УДК 004.942
DOI: 10.22213/2410-9304-2019-4-88-93

РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ОПТИМАЛЬНОГО ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА ПОЛУЧЕНИЯ ПЕНОБЕТОНОВ НЕАВТОКЛАВНОГО ТВЕРДЕНИЯ

К. Л. Домнина, старший преподаватель, Воткинский филиал ИжГТУ имени М. Т. Калашникова, Воткинск, Россия
М. Н. Каракулов, доктор технических наук, профессор, Воткинский филиал ИжГТУ имени М. Т. Калашникова, Воткинск, Россия
С. В. Федосов, академик РААСН, доктор технических наук, профессор, Московский государственный строительный университет, Москва, Россия

Технологический процесс получения бетона – это сложная динамическая система, в рамках которой взаимодействуют множество элементов. Рассматривая технологический процесс как систему, необходимо учитывать его взаимодействие с внешней средой и внутренние взаимосвязи отдельных элементов системы. Основным источником информации, раскрывающим сущность технологического процесса как системы, является его математическая модель.

В статье построена многофакторная математическая модель технологического процесса получения неавтоклавных пенобетонов. В качестве критериев качества выбраны показатели эксплуатационных свойств, востребованные для заказчиков: прочность на сжатие и теплопроводность. Поиск оптимума осуществлялся по ключевым технологическим факторам: соотношению между портландцементом и песком, водотвердому отношению, расходу пенообразователя и времени цикла смешивания.

Для оптимизации технологического процесса получения пенобетонов использовано четырехфакторное математическое планирование в трех уровнях. Представлены результаты экспериментальных исследований и подробная пошаговая методика построения математической модели. Ввиду того, что полученный результат по значениям показателей критериев может не всегда удовлетворять заказчика, авторами предложен метод компромисса между критериями, который достигается путем взаимных уступок, т. е. процентных потерь критериев. Основным способом решения принят лексикографический метод или метод целенаправленного перебора.

Ключевые слова: пенобетон, технологический процесс, математическая модель, критерий, фактор, система, многокритериальная оптимизация.

Введение

Технологический процесс – это сложная динамическая система, в рамках которой взаимодействуют оборудование, средства контроля и управления, вспомогательные и транспортные устройства, материалы, обрабатывающий инструмент, люди, осуществляющие процесс и управляющие им [1]. Наибольшая трудность проектирования технологических процессов связана с их сложной иерархической структурой. Это приводит к необходимости решения задачи многофакторной оптимизации для построения, управления и контроля технологического процесса в условиях неопределенностей целей, знаний об окружающей среде (неопределенность условий функционирования) и действий [2].

Основным источником информации, раскрывающим сущность технологического процесса, является его математическая модель. Многофакторные математические модели дают возможность находить оптимальные значения факторов и таким образом оптимизировать технологический процесс получения бетона, учитывающий заданную совокупность факторов и область их варьирования [3]. В качестве примера приведем разработку математической модели оптимального технологического процесса получения пенобетонов неавтоклавного твердения. При решении задач моделирования и управления технологическим процессом значение имеют данные о влиянии внешних факторов на критерии качества (эксплуатационные показатели) готового изделия [4–7].

Разработка структуры математической модели оптимального технологического процесса получения пенобетонов

Для построения математической модели технологического процесса получения неавтоклавных пенобетонов были проведены экспериментальные исследования влияния технологических факторов на критерии качества: y_1 – прочность на сжатие, МПа, и y_2 – теплопроводность, Вт/м·К. В качестве критериев качества приняты показатели эксплуатационных свойств, наиболее востребованные среди заказчиков пенобетона. Поиск оптимума осуществлялся по ключевым технологическим факторам: x_1 – соотношение между портландцементом и песком П/Ц; x_2 – водотвердое отношение В/Т; x_3 – расход пенообразователя Д, % от массы портландцемента; x_4 – время цикла смешивания $\tau_{см}$, мин.

Для оптимизации технологического процесса получения пенобетонов было использовано четырех факторное математическое планирование в трех уровнях [8]. Условия проведения эксперимента представлены в табл. 1.

