

УДК 621.317.08

DOI: 10.22213/2410-9304-2019-4-107-115

## ИЗМЕРЕНИЕ АМПЛИТУДЫ ДИСКРЕТНОГО ГАРМОНИЧЕСКОГО СИГНАЛА МЕТОДОМ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ДПФ

А. В. Пономарев, кандидат экономических наук, доцент,  
ИжГТУ имени М.Т. Калашникова, Ижевск, Россия

*Рассматриваются направления цифровизации измерений, процессов развития и внедрения результативных цифровых информационных технологий в измерительные процедуры. Исследуются проблемы измерения амплитуды дискретного гармонического сигнала, заданного на конечном интервале, методом измерительного преобразования – методом дискретного преобразования Фурье. Для решения существующих проблем, возникающих при измерении амплитуды дискретного гармонического сигнала методом дискретного преобразования Фурье, предлагается использовать обобщение дискретного преобразования Фурье – параметрическое дискретное преобразование Фурье. Исследуются аналитические свойства базиса параметрического дискретного преобразования Фурье – базиса параметрических экспоненциальных функций. Показано, что в силу мультипликативности базиса параметрического дискретного преобразования Фурье по одной из переменных, существуют быстрые алгоритмы осуществления параметрического дискретного преобразования Фурье. Разработаны теоретические основы измерения амплитуды дискретного гармонического сигнала на основе параметрического дискретного преобразования Фурье. Исследованы причины возникновения неинвариантности энергетического спектра дискретного гармонического сигнала, заданного на конечном интервале, методом измерительного преобразования – методом параметрического дискретного преобразования Фурье. Предложена методика определения (оценки) погрешностей измерения амплитуды гармонического сигнала методом параметрического дискретного преобразования Фурье. Численным моделированием проведена экспериментальная проверка полученных в работе теоретических результатов.*

**Ключевые слова:** параметрическое дискретное преобразование Фурье, гармонический сигнал, погрешность измерения, измерительное преобразование, вычислительное преобразование, базисная система.

### Введение

Вопросам измерения амплитуды гармонического сигнала, в том числе и методом преобразования Фурье, проблемам, которые при этом возникают, посвящено значительное число работ. Отметим среди них классические работы [1–3]. Роль и место преобразования Фурье хорошо отражают слова М. Г. Серебрянникова: «Как по глубине проникновения в сущность повторяющихся явлений, так и по ширине охвата областей знания, где эти явления стоят на переднем плане, этот метод является выдающимся».

Начиная с пятидесятых годов прошлого столетия наметился процесс цифровизации прямых и косвенных измерений, который осуществлялся в следующих направлениях: развитие моделей измерения (уравнений измерения) с учетом цифровизации измерений, разделение измерительных и вычислительных преобразований, разработка новых подходов к формализованному описанию измерительных процедур [4–6].

Однако процесс цифровизации измерений на основе измерительного преобразования – дискретного преобразования Фурье (ДПФ), на практике столкнулся с проблемой, получившей в науке образное название – «проклятие размерности». Дело в том, что даже при умеренном числе временных отсчетов сигнала осуществление измерительного преобразования ДПФ связано со значительными вычислительными затратами, которые нереализуемы на практике. Это обстоятельство серьезно тормозило процесс цифровизации измерений на основе ДПФ, а также разработку и внедрение результативных цифровых информационных технологий (*Digital Information*

*Technologies* – DIT-технологии) в измерительные технологии. Этот процесс продолжался вплоть до 1965 года. Появление в 1965 году метода быстрого вычисления ДПФ [7], позволившего существенно (на порядок и более) сократить вычислительные затраты на осуществление ДПФ, сняло проблему размерности. Алгоритмы, получившие название алгоритмов быстрого преобразования Фурье (БПФ) (*Fast Fourier Transform – FFT*), дали мощный импульс развитию как DIT-технологий, так и их широкому внедрению в измерительные процедуры [8–23].

Практика применения дискретного преобразования Фурье в измерениях параметров сигналов кроме достоинств выявила и ряд существенных недостатков данного измерительного преобразования (негативных эффектов ДПФ).

С целью устранения (ослабления) влияния негативных эффектов ДПФ на эффективность и измерительных процедур авторами статьи было разработано обобщение ДПФ – параметрическое ДПФ.

### Параметрическое дискретное преобразование Фурье

Матричная форма ДПФ-П задается следующим матричным уравнением [24–28]:

$$S_{N,\theta} = \frac{1}{N} F_{N,\theta} X_N; \quad 0 \leq \theta < 1, \quad (1)$$

где  $X_N = [x(0), x(1), \dots, x(N-1)]^T$  – представление дискретного измерительного сигнала  $x(n)$ ,  $n = \overline{0, N-1}$ , в виде вектора  $N$ -мерного линейного пространства;  $T$  – знак транспонирования;

$S_{N,\theta} = [s(0, \theta), s(1, \theta), \dots, s((N-1), \theta)]^T$  – вектор коэффициентов (бинов<sup>1</sup>) ДПФ-П, полученных путем измерения спектра в системе параметрических дискретных экспоненциальных функций (ДЭФ-П), которая задается матрицей  $F_{N,\theta}$ :

$$F_{N,\theta} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & \dots & (N-1) \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ (N-1) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & W_N^0 & \dots & W_N^{\theta(N-1)} \\ 1 & W_N^{(1+\theta)} & \dots & W_N^{(1+\theta)(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & W_N^{(N-1+\theta)} & \dots & W_N^{(N-1+\theta)(N-1)} \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad (2)$$

где система ДЭФ-П задается следующим соотношением:

$$\begin{aligned} \text{def}_{N,p}(k, n, \theta) &= W_N^{(k+\theta)n} = \\ &= \exp\left[-j \frac{2\pi}{N}(k+\theta)n\right], \quad 0 \leq \theta < 1. \end{aligned}$$

При нулевом значении параметра  $\theta$  ДПФ-П переходит в стандартное ДПФ. Согласно РМГ 29-2013<sup>2</sup>, каждое  $(k+\theta)$ ,  $k = \overline{0, (N-1)}$ ,  $0 \leq \theta < 1$ , значение бина ДПФ-П (каждое значение частотного спектра на определенной нормированной частоте<sup>3</sup>  $(k+\theta)/N$ ) представляет собой линейное косвенное измерение величины, в котором в качестве функциональной зависимости используется  $(k+\theta)$  дискретная базисная функция ДПФ-П определенной частоты –  $(k+\theta)$  ДЭФ-П.

