

УДК 621.833.15

DOI 10.22213/2410-9304-2019-3-14-19

К СИСТЕМНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ПРЯМОЗУБЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПЕРЕДАЧ

В. И. Кучерюк, кандидат технических наук, профессор, Тюменский индустриальный университет, Тюмень, Россия

Д. Т. Бабичев, доктор технических наук, доцент, Тюменский индустриальный университет, Тюмень, Россия

И. В. Шаптала, Тюменский индустриальный университет, Тюмень, Россия

В данной работе выполнено математическое моделирование одного из важных блоков системной оптимизации геометрической формы зуба по напряженно-деформированному состоянию, который связан с надежностью передачи. Составлена функция оптимизации, основанная на системном методе. Проведено исследование напряженного состояния; показано, что прочность зуба обеспечивается в основном изгибной и контактной прочностью в области ножки зуба. Рассмотрены по отдельности оптимизация геометрии зуба по изгибным и контактным напряжениям. Определен оптимальный контур зуба в корневой части от действия сил в зацеплении, обеспечивающих усталостную прочность при изгибе. Выполнена оптимизация по контактным напряжениям – получена формула для длины контакта. Анализ показал, что для расчета на прочность зуба отпадает необходимость решать плоскую задачу теории упругости, достаточно балочной теории и формулы Герца с учетом трения. Для переходной кривой при отношении наименьшего радиуса кривизны к половине ширины зуба меньше 0,6 необходимо уточнение методом моментной депланационной теории упругости. Контур зуба представлен составной функцией в виде сплайна. Отмечены положительные и отрицательные стороны различных профилей зуба (эвольвенты, параболы и переходной кривой).

Ключевые слова: композит, оптимизация, прямозубая цилиндрическая передача, математическая модель.

Введение

В работах [1–3] и многочисленной учебной литературе приведены методики проектирования зубчатых колес, основанные на значительном числе уточняющих коэффициентов с использованием теоретических и экспериментальных исследований. Целью нашей работы является проанализировать существующие математические описания контура; предложить форму контура, соответствующую оптимальному распределению напряжений по поверхности зацепления и условию выполнения основной теоремы зубчатого зацепления; для учета факторов (напряженное состояние, плавность хода в процессе зацепления, отсутствие подрезания зуба) использовать сплайн-функцию; за счет оптимального распределения напряжений при сложном сопротивлении зуба нагружению повысить усталостную прочность.

В настоящее время имеется достаточно информации для построения математических моделей системной оптимизации зубчатых передач. Так, в статье [4] для оптимизации передачи выбран критерий – оптимизация нагрузочной способности для цилиндрических прямозубых передач из условий изгибной и контактной прочности. Приведены две формулы для крутящего момента, учитывающие различные факторы, влияющие на передачу через коэффициенты.

Моделирование и оптимизация геометрии зуба

Механическая система передачи состоит из зубчатых колес, валов, подшипников, опор. Физико-механические явления, сопровождающие работу передачи: силы, трение, усталость материала, преобразование механической энергии в тепловую, разрушение, деформации. Для зубчатых передач управляющими параметрами являются: тип передачи, распределение передаточного отношения по ступеням в многоступенчатой передаче, материал, термообработка материала, технология изготовления колес, коэффициенты смещения x_1 и x_2 , модуль m , число зубьев z , коэффициент перекрытия, геометрическая форма зуба, коэффициент нагрузки, передаточное число.

