. 1, pp. 33-40 (in Russ.).

19. Ponomareva N.V, Ponomareva V.YU. [Localization of spectral peaks by the parametric discrete Fourier transform method]. *Intellektual'nye sistemy v proizvodstve*, 2016, no. 2 (29), pp. 15-18 (in Russ.).

20. Ponomareva N.V. [Pre-processing of discrete signals in spectral analysis in the computer mathematics system MATLAB]. *Intellektual'nye sistemy v proizvodstve*, 2016, no. 4 (31). pp. 32-34 (in Russ.).

21. Ponomareva O.V., Ponomareva N.V, Ponomareva V.YU. [The use of time windows in the vector spectral analysis of discrete signals]. *Intellektual'nye sistemy v proizvodstve.* 2016, no. 4 (31), pp. 19-21 (in Russ.).

22. Ponomarev V.A., Ponomareva O.V., Ponomareva N.V. [Discrete time inversion and parametric discrete Fourier transform]. *Intellektual'nye sistemy v proizvodstve*, 2016, no. 4 (31). pp. 25-31 (in Russ.).

23. Ponomarev V.A., Ponomareva O.V. [Generalization of the discrete Fourier transform for interpolation in the time domain].*Izvestiya vysshih uchebnyh zavedenij. Radioelektronika.* 1983, vol. 26, no. 9, pp. 67-68 (in Russ.).

24. Ponomareva O.V. [Invariance of the Fourier sliding energy spectrum of discrete signals in the basic system of parametric exponential functions]. *Vestnik IzhGTU imeni M.T. Kalashnikova*, 2015, no. 2 (62), pp. 102-106 (in Russ.).

25. Ponomareva O.V., Alekseev V.A., Ponomarev A.V. [Fast algorithm for measuring the spectrum of real signals by the aperiodic discrete Fourier transform method]. *Vestnik IzhGTU imeni M.T.Kalashnikova*, 2015, no. 2 (62), pp. 106-109 (in Russ.).

26. Ponomarev V.A., Ponomareva O.V. [Invariance of the current energy Fourier spectrum of complex discrete signals at finite intervals]. *News of higher educational institutions of Russia. Radio electronics*, 2014, no. 2, pp. 8-16 (in Russ.).

27. Ponomareva O.V., Ponomarev V.A. [Measurement of the current energy Fourier spectrum of complex and real discrete signals at finite intervals]. *Intellektual'nye sistemy v proizvodstve*, 2013, no. 2 (22), pp. 149-157 (in Russ.).

28. Ponomarev V.A., Ponomareva O.V., Ponomarev A.V. [Generalized functional-structural model of information-measuring systems for functional diagnostics of objects]. *Modern information and electronic technologies*, 2013, vol. 1, no. 14, pp. 115-118 (in Russ.).

29. Ponomareva O.V., Ponomareva N.V. [Filter modification based on frequency sampling by generalizing the difference equation of a non-recursive comb filter]. *Modern information and electronic technologies*, 2013, vol. 1, no. 14, pp. 244-247 (in Russ.).

30. Ponomareva O.V. [Horizontal sliding spatial-frequency processing of two-dimensional discrete real signals]. *Intellektual'nye sistemy v proizvodstve.* 2019, vol. 17, no. 1, pp. 78-87 (in Russ.).

31. Ponomarev A. V. [Two-dimensional signal processing in discrete Fourier bases]. *Intellektual'nye sistemy v proizvodstve.* 2019, vol. 17, no. 1, pp. 71-77 (in Russ.).

* * *

Theoretical Issues of Linear Spatial Invariant Systems of Signal Processing

A. V. Ponomarev, PhD in Economics, Associate Professor, Kalashnikov ISTU, Izhevsk, Russia

The paper considers theoretical issues of discrete linear spatial invariant systems of signal processing. Definitions are given for the main concepts in the field of two-dimensional processing of discrete signals. Basing on analysis of the nature of origin of discrete two-dimensional signals, the properties of discrete linear spatial invariant systems are considered in details: superposition, proportionality (homogeneity, uniformity), commutativity, physical implementability, stability. The paper presents the results of analysis of principles lying in the basis of spatial invariant (isoplanatic) systems relative to the shift. Properties of separable discrete linear spatial invariant systems are considered in details. Characteristics of super systems are determined which are obtained by a consequent (cascade) and parallel connection of discrete linear spatial invariant subsystems with the assigned discrete two-dimensional transmission functions. Generalized discrete linear two-dimensional systems are considered. The paper states the reasons of the urgency and expediency of the development of the theory of linear spatial invariant systems of discrete signal processing and the synthesis of two-dimensional unitary transforms with varying parameters.

Keywords: linear spatial invariant system, generalized linear two-dimensional system, homogeneity, uniformity, commutativity, physical implementability, stability.

Получено: 21.03.19