Перечислим основные свойства базиса измерительного преобразования ДПФ-П – базиса параметрических дискретных экспоненциальных функций (ДЭФ-П).

1. ДЭФ-П являются обобщением ДЭФ и при нулевом значении параметра  $\theta$  переходят в ДЭФ. ДЭФ-П, в отличие от ДЭФ, не являются функциями

$$S_N(k, \theta) = \frac{A}{2N} \sum_{n=0}^{N-1} \left( \begin{aligned} &\sin\left(\frac{2\pi n(m+\theta_1-k-\theta)}{N} + \alpha\right) + \sin\left(\frac{2\pi n(m+\theta_1+k+\theta)}{N} + \alpha\right) + \\ &+ j \cos\left(\frac{2\pi n(m+\theta_1-k-\theta)}{N} + \alpha\right) + j \cos\left(\frac{2\pi n(m+\theta_1+k+\theta)}{N} + \alpha\right) \end{aligned} \right) \quad (5)$$

Обратившись к таблицам интегралов, сумм, рядов и произведений<sup>5</sup>, находим:

двух равноправных переменных  $k$  и  $n$ . В результате матрица ДЭФ-П  $F_{N,\theta}$  асимметрична.

2. ДЭФ-П являются периодическими функциями по переменной  $k$  и параметрическими периодическими функциями по переменной  $n$  с периодом  $N$ .

3. Система ДЭФ-П не мультипликативна по переменной  $k$  и мультипликативна по переменной  $n$ .

4. Система ДЭФ-П ортогональна по обоим переменным. Система ДЭФ-П является полной системой, так как число линейно независимых функций равно размерности множества дискретных информационных сигналов.

5. Поскольку базис ДЭФ-П является мультипликативным лишь по одной переменной  $n$ , то существует только один класс (вид) быстрых алгоритмов параметрического быстрого преобразования Фурье (БПФ-П) – вид алгоритмов БПФ-П с прореживанием по времени (как с замещением, так и без замещения).

**Теоретические основы измерения амплитуды дискретного гармонического сигнала методом параметрического ДПФ**

Пусть задан гармонический сигнал  $x(n)$  на конечном интервале  $n = \overline{0, (N-1)}$  с амплитудой  $A$ , нормированной частотой  $k_1 = m + \theta_1$  и фазой  $\alpha = \frac{2\pi}{N} \cdot l$ ,  $l = \overline{0, L-1}$ <sup>4</sup>, полученный дискретизацией аналогового сигнала  $x(t)$  с частотой дискретизации  $F_D$ :

$$x(n) = A \cdot \sin\left\{\left[\frac{2\pi}{N} \cdot (m + \theta_1) \cdot n\right] + \alpha\right\}. \quad (3)$$

Применяя ДПФ-П в алгебраической форме:

$$S_N(k, \theta) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{(k+\theta)n}, \quad k = \overline{0, (N-1)}; 0 \leq \theta < 1, \quad (4)$$

к синусоидальному сигналу (3), получим:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin(x + ky) = \sin\left(x + \frac{n-1}{2}y\right) \sin \frac{ny}{2} \operatorname{cosec} \frac{y}{2}. \quad (6)$$

<sup>1</sup> Отдельные коэффициенты (отсчеты) ДПФ-П называют также **бинами** («Bin») – в переводе с английского «хранилище», «ларь»), что подчеркивает тот факт, что энергия сигнала под кривой  $\frac{\sin(N \cdot x/2)}{N \sin(x/2)}$  (передаточная характеристика фильтра ДПФ-П) попадает в «хранилище» данного коэффициента ДПФ.

<sup>2</sup> РМГ 29-2013 – State system for ensuring the uniformity of measurements. Metrology. Basic terms and definitions.

<sup>3</sup> Переход от нормированной частоты  $f_k = k/N$  к «истинной» частоте  $f_{\text{ист}}$  осуществляется согласно выражению:  $f_{\text{ист}} = f_k \cdot F_D$ , где  $F_D$  – частота дискретизации измерительного сигнала  $x(n)$ .

<sup>4</sup> Относительно переменной  $l = \overline{0, L-1}$  в определении фазы пояснения о ее значениях будут даны в разделе измерение амплитуды дискретного гармонического сигнала методом параметрического ДПФ.

<sup>5</sup> Градштейн Н. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(x + ky) = \cos\left(x + \frac{n-1}{2}y\right) \sin \frac{ny}{2} \operatorname{cosec} \frac{y}{2}. \quad (7)$$

Формулы (6) и (7) позволяют представить выражение (5) в замкнутой форме путем замены:

$$k = n; \quad n = N; \quad x = \alpha; \quad y_1 = \frac{2\pi(m + \theta_1 - k - \theta)}{N};$$

$$y_2 = \frac{2\pi(m + \theta_1 + k + \theta)}{N}$$

в следующем виде:

$$S_N(k, \theta) = S_N^1(k, \theta) + S_N^2(k, \theta); \quad (8)$$

$$S_N^1(k, \theta) = \frac{A}{2} \left\{ \left[ \sin\left(\alpha + \frac{(N-1)\pi(m + \theta_1 - k - \theta)}{N}\right) - \right. \right.$$

$$\left. \left. -j \cos\left(\alpha + \frac{(N-1)\pi(m + \theta_1 - k - \theta)}{N}\right) \right] \frac{\sin(\pi(m + \theta_1 - k - \theta))}{N \sin(\pi(m + \theta_1 - k - \theta)/N)} \right\}. \quad (9)$$

$$S_N^2(k, \theta) = \frac{A}{2} \left\{ \left[ \sin\left(\alpha + \frac{(N-1)\pi(m + \theta_1 + k + \theta)}{N}\right) + \right. \right.$$

$$\left. \left. +j \cos\left(\alpha + \frac{(N-1)\pi(m + \theta_1 + k + \theta)}{N}\right) \right] \frac{\sin(\pi(m + \theta_1 + k + \theta))}{N \sin(\pi(m + \theta_1 + k + \theta)/N)} \right\}. \quad (10)$$