В качестве критерия оптимизации k принимаем соотношение «цена – качество» с учетом последовательных преобразований:

$$\begin{aligned}
 k &= \frac{C}{\eta \cdot N^{0,3(\lg N+1)}} = \frac{C \cdot P_2}{P_1 \cdot N^{0,3(\lg N+1)}} = \\
 &= \frac{C \cdot 2\pi n_2 T_2}{2\pi n_1 T_1 \cdot N^{0,3(\lg N+1)}} = \frac{C T_2}{u \cdot T_1 \cdot N^{0,3(\lg N+1)}} = \\
 &= \frac{C \cdot F_t \cdot r_{a2}}{u \cdot F_t \cdot r_{a1} N^{0,3(\lg N+1)}} = \frac{C}{\eta \cdot N^{0,3(\lg N+1)}}, \quad (1)
 \end{aligned}$$

где η – коэффициент полезного действия; T_1 и T_2 – вращающие моменты на ведущем и ведомом

мом валах; r_{a1} и r_{a2} – радиусы окружностей выступов зубьев ведущего и ведомого колес (см. рис. 1); F_t – компонента силы взаимодействия пары зубьев F_n (рис. 1); $u = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_{a2}}{r_{a1}}$ – передаточное число; N – серийность изготовления передачи, шт./год; $N^{0,3(\lg N + 1)}$ – формула Г. А. Снесарева [5].

Функцию, управляющую оптимизацией, представим в виде [6]:

$$C = \sum_{i=1}^6 \alpha_i C_i, \tag{2}$$

где α_i – весовые коэффициенты, задаваемые в зависимости от назначения передачи, степени ответственности, ценового блока C_i ; C_1 – стоимость материала; C_2 – стоимость изготовления деталей передачи; C_3 – стоимость монтажа передачи; C_4 – стоимость транспортировки изделия; C_5 – накладные расходы; C_6 – стоимость работ в процессе эксплуатации.

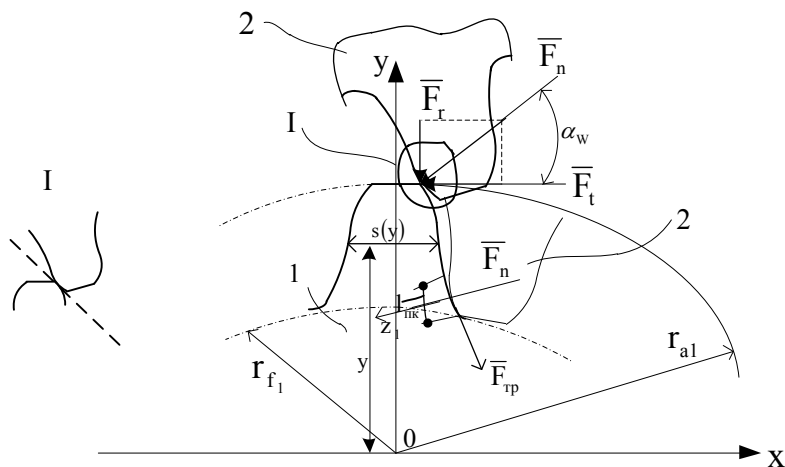


Рис. 1. Усилия в зацеплении прямозубых цилиндрических колес

Ограничения для обеспечения надежности передачи:

- 1) максимальный вращающий момент, $T \leq T^{\max}$;
- 2) условие непрерывного зацепления, $\varepsilon_a \geq 1$;
- 3) расчетная долговечность по времени наработки, $t \geq t^{\max}$;
- 4) условия выполнения основной теоремы зубчатого зацепления (геометро-кинематические условия касания зубьев);
- 5) отсутствие поднутрения (подрезания зуба).

Стоимость изготовления зубчатого колеса можно записать в следующем виде:

$C_2 = \sum_j^n \alpha_{j2} C_{j2}$, где α_{j2} – весовые коэффициенты, C_{j2} – стоимость определенной технологической операции, которая зависят от методов изготовления колеса.

Аналогично можно записать остальные C_i формулы (2).