Таблица 1. **Исходные значения факторов и интервалы варьирования**

Фактор, x_k	Уровни факторов			Интервал варьирования, Δx_k
	$x_k = -1$	$x_k = 0$	$x_k = +1$	
П/Ц, x_1	0,5	0,8	1,1	0,3
В/Т, x_2	0,25	0,30	0,35	0,05
Д, x_3	0,8	1,0	1,2	0,2
$\tau_{см}$, x_4	2	3	4	1

Функция отклика описывается уравнением многочлена из всех возможных произведений x_k:

$$\left.\begin{aligned}
&y_1 = A_1x_1x_2x_3x_4 + A_2x_1x_2x_3 + A_3x_1x_2x_4 + A_4x_1x_3x_4 + A_5x_2x_3x_4 + A_6x_1x_2 + A_7x_1x_3 +\\
&+A_8x_1x_4 + A_9x_2x_3 + A_{10}x_2x_4 + A_{11}x_3x_4 + A_{12}x_1 + A_{13}x_2 + A_{14}x_3 + A_{15}x_4 + A_{16},\\
&y_2 = C_1x_1x_2x_3x_4 + C_2x_1x_2x_3 + C_3x_1x_2x_4 + C_4x_1x_3x_4 + C_5x_2x_3x_4 + C_6x_1x_2 + C_7x_1x_3 +\\
&+C_8x_1x_4 + C_9x_2x_3 + C_{10}x_2x_4 + C_{11}x_3x_4 + C_{12}x_1 + C_{13}x_2 + C_{14}x_3 + C_{15}x_4 + C_{16},\\
&n \in [1;16],\ x_1 = \left(a_1 \text{ или } b_1\right),\ x_2 = \left(a_2 \text{ или } b_2\right),\ x_3 = \left(a_3 \text{ или } b_3\right),\ x_4 = \left(a_4 \text{ или } b_4\right),
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

где A_1–A_{32}, C_1–C_{32} – коэффициенты, определяемые экспериментально; a_1–a_4 – нижний уровень варьирования факторов; b_1–b_4 – верхний уровень варьирования факторов.

План эксперимента в натуральном выражении представлен в табл. 2.

Таблица 2. **План эксперимента в натуральном выражении**

№ опыта	x_1	x_2	x_3	x_4	$x_1x_2x_3x_4$	$x_1x_2x_3$	$x_1x_2x_4$	$x_1x_3x_4$	$x_2x_3x_4$	x_1x_2	x_1x_3	x_1x_4	x_2x_3	x_2x_4	x_3x_4	y_1	y_2
1	1,1	0,35	1,2	4	1,848	0,462	1,54	5,28	1,68	0,385	1,32	4,4	0,42	1,4	4,8	1,9	0,162
2	0,5	0,35	1,2	4	0,84	0,21	0,7	2,4	1,68	0,175	0,6	2	0,42	1,4	4,8	1,71	0,128
3	1,1	0,25	1,2	4	1,32	0,33	1,1	5,28	1,2	0,275	1,32	4,4	0,3	1	4,8	1,19	0,182
4	0,5	0,25	1,2	4	0,6	0,15	0,5	2,4	1,2	0,125	0,6	2	0,3	1	4,8	1,99	0,138
5	1,1	0,35	0,8	4	1,232	0,308	1,54	3,52	1,12	0,385	0,88	4,4	0,28	1,4	3,2	1,75	0,144
6	0,5	0,35	0,8	4	0,56	0,14	0,7	1,6	1,12	0,175	0,4	2	0,28	1,4	3,2	2,41	0,131
7	1,1	0,25	0,8	4	0,88	0,22	1,1	3,52	0,8	0,275	0,88	4,4	0,2	1	3,2	1,21	0,166
8	0,5	0,25	0,8	4	0,4	0,1	0,5	1,6	0,8	0,125	0,4	2	0,2	1	3,2	3,53	0,179
9	1,1	0,35	1,2	2	0,924	0,462	0,77	2,64	0,84	0,385	1,32	2,2	0,42	0,7	2,4	2,36	0,116
10	0,5	0,35	1,2	2	0,42	0,21	0,35	1,2	0,84	0,175	0,6	1	0,42	0,7	2,4	1,04	0,127
11	1,1	0,25	1,2	2	0,66	0,33	0,55	2,64	0,6	0,275	1,32	2,2	0,3	0,5	2,4	2,51	0,162
12	0,5	0,25	1,2	2	0,3	0,15	0,25	1,2	0,6	0,125	0,6	1	0,3	0,5	2,4	3,54	0,123
13	1,1	0,35	0,8	2	0,616	0,308	0,77	1,76	0,56	0,385	0,88	2,2	0,28	0,7	1,6	1,82	0,127
14	0,5	0,35	0,8	2	0,28	0,14	0,35	0,8	0,56	0,175	0,4	1	0,28	0,7	1,6	1,9	0,143
15	1,1	0,25	0,8	2	0,44	0,22	0,55	1,76	0,4	0,275	0,88	2,2	0,2	0,5	1,6	2,99	0,156
16	0,5	0,25	0,8	2	0,2	0,1	0,25	0,8	0,4	0,125	0,4	1	0,2	0,5	1,6	3,84	0,152