Выражение в квадратных скобках соотношения (9):

$$\left[ \sin\left(\alpha + \frac{(N-1)\pi(m + \theta_1 - k - \theta)}{N}\right) - \right.$$

$$\left. -j \cos\left(\alpha + \frac{(N-1)\pi(m + \theta_1 - k - \theta)}{N}\right) \right]$$

есть фазовый множитель функции:

$$\frac{\sin(\pi(m + \theta_1 - k - \theta))}{N \sin(\pi(m + \theta_1 - k - \theta)/N)}$$

А выражение в квадратных скобках соотношения (10):

$$\left[ \sin\left(\alpha + \frac{(N-1)\pi(m + \theta_1 + k + \theta)}{N}\right) + \right.$$

$$\left. +j \cos\left(\alpha + \frac{(N-1)\pi(m + \theta_1 + k + \theta)}{N}\right) \right]$$

есть фазовый множитель функции:

$$\frac{\sin(\pi(m + \theta_1 + k + \theta))}{N \sin(\pi(m + \theta_1 + k + \theta)/N)}$$

Функции:  $\frac{\sin(\pi(m + \theta_1 - k - \theta))}{N \sin(\pi(m + \theta_1 - k - \theta)/N)}$  и

$\frac{\sin(\pi(m + \theta_1 + k + \theta))}{N \sin(\pi(m + \theta_1 + k + \theta)/N)}$  являются функциями

Дирихле<sup>6</sup>:

$$\operatorname{diric}_p(x) = \frac{\sin(px/2)}{p \sin(x/2)};$$

где  $p$  – целое положительное число.

Аналитические выражения (8), (9) и (10) позволяют оценить вклад составляющих  $S_N^1(k, \theta)$  и  $S_N^2(k, \theta)$  в  $S_N(k, \theta)$  на положительных и отрицательных частотах<sup>7</sup>, а также в энергетический спектр сигнала (3)  $G_N(k, \theta) = N \cdot |S_N(k, \theta)|^2$ .

#### Эффективность измерения амплитуды дискретного гармонического сигнала методом параметрического ДПФ в сравнении с измерением амплитуды методом ДПФ

Прежде чем рассматривать вопросы измерения амплитуды дискретного гармонического сигнала методом параметрического ДПФ в сравнении с ДПФ, отметим два важных момента:

1. Процесс дискретизации в одной из областей (во временной или в частотной) сопровождается соответственно процессом периодизации в другой области (соответственно в частотной или во временной).

2. Необходимо различать продолжение сигнала, «навязываемое» измерительным преобразованием Фурье (ДПФ или ДПФ-П) и реальным продолжением сигнала.

Данные положения проиллюстрированы на рис. 1, а, б и рис. 2, а, б<sup>8</sup>.

Во введении отмечалось, что практическое применение ДПФ сопровождается рядом проблем, появление которых связано с проявлением негативных эффектов. Один из главных негативных эффектов – это эффект размывания спектральных составляющих (так называемый эффект утечки, англ. leakage). Проявление данного эффекта связано с тем, что при выполнении спектрального анализа исследуемой функции мы измеряем циклическую свертку истинного

<sup>6</sup> Сергиенко А. Б. Цифровая обработка сигналов. СПб.: Питер, 2011. 604 с.

<sup>7</sup> При применении ДПФ-П значения переменной  $(k + \theta)$  отождествляются с частотой: для четных  $N$  при  $k = 0, (N/2)$  – положительные частоты, при  $k = (N/2 + 1), (N - 1)$  – отрицательные частоты.

<sup>8</sup> Временное окно называется скользящим, если оно смещается на один отсчет по исходному сигналу.

спектра с функцией вида  $\frac{\sin(N \cdot x / 2)}{N \sin(x / 2)}$ , которая не локализована, а размыта по частоте (отсюда и название эффекта) (рис. 2, а, б). Если в скользящем временном окне «укладывается» целое число периодов гармонического ИС (рис. 1, а), то ДПФ обладает

«виртуальными избирательными свойствами», поскольку отсчеты ДПФ попадают в нули функции  $\frac{\sin(N \cdot x / 2)}{N \sin(x / 2)}$  (рис. 2, а). При этом продолжение сигнала – реальное и навязанное ДПФ – совпадает (рис. 1, а).