Работа зубчатого зацепления сопровождается динамической пульсирующей нагрузкой зуба. Поле напряжений перемещается от головки к ножке зуба, меняясь от контактного до изгибно-го по максимальным напряжениям. Переменные

напряжения вызывают усталость материала зуба. От контактных напряжений в поверхностном слое возникают микротрещины, развивающиеся от попадания масла и растягивающих напряжений от изгиба зуба. Кроме того, определенную отрицательную лепту вносит явление усталости при фреттинге, сингулярность растягивающих и сжимающих напряжений от сдвига на границе контакта двух зубьев.

Анализ вышеприведенных сведений приводит к расчетной области по усталости – ножки зуба. Оптимизация геометрической формы зуба по усталостной прочности учитывается составляющими C_1 , C_2 и C_4 формулы (2).

Рассмотрим отдельно оптимизацию геометрии зуба по изгибным и контактным напряжениям.

Для снижения концентрации напряжений при изгибе (отсутствие существенного градиента) принимаем условие:

$$\sigma_{F \max} = \text{const}.$$

В работе [7] показано, что для консольной балки (принятая модель зуба) в районе зацепления напряженное состояние вблизи с поверхностным слоем практически совпадает с реше-

нием плоской задачи классической теории упругости. Как сказано в [8], при отношении радиуса кривизны к половине ширины зуба в корне зуба меньше 0,6 погрешность неучета деформации по моментной теории упругости составляет порядка 30 %. Поэтому оптимальную форму зуба в корневой части определяют по балочной теории изгиба, а в случае необходимости производят уточнение по деформационной теории упругости.

Определяем оптимальный контур зуба в корневой части при действии силы \overline{F}_n (зацепление в вершине зуба, рис. 1). Сила \overline{F}_n учитывает распределение между парами зубьев, концентрацию нагрузки и динамичность. Используя принцип независимости действия сил и разложив силу \overline{F}_n на составляющие \overline{F}_r и \overline{F}_t , напряженное состояние представим суммой напряжений от изгиба силой \overline{F}_t и внецентренного сжатия силой \overline{F}_r :

$$\sigma_F = \sigma_{F_t}^u + \sigma_{F_r}^u + \sigma_{F_r}^{сж}. \quad (3)$$

Напряжения при плоском изгибе определяются по формуле

$$\sigma_{F_t}^u = \frac{M_{F_t} \cdot x_k}{I_z} = \frac{3F_t \cdot (r_{a1} - y)}{2b_w \cdot x_k^2}, \quad (4)$$

где $M_{F_t} = F_t \cdot (r_{a1} - y)$ – изгибающий момент; x_k, y – координаты точек контура зуба, где определяется напряжение; r_{a1} – радиус выступов зубчатого колеса; $I_z = \frac{b_w \cdot (2x_k)^3}{12}$ – момент инерции площади поперечного сечения зуба; b_w – ширина зуба.

Второе слагаемое формулы (3) запишем в виде (для части зуба $x > 0$):

$$\sigma_{F_r}^u = -\frac{M_{F_r} \cdot x_k}{I_z} = -\frac{3F_r \cdot s}{2b_w \cdot x_k^2}, \quad (5)$$

где $M_{F_r} = F_r \cdot s$ – изгибающий момент; s – ширина зуба при $y = r_{a1}$.

Сжатие зуба (третье слагаемое в (3)) определяется формулой

$$\sigma_{F_r}^{сж} = -\frac{F_r}{b_w \cdot 2x_k} = -\frac{F_r}{2b_w \cdot x_k}. \quad (6)$$

Подставим выражения (4)–(6) в (3), затем преобразуем:

$$\sigma_F = -\frac{3F_t}{2b_w} \cdot \frac{r_{a1} - s - y}{x_k^2}. \quad (7)$$

Ограничения по максимальному вращающему моменту и расчетной долговечности можно сформулировать как условие усталостной прочности при изгибе:

$$\sigma_{F_t}^{\max} \leq [\sigma_F]. \quad (8)$$

С учетом (7) выражение (8) примет вид после преобразования:

$$x_k^2 + py - q = 0, \quad (9)$$

где

$$p = \frac{3F_t}{2b_w \cdot [\sigma_F]}, \quad q = \frac{3F_t \cdot (r_{a1} - s)}{2b_w \cdot [\sigma_F]}, \quad q = p \cdot (r_{a1} - s)$$

$$\text{или } x = \pm \sqrt{q - py} = \pm \sqrt{p \cdot (r_{a1} - s - y)}.$$

Таким образом, оптимальная форма корневой части зуба, обеспечивающая усталостную прочность при изгибе, определяется кривой (9).