Построение математической модели критериев: прочности на сжатие и теплопроводности

На основании табл. 2 мы получаем две системы из 16 линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов A_1–A_{32} и C_1–C_{32}. Поскольку число уравнений и неизвестных совпадает, для каждого из критериев есть единственное решение. Опуская громоздкие преобразования, в итоге получаем, что многочлены произведений (1) принимают вид:

$$\left.\begin{aligned}
&y_1 = -\frac{375}{8}x_1x_2x_3x_4 + \frac{1915}{12}x_1x_2x_3 + \frac{539}{12}x_1x_2x_4 + \frac{1465}{96}x_1x_3x_4 + \frac{655}{12}x_2x_3x_4 -\\
&-\frac{389}{3}x_1x_2 - \frac{2291}{48}x_1x_3 - \frac{1223}{80}x_1x_4 - \frac{3091}{24}x_2x_3 - \frac{3883}{120}x_2x_4 - \frac{13013}{960}x_3x_4 +\\
&+\frac{2383}{60}x_1 + \frac{2293}{30}x_2 + \frac{18463}{480}x_3 + \frac{8963}{800}x_4 - \frac{12293}{600},\\
&y_2 = -\frac{1}{8}x_1x_2x_3x_4 - 1x_1x_2x_3 + \frac{29}{60}x_1x_2x_4 + \frac{37}{480}x_1x_3x_4 + \frac{3}{8}x_2x_3x_4 - \frac{3}{10}x_1x_2 +\\
&+\frac{73}{240}x_1x_3 - \frac{103}{600}x_1x_4 + \frac{1}{5}x_2x_3 - \frac{103}{150}x_2x_4 - \frac{79}{600}x_3x_4 + \frac{1}{15}x_1 + \frac{69}{100}x_2 - \frac{287}{2400}x_3 +\\
&+\frac{2671}{12000}x_4 - \frac{7}{750}.
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Функции y_1 и y_2 из (2) зависят от каждого x_k линейно (при остальных постоянных):

$$\left.\begin{aligned} &y_{1k} = A_{0k_i} x_k + A_{0k_i},\\ &y_{2k} = C_{0k_i} x_k + C_{0k_i},\\ &i \in [1;8], k \in [1;4]. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Уравнения (3) – уравнения прямой и, следовательно, экстремальные значения y_{1k}, y_{2k}, и сами y_{1k} и y_{2k} из (2) нужно искать в граничных точках области задания x_k (табл. 1).

Из табл. 2 очевидно, что максимум прочности $y_{1\max}$ достигается в точках $x_1 = 0{,}5$; $x_2 = 0{,}25$; $x_3 = 0{,}8$; $x_4 = 2$; а минимум теплопроводности $y_{1\min}$ – в точках $x_1 = 1{,}1$; $x_2 = 0{,}35$; $x_3 = 1{,}2$; $x_4 = 2$. Это точки в четырехмерном пространстве $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, а y_1 и y_2 из (2) – это непрерывные четырехмерные множества существования y_1 и y_2.

Для получения более высоких показателей прочности, чем $y_{1\max} = 3{,}84$ МПа, и более низких показателей теплопроводности, чем $y_{2\max} = 0{,}116$ Вт/м·К, необходимо изменять области задания x_k. Пути изменения помогают определить функции (2): задавая $y_{1зак}$ и $y_{2зак}$ (заказчика), для каждого x_k можем найти необходимые значения, принимая остальные факторы постоянными, причем границы области их задания принимаем по табл. 1:

$$\left.\begin{aligned} &y_{1зак} = A_{0k_i} x_k + B_{0k_i},\\ &y_{2зак} = C_{0k_i} x_k + D_{0k_i},\\ &i \in [1;8], k \in [1;4]. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