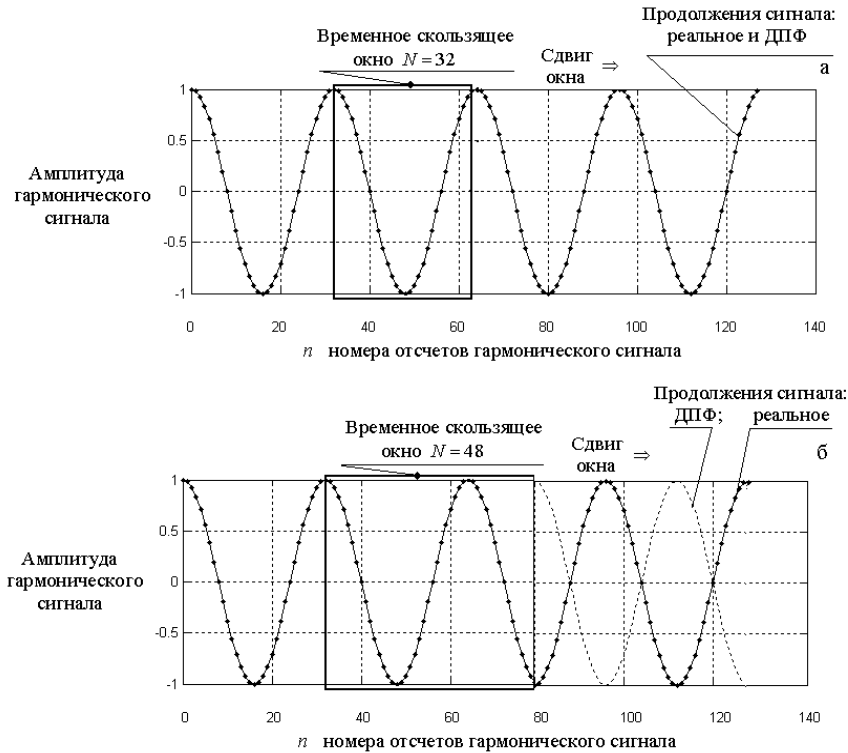


Рис. 1. Реальное и навязанное ДПФ продолжение сигнала

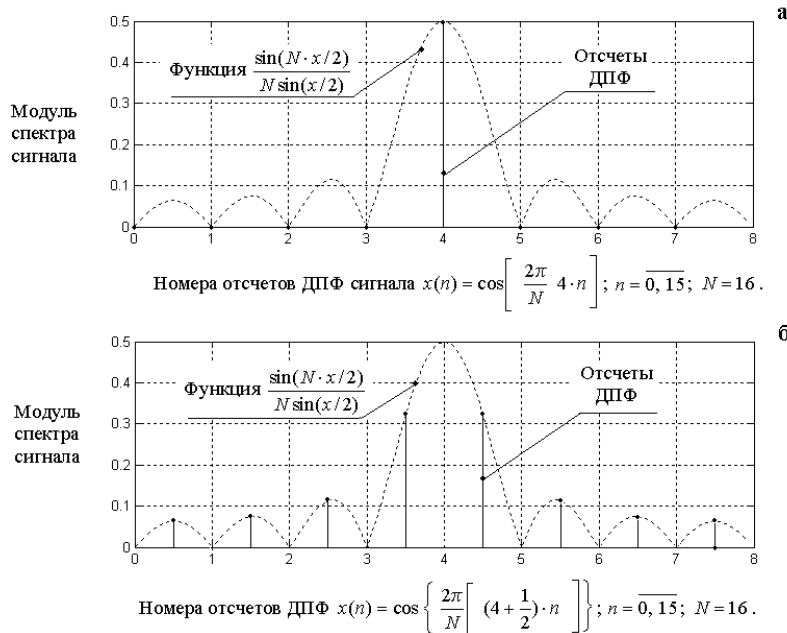


Рис. 2. Эффект утечки

В том случае когда в скользящем временном окне «укладывается» нецелое число периодов гармонического сигнала (рис. 1, б), то ДПФ не обладает «вир-

туальными избирательными свойствами», поскольку отсчеты ДПФ не попадают в нули функции

$\frac{\sin(N \cdot x / 2)}{N \sin(x / 2)}$  (рис. 2, б). При этом продолжение сигнала: реальное и навязанное ДПФ – не совпадают (рис. 1, б).

Из анализа соотношений (8)–(10) непосредственно следует вывод о том, что погрешность измерения амплитуды дискретного гармонического сигнала (3) методом параметрического ДПФ, в общем случае, зависят от длительности сигнала  $N$ , от фазы  $\alpha = \frac{2\pi}{N} \cdot l$ ,  $l = \overline{0, L-1}$  и нормированной частоты сигнала  $f_k = (m + \theta_1) / N$  (как от  $m$ , так и от  $\theta_1$ ).

Дадим пояснения по поводу определения фазы дискретного гармонического сигнала (3) в случае, когда во временном окне наблюдается нецелое число его периодов. В этом случае фазу дискретного гармонического сигнала (3) следует определять на целом числе периодов. Следовательно, когда во временном окне наблюдается целое число периодов сигнала (т. е.  $\theta_1 = 0$ ), то  $L = N$ . В том случае когда во временном окне наблюдается нецелое число периодов сигнала, то  $L > N$ ,  $0 < \theta_1 < 1$ . При этом число  $L$  определяется как число единичных сдвигов временного скользящего окна по реальному продолжению сигнала в нем (окне), пока не повторятся «начальные» значения сигнала (3).

Анализ соотношений (8)–(10) показал, что передаточная функция  $\frac{\sin(N \cdot x / 2)}{N \sin(x / 2)}$  составляющей  $S_N^1(k, \theta)$

проходит через нули передаточной функции  $\frac{\sin(N \cdot x / 2)}{N \sin(x / 2)}$  составляющей  $S_N^2(k, \theta)$ . В то же время

передаточная функция  $\frac{\sin(N \cdot x / 2)}{N \sin(x / 2)}$  составляющей

$S_N^2(k, \theta)$  не проходит через нули передаточной функции  $\frac{\sin(N \cdot x / 2)}{N \sin(x / 2)}$  составляющей  $S_N^1(k, \theta)$  за

исключением случая, когда параметр  $\theta$  сигнала (3) равен одной второй. Следовательно, можно предположить, что при измерении амплитуды сигнала (3) на положительной нормированной частоте  $f_k = (m + \theta_1) / N$ ,  $\theta_1 \neq 0$  и  $\theta_1 = 1/2$  методом ДПФ-П должен проявиться новый эффект – эффект неинвариантности энергетического спектра сигнала (3). При этом неинвариантность энергетического спектра сигнала (3) должна зависеть от его фазы (т. е. от того, какой отрезок реального продолжения сигнала находится во временном окне при измерении амплитуды).

Экспериментальная проверка методом численного моделирования подтвердила результаты, полученные теоретическим путем (рис. 3–4).

Экспериментальная проверка методом численного моделирования не только подтвердила результаты, полученные теоретическим путем, но и проявление нового явления, предсказанного теоретически, – проявление инвариантности энергетического спектра сигнала (3) при  $\theta_1 = 1/2$ .