Перейдем к оптимизации по контактным напряжениям в корневой части зуба.

При взаимодействии пары зубьев в корневой части колеса 1 возникают сила нормального давления \overline{F}_n и сила трения \overline{F}_m (рис.1). Сила \overline{F}_n учитывает распределение нагрузки между зубьями, концентрацию и динамичность нагрузки; $F_m = k_m \cdot F_n$, где k_m – коэффициент трения. Локальные координатные оси x_1, z_1 проведены через центр площади касания пары зубьев (рис. 1).

Концентрация контактных напряжений всегда меньше при согласованных контактирующих поверхностях. Это будет наблюдаться при «зеркальных» геометрических формах поверхностей зуба у корневой части колеса 1 и головки зуба колеса 2, т. к. в этом случае больше поверхность контакта (зацепление Новикова).

Контактные нормальные напряжения с учетом трения определим согласно принципу независимости действия сил:

$$\sigma_n = \sigma_{1n} + \sigma_{2n}. \quad (10)$$

Напряжения σ_{1n} от действия силы F_n определим по формуле Герца:

$$\sigma_{1n} = \sqrt{\frac{q \cdot E_1 E_2}{\rho_{np} \pi [E_1 (1 - \mu_2^2) + E_2 (1 - \mu_1^2)]}}, \quad (11)$$

где $q = \frac{F_n}{A_k}$ – интенсивность давления,

$A_k = b_w \cdot l_k$ – площадь контакта; l_k – длина кон-

такта; E_1, E_2 – модули упругости материалов колес; μ_1, μ_2 – коэффициенты Пуассона; $\rho_{пр}$ – приведенный радиус кривизны колес (цилиндров), определяемый из соотношения $\frac{1}{\rho_{пр}} = \frac{1}{r_1} \pm \frac{1}{r_2}$; r_1, r_2 – радиусы кривизны в зоне контакта.

Контактные напряжения $\sigma_{2н}$ зависят от геометрической формы поверхности контакта; однонаправленное касательное усилие, распределенное по эллиптической области полупространства [9]:

$$q_T(x_1, z_1) = q_{от} \cdot \left[1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{z_1^2}{b^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (12)$$

где a, b – полуоси эллипса.

Для круговой области:

$$q_T(x_1, z_1) = q_{от} \cdot \left[1 - \frac{z_1^2}{a^2} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (13)$$

Согласно граничным условиям имеем наибольшие касательные напряжения:

$$\tau_{max} = q_T(0, 0) = q_{от}, \quad (14)$$

или

$$\tau_{max} = k_m \cdot \frac{F_n}{A_k} = \frac{k_m F_n}{l_k b_w}. \quad (15)$$

В работе [10] приведено приближенное соотношение нормальных и касательных напряжений для контактных задач:

$$\tau_{max} \approx 0,32 \sigma_{max}, \quad (16)$$

т. е.

$$\sigma_{2н}^{max} \approx 3,12 \tau_{max}. \quad (17)$$

Оптимальную длину контакта l_k определим из ограничений по вращающему моменту и расчетной долговечности через контактные напряжения:

$$\sigma_H^{max} \leq [\sigma_{H \lim}], \quad (18)$$

$[\sigma_{H \lim}] = \frac{\sigma_{H \lim} \cdot z_H}{s_H}$ – допускаемое напряжение;

z_H – коэффициент безопасности; s_H – коэффициент долговечности; $\sigma_{H \lim}$ – предел выносливости.