В уравнения (1) включаются x_k из области их задания дважды: $x_{k\min}$ и $x_{k\max}$. Поэтому для каждого критерия вариантов получается по 16. Коэффициенты для (3) и (4) находятся по формулам:

$$\left.\begin{aligned} A_{01_i} &= A_1x_2x_3x_4 + A_2x_2x_3 + A_3x_2x_4 + A_4x_3x_4 + A_6x_2 + A_7x_3 + A_8x_4 + A_{12},\\ B_{01_i} &= A_5x_2x_3x_4 + A_9x_2x_3 + A_{10}x_2x_4 + A_{11}x_3x_4 + A_{13}x_2 + A_{14}x_3 + A_{15}x_4 + A_{16}; \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

$$\left.\begin{aligned} C_{01i} &= C_1x_2x_3x_4 + C_2x_2x_3 + C_3x_2x_4 + C_4x_3x_4 + C_6x_2 + C_7x_3 + C_8x_4 + C_{12},\\ D_{01_i} &= C_5x_2x_3x_4 + C_9x_2x_3 + C_{10}x_2x_4 + C_{11}x_3x_4 + C_{13}x_2 + C_{14}x_3 + C_{15}x_4 + C_{16}; \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

$$\left.\begin{aligned} A_{02_i} &= A_1x_1x_3x_4 + A_2x_1x_3 + A_3x_1x_4 + A_5x_3x_4 + A_6x_1 + A_9x_3 + A_{10}x_4 + A_{13},\\ B_{02_i} &= A_4x_1x_3x_4 + A_7x_1x_3 + A_8x_1x_4 + A_{11}x_3x_4 + A_{12}x_1 + A_{14}x_3 + A_{15}x_4 + A_{16}; \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

$$\left.\begin{aligned} C_{02i} &= C_1x_1x_3x_4 + C_2x_1x_3 + C_3x_1x_4 + C_5x_3x_4 + C_6x_1 + C_9x_3 + C_{10}x_4 + C_{13},\\ D_{02_i} &= C_4x_1x_3x_4 + C_7x_1x_3 + C_8x_1x_4 + C_{11}x_3x_4 + C_{12}x_1 + C_{14}x_3 + C_{15}x_4 + C_{16}; \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

$$\left.\begin{aligned} A_{03_i} &= A_1x_1x_2x_4 + A_2x_1x_2 + A_4x_1x_4 + A_5x_2x_4 + A_7x_1 + A_9x_2 + A_{11}x_4 + A_{14},\\ B_{03_i} &= A_3x_1x_2x_4 + A_6x_1x_2 + A_8x_1x_4 + A_{10}x_2x_4 + A_{12}x_1 + A_{13}x_2 + A_{15}x_4 + A_{16}; \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

$$\left.\begin{aligned} C_{03i} &= C_1x_1x_2x_4 + C_2x_1x_2 + C_4x_1x_4 + C_5x_2x_4 + C_7x_1 + C_9x_2 + C_{11}x_4 + C_{14},\\ D_{03_i} &= C_3x_1x_2x_4 + C_6x_1x_2 + C_8x_1x_4 + C_{10}x_2x_4 + C_{12}x_1 + C_{13}x_2 + C_{15}x_4 + C_{16}; \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

$$\left.\begin{aligned} A_{04_i} &= A_1x_1x_2x_3 + A_3x_1x_2 + A_4x_1x_3 + A_5x_2x_3 + A_8x_1 + A_{10}x_2 + A_{11}x_3 + A_{15},\\ B_{04_i} &= A_2x_1x_2x_3 + A_6x_1x_2 + A_7x_1x_3 + A_9x_2x_3 + A_{12}x_1 + A_{13}x_2 + A_{14}x_3 + A_{16}; \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

$$\left.\begin{aligned} C_{04i} &= C_1x_1x_2x_3 + C_3x_1x_2 + C_4x_1x_3 + C_5x_2x_3 + C_8x_1 + C_{10}x_2 + C_{11}x_3 + C_{15},\\ D_{04_i} &= C_2x_1x_2x_3 + C_6x_1x_2 + C_7x_1x_3 + C_9x_2x_3 + C_{12}x_1 + C_{13}x_2 + C_{14}x_3 + C_{16}. \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Значения коэффициентов A_{0ki} и B_{0ki} и C_{0ki} и D_{0ki} просчитываются для конкретной технологии получения неавтоклавного пенобетона на предприятии согласно полученным экспериментальным данным.

Результат по величине каждого x_k выбирается из полученных расчетных значений, имея в виду данные по всем остальным факторам x_k. Такой метод называется методом целенаправленного перебора. Выбранные факторы x_k обеспечивают выбор или создание нового технологического процесса, что требует проведения дополнительных экспериментов для уточнения избранной математической модели процесса.

Полученные уравнения (2)–(12) описывают процесс нахождения экстремальных значений функций или значений, заданных заказчиком. Но итоговое решение может не всегда удовлетворять заказчика. В этом случае необходимо применить метод компромисса, который строится на определении компромисса между заданными критериями, достигнутый путем взаимных уступок.