Оценим эффективность разработанного метода измерения амплитуды дискретного гармонического сигнала методом параметрического ДПФ. Единственной возможностью уменьшить погрешность измерения амплитуды на нормированной частоте  $m + \theta_1$  сигнала (3) при применении БПФ – это увеличение числа бинов БПФ путем дополнения исходного сигнала  $x(n)$  нулевыми отсчетами. Этот процесс получил название операции дополнения нулями (ОДН).

Оценим вычислительные затраты и необходимую память для измерения амплитуды дискретного гармонического сигнала, заданного на  $N$  интервале и подвергнутого ОДН, методом ДПФ. При необходимости уменьшения погрешности измерения частоты сигнала (3) в  $R$  раз вычислительные затраты на измерение амплитуды методом БПФ составят  $P_{FFT}$  операций:

$$P_{FFT} = \frac{N \cdot R}{2} \cdot \log_2(N \cdot R), \quad (11)$$

а необходимый объем памяти –  $N \cdot R$  ячеек.

Вычислительные затраты методом БПФ-П составят

$$P_{FFT-P} = \frac{N \cdot \log_2 R}{2} \cdot \log_2 N, \quad (12)$$

а необходимый объем памяти –  $N$  ячеек.

Из соотношений (9)–(12) непосредственно следует, что измерение амплитуды дискретного гармонического сигнала (3) методом БПФ-П, в сравнении с методом БПФ, эффективнее по числу вычислительных операций в:

$$\frac{R \cdot (\log_2 N + \log_2 R)}{\log_2 R \cdot \log_2 N}, \text{ раз}, \quad (13)$$

а по необходимому объему памяти в  $R$  раз.

Элементарные расчеты показывают, что для сигнала (3) с параметрами:  $N = 64$ ,  $m = 16$ ,  $\theta_1 = 0,1$ ,  $R = 64$  решение задачи методом ДПФ-П потребует объема памяти в 64 раза меньше, а числа вычислительных операций в 21,3 раза меньше, чем решение задачи методом ДПФ.

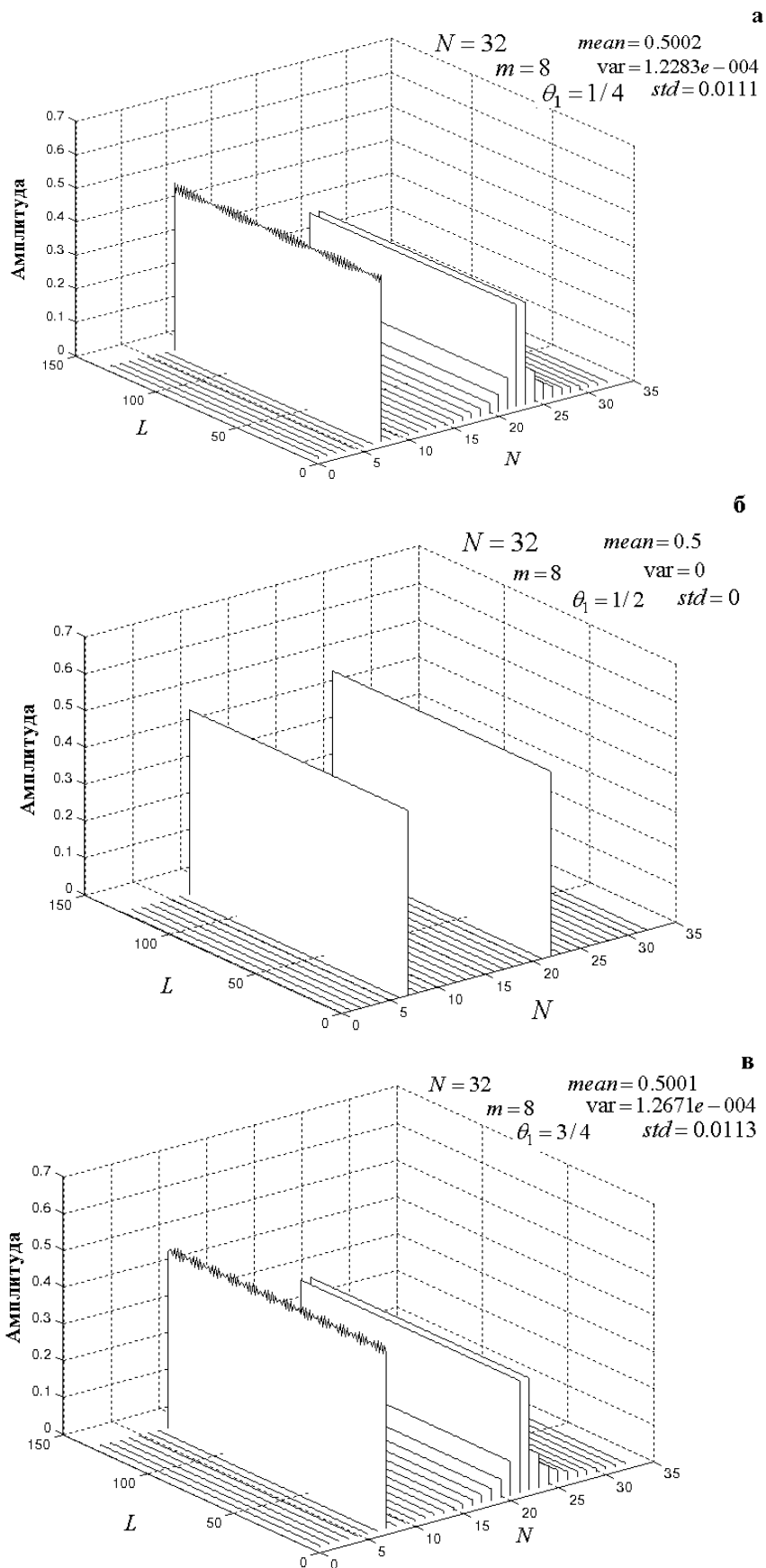


Рис. 3. Энергетические спектры сигнала длительностью 32 отсчета, где  $mean$  – оценка среднего значения;  $var$  – оценка дисперсии;  $std$  – оценка среднеквадратического отклонения; а –  $\theta_1 = 1/4$ ; б –  $\theta_1 = 1/2$ ; в –  $\theta_1 = 3/4$