С учетом (10), (11), (15), (17), (18) l_k определяется из уравнения

$$\sqrt{\frac{F_n \cdot E_1 E_2}{b_w l_k \rho_{пр} \pi [E_1 (1 - \mu_2^2) + E_2 (1 - \mu_1^2)]}} + \frac{3,12 k_T F_n}{b_w l_k} = [\sigma_{H \lim}]. \quad (19)$$

После преобразования уравнение (19) примет вид

$$l_k^2 + p l_k + q = 0, \quad (20)$$

где

$$p = -\frac{F_n}{b_w \cdot [\sigma_{H \lim}]^2} \times \left[\frac{E_1 E_2}{\pi \rho_{пр} [E_1 \cdot (1 - \mu_2^2) + E_2 \cdot (1 - \mu_1^2)]} + 6,24 k_1 \right],$$

$$q = -\frac{9,73 \cdot k_T^2 F_n^2}{b_w^2 \cdot [\sigma_{H \lim}]^2}.$$

Из уравнения (20) следует минимальное значение l_k :

$$l_k = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Для того чтобы учесть много факторов, имеет смысл контур зуба представить синтезированной функцией в виде сплайна. При использовании композита для зуба модули упругости заменяем приведенными.

Анализ результатов

Проведем анализ полученных результатов для профилей зуба при эвольвентном зацеплении и зацеплении Новикова.

На рис. 2 показаны различные контуры зуба. На рис. 2, а (левая часть зуба) боковая поверхность зуба представлена в виде сплайна: верхняя часть – эвольвента, средняя – парабола (9), переходная кривая – дуга окружности [11]. Точки соединения находятся из условия общей касательной.

На рис. 2, б показана эпюра изгибных нормальных напряжений для верхнего слоя.

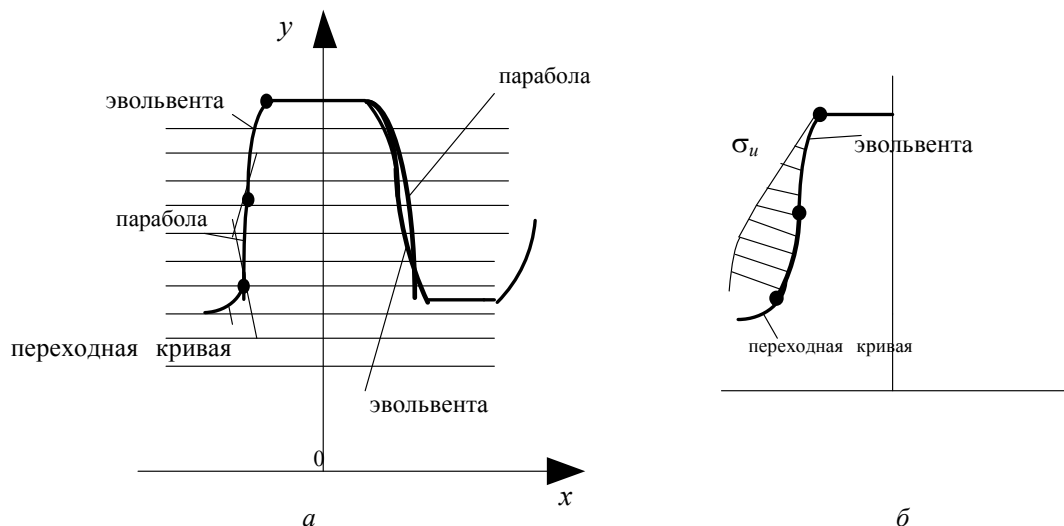


Рис. 2. Профили зуба

Обе кривые (парабола и эвольвента) построены при следующих данных: $d_1 = 104$ мм, $d_2 = 176$ мм, $m = 7,83$ мм, $F_t = 38,46$ кН, $p_t = 25,12$ мм, $s = 12,56$ мм, $b = 56$ мм, $\alpha = 20^\circ$, $T = 2$ кНм, $r_{a1} = 98,703$ мм, $[\sigma_r] = 315$ МПа.