Определение компромисса между критериями

В литературе [9–11] для выбора компромисса предлагаются способ скаляризации критериев, принципы равенства, максимина, справедливой уступки, выделения главного критерия и др. В нашем случае наиболее удобным является способ скаляризации критериев, т. к. нам необходимо сравнивать величины критериев в одних и тех же единицах, чтобы говорить о процентах уступок и переводить их в натуральные величины.

Воспользуемся следующим: выведена зависимость критериев y_1, y_2 от факторов x_k с учетом значений каждого y_n и x_k как количество размерностей, которым и будем оперировать. Это будет один из способов – скаляризации критериев.

Общая задача определения оптимальных значений одновременно с двумя и более критериями сводится к определению того, какой из y_n необходимо устремить к максимуму, а какой к минимуму. Тогда на базе этого набора можно создавать комплексную целевую функцию. Например, в нашем случае: пусть по требованию заказчика $y_1 \to \max,\ y_2 \to \min$. Тогда за комплексную целевую функцию можно принять отношение:

$$y_{\text{компл}}\left(x_k\right) = \frac{y_1\left(x_k\right)}{y_2\left(x_k\right)} \to \max. \qquad (13)$$

Это компромиссная целевая функция. В результате решения уравнений (2)–(13) получим конкретные значения для всех факторов x_k и критериев y_n в одной общей точке четырехмерного пространства.

Но реального решения может не существовать. В этом случае нужно или уменьшать значения критерия y_1, или увеличивать значения критерия y_2, или заказывать только один критерий, а остальной принимать с таким значением, которое получится в избранной по первому критерию точке четырехмерного пространства. Это называется выбором наиважнейшего показателя качества и определением компромисса между заказчиком и предприятием.

Чаще всего заказчик дает одинаковый процент потерь для всех критериев. Пусть каждый критерий y_1 и y_2 изменяется на одинаковую долю K. Тогда:

$$\left.\begin{aligned} K_1 &= \frac{y_{1\text{зак}} - y_1\left(x_{k\max}\right)}{\Delta y_1}, \\ \Delta y_1 &= y_1\left(x_{k\min}\right) - y_1\left(x_{k\max}\right); \\ K_2 &= \frac{y_2\left(x_{k\max}\right) - y_{2\text{зак}}}{\Delta y_2}, \\ \Delta y_2 &= y_2\left(x_{k\max}\right) - y_2\left(x_{k\min}\right), \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

где K_1 – уступка по уменьшению критерия y_1; K_2 – уступка по увеличению критерия y_2.

При этом $K_1 = \text{K}_2$, т. е. процентные потери критериев $y_{1\text{зак}}$ и $y_{2\text{зак}}$ должны быть одинаковые:

$$\left.\begin{aligned} y_{1\text{зак}}^{\text{уст}} &= y_{1\text{зак}} - K_1 \cdot \frac{y_{1\text{зак}}}{100} = A_{0k_i} \cdot x_{k_0} + B_{0k_i}; \\ y_{2\text{зак}}^{\text{уст}} &= y_{2\text{зак}} - K_1 \cdot \frac{y_{2\text{зак}}}{100} = C_{0k_i} \cdot x_{k_0} + D_{0k_i}. \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Неизвестные в системе (15) – K_1 и x_{k0}. Решение единственное.

Итак, для случая, когда уступки одинаковые, получаем значения критериев качества и конкретный процент уступок. Уступка согласуется с заказчиком. Такое решение, как правило, существует и формализовано в виде (16).

Более сложный случай – когда уступки по критериям разные. В этом случае можно принять уступку по одному критерию оптимальности и посчитать, какой получится уступка и сам второй критерий. Если найденное решение удовлетворяет заказчика, то технологический процесс опять построен. Это и называется методом целенаправленного перебора (лексикографический метод).