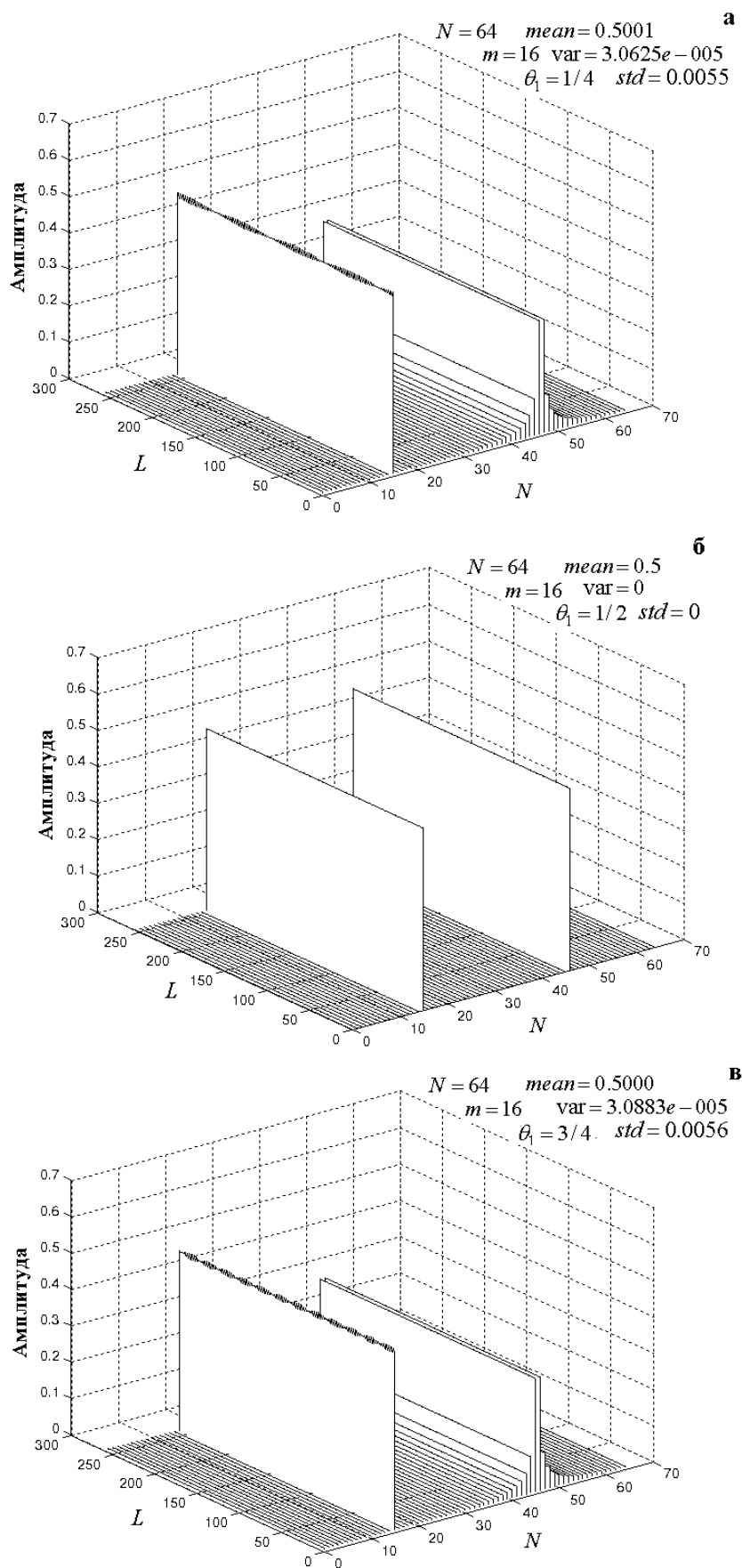


Рис. 4. Энергетические спектры сигнала длительностью 64 отсчета, где  $mean$  – оценка среднего значения;  $var$  – оценка дисперсии;  $std$  – оценка среднеквадратического отклонения;  $a - \theta_1 = 1/4$ ;  $b - \theta_1 = 1/2$ ;  $в - \theta_1 = 3/4$

## Вывод

Разработан эффективный и результативный алгоритм измерения амплитуды дискретного гармонического сигнала методом параметрического ДПФ, позволяющий, в сравнении с методом основанном на ДПФ, существенно сократить как требуемый объем памяти, так и вычислительные затраты.