Кратко отметим положительные и отрицательные стороны профилей зуба. Положительные: эвольвента – обеспечивает статическую прочность, условия зацепления (при коэффициенте зацепления больше одного), отработана технология изготовления, опыт эксплуатации; парабола – обеспечивает усталостную прочность, условия зацепления; повышенная усталостная прочность – амплитуда волны изгибных напряжений постоянная; зацепление Новикова – работает при коэффициенте зацепления от единицы и выше, повышенная нагрузочная способность.

Отрицательные: эвольвента – хорошо работает при коэффициенте зацепления больше двух; пониженная усталостная прочность – в процессе зацепления волна изгибных напряжений имеет переменную амплитуду; парабола – при одинаковых профилях двух зубьев в зацеплении меньше площадь контакта, потребуются длительные испытания на надежность.

Выводы

Указано, что для наиболее нагруженной части зуба напряжение достаточно определять при продольно-поперечном изгибе балки, и только при отношении радиуса кривизны к половине ширины зуба меньше 0,6 требуется уточнение по моментной депланационной теории упругости. При этом для большинства зубчатых зацеплений это уточнение не потребуется.

Использование предложенной формулы для описания контактной поверхности в составе сплайн-функции упростит технологию изготовления зубчатых колес, равномерное напряженное состояние повысит усталостную прочность зуба по сравнению с эвольвентной формой поверхности. Это приведет к снижению общей стоимости зубчатого зацепления из-за уменьшения составляющих C_2 и C_6 в формуле (2).

Библиографические ссылки

1. Айрапетов Э. Л., Генкин М. Д., Ряснов Ю. А. Статика зубчатых передач. М.: Наука, 1983. 143 с.
2. Гулиа Н. В., Клоков В. Г., Юрков С. А. Детали машин. М.: Академия, 2004. 416 с.
3. Анализ возможности применения топологической оптимизации при проектировании зубчатых передач / Б. Е. Васильев, Д. В. Калинин, М. С. Свиначева, Н. А. Гудков // Машины и установки: проектирование, разработка и эксплуатация. 2017. С. 35–45. URL: <https://doi.org/10.24108/aplts.0317.0000072> (дата обращения: 03.12.2018).
4. Блескун В. Ф., Стручкова О. Ю. Оптимизация параметров зубчатых передач на стадии компьютерного проектирования. Донецк: ДонНТУ, 2007. URL: <http://www/ea.donntu.org> 8080 (дата обращения: 14.12.2018).
5. Иванов М. Н., Финогенов В. А. Детали машин: учебник для машиностроительных вузов. М.: Высш. шк., 2003. 408 с.
6. Кучерюк В. И., Навычко Г. Ф. Системная оптимизация в проектировании // Проблемы оптимального проектирования сооружений: доклады I Всерос. конф. Новосибирск, 2008. С. 196–205.
7. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости / под ред. Г. С. Шапиро. М.: Наука, 1979. 560 с.
8. Андреев А. В. Расчет деталей при сложном напряженном состоянии. М.: Машиностроение, 1981. 216 с.

9. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 510 с.

10. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. 232 с.

11. О синтезе переходной кривой во впадине цилиндрических зубчатых колес и червяков / Д. Т. Бабичев, А. В. Кривошея, М. Г. Сторчак, В. А. Голованев, А. Ю. Тайсин // Вестн. нац. техн. ун-та «ХПИ». 2013. № 41. С. 7–14.