$$
\left.
\begin{aligned}
& y_{\text{компл}}\left(x_k\right)=\frac{y_1\left(x_k\right)}{y_2\left(x_k\right)}\rightarrow \max, \\
& y_1\left(x_k\right)=-\frac{375}{8}x_1x_2x_3x_4+\frac{1915}{12}x_1x_2x_3+\frac{539}{12}x_1x_2x_4+\frac{1465}{96}x_1x_3x_4+\frac{655}{12}x_2x_3x_4-\frac{389}{3}x_1x_2-\frac{2291}{48}x_1x_3- \\
& -\frac{1223}{80}x_1x_4-\frac{3091}{24}x_2x_3-\frac{3883}{120}x_2x_4-\frac{13013}{960}x_3x_4+\frac{2383}{60}x_1+\frac{2293}{30}x_2+\frac{18463}{480}x_3+\frac{8963}{800}x_4-\frac{12293}{600}, \\
& y_2\left(x_k\right)=-\frac{1}{8}x_1x_2x_3x_4-1x_1x_2x_3+\frac{29}{60}x_1x_2x_4+\frac{37}{480}x_1x_3x_4+\frac{3}{8}x_2x_3x_4-\frac{3}{10}x_1x_2+\frac{73}{240}x_1x_3-\frac{103}{600}x_1x_4+ \\
& +\frac{1}{5}x_2x_3-\frac{103}{150}x_2x_4-\frac{79}{600}x_3x_4+\frac{1}{15}x_1+\frac{69}{100}x_2-\frac{287}{2400}x_3+\frac{2671}{12000}x_4-\frac{7}{750}, \\
& y_1\left(x_k\right)\geq y_{1\text{зак}}\cdot\left(1-K_1\right)\geq y_{1\max}, \\
& y_2\left(x_k\right)\geq y_{2\text{зак}}\cdot\left(1+K_2\right)\geq y_{2\min}, \\
& y_{1k}=A_{0k_i}x_k+A_{0k_i},\ i\in\left[1;8\right],k\in\left[1;4\right], \\
& y_{1\text{зак}}=A_{0k_i}x_k+B_{0k_i},\ i\in\left[1;8\right],k\in\left[1;4\right], \\
& y_{2k}=C_{0k_i}x_k+C_{0k_i},\ i\in\left[1;8\right],k\in\left[1;4\right], \\
& y_{2\text{зак}}=C_{0k_i}x_k+D_{0k_i},\ i\in\left[1;8\right],k\in\left[1;4\right], \\
& A_{01i}=A_1x_2x_3x_4+A_2x_2x_3+A_3x_2x_4+A_4x_3x_4+A_6x_2+A_7x_3+A_8x_4+A_{12}, \\
& B_{01_i}=A_5x_2x_3x_4+A_9x_2x_3+A_{10}x_2x_4+A_{11}x_3x_4+A_{13}x_2+A_{14}x_3+A_{15}x_4+A_{16}, \\
& A_{02i}=A_1x_1x_3x_4+A_2x_1x_3+A_3x_1x_4+A_5x_3x_4+A_6x_1+A_9x_3+A_{10}x_4+A_{13}, \\
& B_{02_i}=A_4x_1x_3x_4+A_7x_1x_3+A_8x_1x_4+A_{11}x_3x_4+A_{12}x_1+A_{14}x_3+A_{15}x_4+A_{16}, \\
& A_{03i}=A_1x_1x_2x_4+A_2x_1x_2+A_4x_1x_4+A_5x_2x_4+A_7x_1+A_9x_2+A_{11}x_4+A_{14}, \\
& B_{03_i}=A_3x_1x_2x_4+A_6x_1x_2+A_8x_1x_4+A_{10}x_2x_4+A_{12}x_1+A_{13}x_2+A_{15}x_4+A_{16}, \\
& A_{04i}=A_1x_1x_2x_3+A_3x_1x_2+A_4x_1x_3+A_5x_2x_3+A_8x_1+A_{10}x_2+A_{11}x_3+A_{15}, \\
& B_{04_i}=A_2x_1x_2x_3+A_6x_1x_2+A_7x_1x_3+A_9x_2x_3+A_{12}x_1+A_{13}x_2+A_{14}x_3+A_{16}, \\
& C_{01i}=C_1x_2x_3x_4+C_2x_2x_3+C_3x_2x_4+C_4x_3x_4+C_6x_2+C_7x_3+C_8x_4+C_{12}, \\
& D_{01_i}=C_5x_2x_3x_4+C_9x_2x_3+C_{10}x_2x_4+C_{11}x_3x_4+C_{13}x_2+C_{14}x_3+C_{15}x_4+C_{16}, \\
& C_{02i}=C_1x_1x_3x_4+C_2x_1x_3+C_3x_1x_4+C_5x_3x_4+C_6x_1+C_9x_3+C_{10}x_4+C_{13}, \\
& D_{02_i}=C_4x_1x_3x_4+C_7x_1x_3+C_8x_1x_4+C_{11}x_3x_4+C_{12}x_1+C_{14}x_3+C_{15}x_4+C_{16}, \\
& C_{03i}=C_1x_1x_2x_4+C_2x_1x_2+C_4x_1x_4+C_5x_2x_4+C_7x_1+C_9x_2+C_{11}x_4+C_{14}, \\
& D_{03_i}=C_3x_1x_2x_4+C_6x_1x_2+C_8x_1x_4+C_{10}x_2x_4+C_{12}x_1+C_{13}x_2+C_{15}x_4+C_{16}, \\
& C_{04i}=C_1x_1x_2x_3+C_3x_1x_2+C_4x_1x_3+C_5x_2x_3+C_8x_1+C_{10}x_2+C_{11}x_3+C_{15}, \\
& D_{04_i}=C_2x_1x_2x_3+C_6x_1x_2+C_7x_1x_3+C_9x_2x_3+C_{12}x_1+C_{13}x_2+C_{14}x_3+C_{16}, \\
& 0,5\leq x_1\leq 1,1, \\
& 0,25\leq x_2\leq 0,35, \\
& 0,8\leq x_3\leq 1,2, \\
& 2\leq x_4\leq 4.
\end{aligned}
\right\}
\qquad (16)
$$