## Библиографические ссылки

1. Серебрянников М. Г. Гармонический анализ. М. : ГИТТЛ, 1948. 504 с.
2. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. М. : ГИФМЛ, 1961.
3. Серебрянников М. Г., Первозванский А. А. Выявление скрытых периодичностей. М.: Наука, 1965. 244 с.
4. Lanczos C. Discourse on Fourier Series, Chapter 1, Heffner Publishing Co., New York, 1966, p. 7–47.
5. Финкелстайн Л. (Великобритания). Наука об измерениях: анализ состояния и направлений развития // Датчики и системы. 2010. № 2. С. 53–57.
6. Цветков Э. И. Основы математической метрологии. СПб. : Политехника, 2005. 510 с.
7. Cooley J. and Tukey J. "An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series," Math. Comput., Vol. 19, No. 90, Apr. 1965, pp. 297–301. DOI: 10.2307/2003354.
8. Rabiner L. R. and Gold B. Theory and Application of Digital Signal Processing, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1975, p. 367.
9. Oppenheim A. V. and Schaffer R. W. Discrete-Time Signal Processing, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 2009, p. 1120.
10. Цветков Э. И. Процессорные измерительные средства. ИЛ.: Энергоатомиздат, 1989. 224 с.
11. Ханян Г. С. Аналитическое исследование и оценка погрешностей в задаче измерения параметров гармонического сигнала методом преобразования Фурье // Измерительная техника. 2003. № 8. С. 3–10.
12. Батищев В. И. Аппроксимационные методы и системы измерения и контроля параметров периодических сигналов. М. : Физматлит, 2011. 240 с.
13. Смирнова Н. В., Пономарев В. А. Векторная и спектральная цифровая обработка сигналов в музыкальной акустике методом параметрического дискретного преобразования Фурье // Цифровая обработка сигналов. 2019. № 3. С. 3–11.
14. Пономарев В. А., Пономарева О. В. Виброакустическое диагностирование коробок передач станков цифровыми методами // Станки и инструмент. 1983. № 9. С. 18–21.
15. Пономарева О. В. Вероятностные свойства спектральных оценок, полученных методом параметрического дискретного преобразования Фурье // Интеллектуальные системы в производстве. 2010. № 2 (16). С. 36–42.
16. Пономарева О. В., Пономарев В. А. Измерение текущего энергетического Фурье-спектра комплексных и действительных дискретных сигналов на конечных интервалах // Интеллектуальные системы в производстве. 2013. № 2 (22). С. 149–157.
17. Пономарева О. В. Инвариантность скользящего энергетического спектра Фурье дискретных сигналов в базисной системе параметрических экспоненциальных функций // Вестник Ижевского государственного технического университета. 2014. № 2. С. 102–106.
18. Пономарев В. А., Пономарева О. В. Инвариантность текущего энергетического фурье-спектра комплексных дискретных сигналов на конечных интервалах // Известия

высших учебных заведений России. Радиоэлектроника. 2014. № 2, С.8-16.

19. Пономарева О. В., Пономарева Н. В., Пономарева В. Ю. Применение временных окон в векторном анализе дискретных сигналов // Интеллектуальные системы в производстве. 2016. № 2 (29). С. 19–21.

20. Пономарев В. А., Пономарева О. В. Тенденции развития дискретных косвенных измерений параметров электрических сигналов // Метрология. 2017. № 1. С. 20–32.

21. Пономарева Н. В., Пономарева О. В., Хворенков В. В. Определение огибающей ангармонического дискретного сигнала на основе преобразования Гильберта в частотной области // Интеллектуальные системы в производстве. 2018. Т. 16. № 1. С. 33–40.

22. Пономарева О. В. Аперриодическое дискретное преобразование Фурье в задачах измерения энергетического спектра случайных сигналов // Интеллектуальные системы в производстве. 2019. Т. 17. № 3. С. 89–96.

23. Пономарева О. В. Теоретико-вероятностные характеристики случайных дискретных информационных сигналов и аксиомы их измерения // Интеллектуальные системы в производстве. 2019. Т. 17. № 2. С. 73–80.

24. Пономарев А. В. Основы теории двумерной цифровой обработки сигналов в базисах Фурье с варьируемыми параметрами // Цифровая обработка сигналов. 2019. № 2. С. 12–20.

25. Пономарева О. В., Пономарев А. В., Смирнова Н. В. Цифровизация измерений спектров в базисе Фурье – тенденции развития и проблемы // Приборы и методы измерений. 2019. № 3. С. 271–280. DOI:21122/2220-95062-2019-10-3-271-280.

26. Пономарева О. В., Пономарев А. В. Быстрый метод диагональной скользящей пространственно-частотной обработки дискретных сигналов // Интеллектуальные системы в производстве. 2019. Т. 17. № 3. С. 105–114.

27. Пономарева О. В., Пономарев А. В. Быстрый метод горизонтальной скользящей пространственно-частотной обработки // Интеллектуальные системы в производстве. 2019. Т. 17. № 2. С. 81–87.

28. Пономарева О. В., Пономарев А. В. Интерполяция в пространственной области двумерных дискретных сигналов с помощью быстрых преобразований Фурье // Интеллектуальные системы в производстве. 2019. Т. 17. № 1. С. 88–94. DOI 10.22213/2410-9304-2019-88-94.

## References

1. Serebryannikov M.G. *Garmonicheskij analiz* [Harmonic analysis]. Moscow, GITTL, 1948, 504 p. (in Russ.).
2. Lancosh K. *Prakticheskie metody prikladnogo analiza* [Practical methods of applied analysis]. Moscow, GIFFL, 1961, 324 p. (in Russ.).
3. Serebryannikov M.G., Pervozvanskij A.A. *Vyyavlenie skrytyh periodichnostej* [Identification of latent periodicities]. Moscow, Nauka Publ., 1965. 244 p. (in Russ.).
4. Lanczos, C. Discourse on Fourier Series, Chapter 1, Heffner Publishing Co., New York, 1966, pp. 7-47.
5. Finkelstajn, L. (Velikobritaniya). *Nauka ob izmereniyah* [The science of measurements: analysis of the state and directions of development]. *Sensors and systems*. 2010. no. 2. pp. 53-57 (in Russ.).
6. Cvetkov E.I. *Osnovy matematicheskoy metrologii* [Fundamentals of Mathematical Metrology]. St. Petersburg, Polytechnic, 2005. 510 p. (in Russ.).
7. Cooley, J. and Tukey, J. "An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series," Math. Comput. Vol. 19, no. 90. Apr. 1965, pp. 297-301. DOI: 10.2307/2003354.