References

1. Ayrapetov E.L. *Statika zubchatykh peredach* [Statics of gears]. Moscow, Nauka Publ., 1983 (in Russ.).

2. Gulia N.V., Klokov V.G., Yurkov S.A. *Detali mashin* [Details of machines]. Moscow, Akademiya Publ., 2004 (in Russ.).

3. Vasilyev B.E., Kalinin D.V., Svinareva M.S., Gudkov N.A. *Mashiny i ustanovki: proektirovanie i ekspluatatsiya* [Machines and Plants: Design and Exploiting], 2017. Available at <https://doi.org/10.24108/aplts.0317.0000072> (accessed December's 3, 2018) (in Russ.).

4. Bleskun V.F., Struchkova O. Yu. *Optimizatsiya parametrov zubchatykh peredach na stadii kompy'uternogo proektirovaniya* [Optimization of gear parameters at the stage of computer design]. Donetsk, 2007. Available at <http://www/ea.donntu.org/8080> (accessed December's 14, 2018) (in Russ.).

5. Ivanov M.N., Finogenov V.A.. *Detali mashin: uchebnik dlya mashinostroitel'nykh vuzov* [Details of machines]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 2003 (in Russ.).

6. Kucheruk V.I., Navnyko G.F.. *Sistemnaya optimizatsiya v proektirovanii* [System optimization in design]. *Problemy optimal'nogo proektirovaniya sooruzheniy* [Proc. Problems of optimal design of structures: reports of I Vseros. conf.], 2008, pp. 196-205 (in Russ.).

7. Timoshenko S.P., Gud'er Dzh. *Teoriya uprugosti* [Theory of elasticity]. Moscow, Nauka Publ., 1979 (in Russ.).

8. Andreev A.V.. *Raschet detaley pri slozhnom napryazhennom sostoyanii* [Calculation of parts at complex stress state]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1981 (in Russ.).

9. Dzhonson K. *Mekhanika kontaktnogo vzaimod-eystviya* [Mechanics of contact interaction]. Moscow, Mir Publ., 1989.

10. Timoshenko S.P., Gud'er Dzh. *Teoriya uprugosti* [Theory of elasticity]. 1979. 232 p. (in Russ.).

11. Babichev D.T., Krivosheya A.V., Storzhak M.G., Golovanev M.A., Taysin A.Yu. [On the synthesis of a transition curve in the depression of cylindrical gears and worms]. *Vestnik nacionalnogo tekhnicheskogo universiteta «KHPI»* [Bulletin of the national technical University «HPI»], 2013, no. 41, pp. 7-14 (in Russ.).

To System Optimization of Spur Gears

V. I. Kucherjuk, PhD in Engineering, Professor, Tyumen Industrial University, Tyumen, Russia

D. T. Babichev, DSc in Engineering, Professor, Tyumen Industrial University, Tyumen, Russia

I. V. Shaptala, Lecturer, Tyumen Industrial University, Tyumen, Russia

In the present work mathematical modeling is performed for one of important blocks of the system optimization of the tooth geometric shape by the stress-strain state which is connected with the gear reliability. The optimization function based on the system method is stated. The study of the stress state is carried out; it is shown that the strength of the tooth is provided mainly by the bending and contact strength in the area of the tooth dedendum. Optimization of the tooth geometry is considered individually for the bending and contact stresses. The optimal contour of the tooth in the root part depending on the action of forces in meshing that provide the fatigue strength in bending, is determined. Optimization by contact stresses is carried out; the formula for the length of contact is obtained. The analysis showed that in order to calculate the tooth strength, there is no more need to solve the flat problem of the elasticity theory; the beam theory and the Hertz formula with account of friction are sufficient. For the transition curve with the ratio of the smallest radius of curvature to half the width of the tooth less than 0.6, it is necessary to clarify the method of the instant warping theory of elasticity. The contour of the tooth is represented by a composite function in the form of a spline. Positive and negative effects of different tooth profiles (involute, parabola and transition curve) are noted.

Keywords: composite, optimization, spur gear, mathematical model.

Получено: 11.04.19