Выводы

В итоге, нами был формализован метод многокритериального подхода для построения оптимального технологического процесса получения пенобетонов, а именно:

а) построена математическая модель зависимости свойств готового изделия от каждого фактора в отдельности и совместно;

б) построена целевая функция, удовлетворяющая математическим зависимостям результата от факторов;

в) выбрана схема компромисса между критериями оптимальности с использованием ранга каждого из них;

г) формализована многофакторная задача поиска оптимального технологического процесса получения пенобетонов.

Библиографические ссылки

1. *Мальков М. В., Олейник А. Г., Федоров А. М.* Моделирование технологических процессов: методы и опыт // Труды Кольского научного центра РАН. 2010. № 3. С. 93–101.

2. Системный анализ в строительном материаловедении : монография / Ю. М. Баженов, И. А. Гарькина, А. М. Данилов, Е. В. Королев. М. : МГСУ, 2012. 432 с. ISBN 978-5-7264-0683-1.

3. *Дворкин Л. И.* Практическая методология проектирования составов бетона : учеб. пособие. М. ; Вологда : Инфра-Инженерия, 2019. 604 с. ISBN 978-5-9729-0304-7.

4. Математическая модель твердения бетона в условиях тепловой обработки заводов ЖБИ / Ю. Ю. Громов, О. Г. Иванова, А. В. Лагутин, Т. Лутхон // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2001. Т. 6. № 3. С. 344–345.

5. *Домнина К. Л., Каракулов М. Н.* Основы алгоритма оптимизации структуры теплоизоляционных пористых материалов // Вестник ИжГТУ имени М. Т. Калашникова. 2017. Т. 20. № 1. С. 108–110. DOI: 10.22213/2413-1172-2017-1-108-110.

6. *Aruova Lyazat, Dauzhanov Nabi.* Process Parameters of Production of Non-Autoclaved Aerated Concrete on the Basis of Complex Use of Ash and Gypsum-Containing Wastes // Mediterranean Journal of Social Sciences, 2014, vol.5, no. 23, pp. 2565-2571.

7. *Hein Htet Aung, Myo Lin Aung, Furkat Saifulloevich Pirov, Ismoilov Muhammad Idiboevich.* Mathematical Modeling of Technological Processes Produce Concrete Products // Automation and Control in Technical Systems (ACTS), 2015, no. 1, pp. 101-110.

8. *Дворкин Л. И., Дворкин О. Л.* Расчетное прогнозирование свойств и проектирование составов бетона. М. : Инфра-Инженерия, 2017. 386 с. ISBN 978-5-9729-0100-5.

9. *Макаров И. М., Виноградская Т. М., Рубчинский А. А.* Теория выбора и принятия решений. М. : Наука, 1982. 328 с.

10. *Саркисян С. А., Каспин В. И., Лисичкин В. А.* Теория прогнозирования и принятия решений. М. : Высш. школа, 1977. 351 с.

11. *Преображенский А. П.* Использование многокритериального подхода при анализе системы альтернативных энергетических источников // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. 2017. № 2 (17). С. 11–18.

References

1. Mal’kov M.V., Oleynik A.G., Fedorov A.M. [Modelirovaniye tekhnologicheskikh protsessov: metody i opyt]. *Trudy Kol'skogo nauchnogo tsentra RAN*, 2010, no. 3, pp. 93-101 (in Russ.).

2. Bazhenov Yu.M., Gar'kina I.A., Danilov A.M., Korolev Ye.V. *Sistemnyy analiz v stroitel'nom materialovedenii* [System analysis in building materials science]. Moscow, Moscow State University of Civil Engineering, 2012, 432 p. (in Russ.).