8. Rabiner, L. R. and Gold, B. Theory and Application of Digital Signal Processing, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1975, p. 367.
9. Oppenheim, A.V., and Schaffer, R.W. Discrete-Time Signal Processing, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 2009, p. 1120.
10. Cvetkov E.I. *Processornye izmeritel'nye sredstva* [Processor measuring tools]. IL.: Energoatomizdat, 1989. 224 p. (in Russ.).
11. Hanyan G.S. [Analytical research and error estimation in the problem of measuring the parameters of a harmonic signal by the Fourier transform method]. *Measuring technique*, 2003, no. 8, pp. 3-10 (in Russ.).
12. Batishchev V.I. *Approximacionnye metody i sistemy izmereniya i kontrolya parametrov periodicheskikh signalov* [Approximation methods and systems for measuring and monitoring the parameters of periodic signals]. Moscow, Fizmatlit, 2011. 240 p. (in Russ.).
13. Smirnova N.V., Ponomareva O.V. [Vector and spectral digital signal processing in musical acoustics by the method of parametric discrete Fourier transform]. *Digital signal processing*. 2019, no. 2, pp. 3-11 (in Russ.).
14. Ponomarev V.A., Ponomareva O.V. [Vibroacoustic diagnosis of machine gearboxes by digital methods]. *Machine tools and tools*. 1983. No. 9, pp. 18-21. (in Russ.).
15. Ponomareva O.V. [Probabilistic properties of spectral estimates obtained by the method of parametric discrete Fourier transform]. *Intellektual'nye sistemy v proizvodstve*, 2010, no. 2, pp. 36-42. (in Russ.).
16. Ponomareva O.V., Ponomarev V.A. [Measurement of the current energy Fourier spectrum of complex and real discrete signals at finite intervals]. *Intellektual'nye sistemy v proizvodstve*, 2013, no. 2, pp. 149-157 (in Russ.).
17. Ponomareva O.V. [Invariance of the moving Fourier spectrum of discrete signals in the basis system of parametric exponential functions] *Vestnik Izhevskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, 2014. no. 2, pp. 102-106 (in Russ.).
18. Ponomarev V.A., Ponomareva O.V. [Invariance of the current energy Fourier spectrum of complex discrete signals at finite intervals]. *Izvestiya vysshih uchebnykh zavedenij Rossii. Radioelektronika*, 2014, no. 2, pp. 8-16. (in Russ.).
19. Ponomareva O.V., Ponomareva N.V., Ponomareva V.Yu. [The use of time windows in the vector analysis of discrete signals]. *Intellektual'nye sistemy v proizvodstve*, 2016, no. 2 (29), pp. 19-21 (in Russ.).
20. Ponomarev V.A., Ponomareva O.V. [Trends in the development of discrete indirect measurements of the parameters of electrical signals]. *Metrology*, 2017. No. 1, pp. 20-32 (in Russ.).
21. Ponomareva N.V., Ponomareva O.V., Khvorenkov V.V. [Determination of the envelope of an anharmonic discrete signal based on the Hilbert transform in the frequency domain]. *Intellektual'nye sistemy v proizvodstve*, 2018, vol. 16, no. 1 pp. 33-40. (in Russ.).
22. Ponomareva O.V. [Aperiodic discrete Fourier transform in the problems of measuring the energy spectrum of random signals]. *Intellektual'nye sistemy v proizvodstve*, 2019, vol. 17, no. 3, pp. 89-96. (in Russ.).
23. Ponomareva O.V. [Probability Theoretical Characteristics of Random Discrete Information Signals and the Axioms of Their Measurement]. *Intellektual'nye sistemy v proizvodstve*, 2019, vol. 17, no. 2, pp. 73-80. (in Russ.).
24. Ponomarev A.V. [Fundamentals of the theory of two-dimensional digital signal processing in Fourier bases with variable parameters]. *Digital signal processing*. 2019, no. 2, pp. 12-20 (in Russ.).
25. Ponomareva O.V., Ponomarev A.V., Smirnova N.V. [Digitalization of spectral measurements in the Fourier basis - development trends and problems]. *Instruments and methods of measurements*. 2019, no. 3, pp. 271-280. DOI: 21122 / 2220-95062-2019-10-3-271-280.
26. Ponomareva O.V., Ponomarev A.V. [The fast method of diagonal sliding spatial-frequency processing of discrete signals]. *Intellektual'nye sistemy v proizvodstve*, 2019, vol. 17, no. 3, pp. 105-114. (in Russ.).
27. Ponomareva O.V., Ponomarev A.V. [The fast method of horizontal sliding spatial-frequency processing]. *Intellektual'nye sistemy v proizvodstve*, 2019, vol. 17, no. 2, pp. 81-87. (in Russ.).
28. Ponomareva O.V., Ponomarev A.V. [Interpolation in the spatial domain of two-dimensional discrete signals using fast Fourier transforms]. *Intellektual'nye sistemy v proizvodstve*, 2019. Vol. 17. no. 1 (in Russ.). DOI 10.22213 / 2410-9304-2019-88-94.

\*\*\*

### Discrete Harmonic Signal Amplitude Measurement Method of Parametric DFT

A. V. Ponomarev, PhD in Economics, Associate Professor, Kalashnikov ISTU, Izhevsk, Russia

The directions of digitalization of measurements, processes of development and implementation of efficient digital information technologies in measurement procedures are considered. The problems of measuring the amplitude of a discrete harmonic signal specified on a finite interval are studied by the method of measuring transformation - by the method of discrete Fourier transform. To solve the existing problems that arise when measuring the amplitude of a discrete harmonic signal by the method of the discrete Fourier transform, it is proposed to use a generalization of the discrete Fourier transform — the parametric discrete Fourier transform. The analytical properties of the basis of the parametric discrete Fourier transform, the basis of parametric exponential functions, are investigated. It is shown that due to the multiplicativity of the basis of the parametric discrete Fourier transform in one of the variables, there are fast algorithms for implementing the parametric discrete Fourier transform. The theoretical basis for measuring the amplitude of a discrete harmonic signal based on the parametric discrete Fourier transform is developed. The causes of non-invariance of the energy spectrum of a discrete harmonic signal specified on a finite interval are studied by the method of measuring transformation - by the method of parametric discrete Fourier transform. A method for determining (estimating) the errors of measuring the amplitude of a harmonic signal by the method of parametric discrete Fourier transform is proposed. Numerical modeling conducted an experimental verification of the theoretical results obtained in the work.

**Keywords:** parametric discrete Fourier transform, harmonic signal, measurement error, measuring transformation, computational transformation, basic system.

Получено: 15.11.19