3. Dvorkin L.I. *Prakticheskaya metodologiya proyektirovaniya sostavov betona* [The practical methodology of designing the concrete compositions]. Moscow, Vologda, Infra Engineering, 2019, 604 p. (in Russ.).

4. Gromov Yu.Yu., Ivanova O.G., Lagutin A.V., Lutkhon T. [Matematicheskaya model' tverdeniya betona v usloviyakh teplovoy obrabotki zavodov ZHBI]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: Yestestvennyye i tekhnicheskiye nauki*, 2001, vol. 6, no. 3, pp. 344-345 (in Russ.).

5. Domnina K.L., Karakulov M.N. [Osnovy algoritma optimizatsii struktury teploizolyatsionnykh poristykh materialov]. *Vestnik IzhGTU imeni M. T. Kalashnikova*, 2017, vol. 20, no. 1, pp. 108-110 (in Russ.). DOI: 10.22213/2413-1172-2017-1-108-110.

6. Aruova Lyazat, Dauzhanov Nabi [Process Parameters of Production of Non-Autoclaved Aerated Concrete on the Basis of Complex Use of Ash and Gypsum-Containing Wastes]. *Mediterranean Journal of Social Sciences*, 2014, vol.5, no. 23, pp. 2565-2571.

7. Hein Htet Aung, Myo Lin Aung, Furkat Saifulloevich Pirov, Ismoilov Muhammad Idiboevich [Mathematical Modeling of Technological Processes Produce Concrete Products]. *Automation and Control in Technical Systems (ACTS)*, 2015, no. 1, pp. 101-110.

8. Dvorkin L.I., Dvorkin O.L. *Raschetnoye prognozirovaniye svoystv i proyektirovaniye sostavov betona* [The calculated prediction of the properties and design of the concrete compositions]. Moscow, Infra Engineering, 2017, 382 p. (in Russ.).

9. Makarov I.M., Vinogradskaya T.M., Rubchinskiy A.A. *Teoriya vybora i prinyatiya resheniy* [Theory of choice and decision making]. Moscow, Nauka, 1982, 328 p. (in Russ.).

10. Sarkisyan S.A., Kaspin V.I., Lisichkin V.A. *Teoriya prognozirovaniya i prinyatiya resheniy* [Theory of forecasting and decision-making]. Moscow, Vysshaya shkola, 1977, 351 p. (in Russ.).

11. Preobrazhenskiy A.P. [Ispol'zovaniye mnogokriterial'nogo podkhoda pri analize sistemy al'ternativnykh energeticheskikh istochnikov]. *Modelirovaniye, optimizatsiya i informatsionnyye tekhnologii*, 2017, no. 2(17), pp. 11-18 (in Russ.).

* * *

Development of a Mathematical Model of the Optimal Technological Process for Non-Autoclaved Foam Concrete Obtaining

K. L. Domnina, Senior lecturer, Votkinsk branch of Kalashnikov ISTU, Izhevsk, Russia

M. N. Karakulov, DSc in Engineering, Professor, Votkinsk branch of Kalashnikov ISTU, Izhevsk, Russia

S. V. Fedosov, Academician of Russian Academy of Architecture and Building Sciences, DSc in Engineering, Professor, Moscow State (National Research) University of Civil Engineering

The technological process of obtaining of concrete is a complex dynamic system in which many elements interact. When considering the technological process as a system, it is necessary to take into account its interaction with the external environment and internal relationships of the individual elements of the system. The main source of information that reveals the essence of the technological process as a system is its mathematical model. The paper presents a multifactorial mathematical model of the technological process of obtaining of non-autoclaved foam concrete. The indicators of operational properties that are in demand for customers are selected as quality criteria. They are compressive strength and thermal conductivity. The search for the optimum was carried out according to key technological factors. These are the ratio between Portland cement and sand, the water-solid ratio, the foaming agent consumption and the mixing cycle time. Four-factor mathematical planning in three levels was used to optimize the technological process of foam concrete production. The results of experiments and a detailed step-by-step method of constructing a mathematical model are presented. Due to the fact that the result obtained by the values of the criteria indicators may not always satisfy the customer, the authors propose a method of compromise between the criteria. It is achieved by mutual concessions, i.e. percentage losses of criteria. The main solution method is the lexicographic method or the method of targeted search.

Keywords: foam concrete, technological process, mathematical model, criterion, factor, system, multi-criteria optimization.

Получено: 29.10.19