

УДК 621.317.08

DOI: 10.22213/2410-9304-2019-4-116-122

## ОГИБАЮЩАЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ДИСКРЕТНОГО СИГНАЛА НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ И МЕТОДЫ ЕЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

О. В. Пономарева, доктор технических наук, профессор,  
ИжГТУ имени М.Т. Калашникова, Ижевск, Россия

А. В. Пономарев, кандидат экономических наук, доцент, ИжГТУ имени М.Т. Калашникова, Ижевск, Россия

*Исследуются методы определения огибающих (мгновенных амплитуд) действительного сигнала как для непрерывного, так и дискретного случая. Рассматривается представление действительного непрерывного и дискретного сигнала во временной и частотной областях. Показано, что применение того или иного представления сигнала определяется областью приложения метода обработки сигнала. Дан анализ преимуществ и недостатков существующих методов определения огибающей (мгновенной амплитуды) действительного сигнала для непрерывного и дискретного случая. Обоснована эффективность выбора определения сопряженного сигнала методом преобразования Гильберта. Рассмотрен вопрос определения гильбертовой огибающей для действительных, дискретных, финитных сигналов методами дискретного преобразования Фурье и дискретно-временного преобразования Фурье. Выявлена главная причина больших относительных погрешностей при измерении гильбертовых огибающих методом дискретного преобразования Фурье. Разработан новый результативный и эффективный метод измерения огибающей действительного, дискретного, финитного сигнала, который на порядок уменьшает относительную погрешность ее измерения, на порядок сокращает вычислительные затраты и необходимую память для реализации метода. Полученные в работе теоретические результаты подтверждены результатами численного моделирования измерения огибающей действительного, дискретного, финитного сигнала существующими и предложенными методами.*

**Ключевые слова:** огибающая действительного сигнала, финитная функция, цифровая обработка сигнала, конечный интервал, параметрическое преобразование Фурье.

**Введение**

В теории обработки непрерывных сигналов (ОНС) определение огибающей действительного сигнала (мгновенной амплитуды действительного сигнала) является одним из главных вопросов при решении многих важных и актуальных задач. В то же время широкое внедрение в практику методов и средств цифровой обработки сигналов потребовало переосмысления многих понятий и положений, введенных в теории обработки непрерывных сигналов (ОНС), разработки теории цифровой обработки сигналов (ЦОС). Яркий пример тому соотношения между собой непрерывного преобразования Фурье и дискретного преобразования Фурье, преобразование Гильберта непрерывных сигналов и преобразование Гильберта дискретных сигналов, понятия аналитического сигнала, мгновенной амплитуды (огибающей) и мгновенной частоты в непрерывном и дискретном случае.

Действительный сигнал  $x(t)$ ,  $-\infty < t < +\infty$ , может быть определен из представления во временной области:

$$x(t) = A(t) \cdot \cos [\varphi(t)], \quad (1)$$

и из представления в частотной области:

$$x(t) = \sum_k A_k \cos (2\pi f_k t + \varphi_k), \quad (2)$$

где  $A(t)$  – мгновенная амплитуда (огибающая) сигнала;  $\varphi(t)$  – мгновенная фаза сигнала  $x(t)$ ;  $A_k$  – амплитуда  $k$  гармонической компоненты;  $f_k$  – частота  $k$  гармонической компоненты;  $\varphi_k$  – начальная фаза  $k$  гармонической компоненты.

Соотношениями (1) и (2) задаются два равноправных представления сигнала  $x(t)$ . Применение того или иного представления определяется областью приложения метода ОНС<sup>1</sup>.

Если поставить в соответствие сигналу  $x(t)$  (1) некоторый комплексный сигнал  $y(t)$  [1]:

$$y(t) = x(t) + j \cdot v(t), \quad (3)$$

и представить сигнал  $y(t)$  в виде:

$$y(t) = \left( \sqrt{x^2(t) + v^2(t)} \right) \cdot \exp \left\{ j \cdot \arctg \frac{v(t)}{x(t)} \right\} = A(t) \cdot \exp \{ j \cdot \varphi(t) \}, \quad (4)$$

то мгновенная фаза, огибающая и мгновенная частота будут определяться следующими соотношениями:

$$\varphi(t) = \arctg \frac{v(t)}{x(t)}; \quad A(t) = [\sqrt{x^2(t) + v^2(t)}];$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\frac{dv(t)}{dt} \cdot x(t) - \frac{dx(t)}{dt} \cdot v(t)}{x^2(t) + v^2(t)}. \quad (5)$$

Из соотношений (3)–(5) непосредственно следует вывод, что выбор функции  $v(t)$  в выражении (3) позволяет однозначно определить мгновенные пара-

<sup>1</sup> Частотное представление (2) сигнала  $x(t)$ , благодаря принципу суперпозиции, нашло широкое применение при анализе линейных цепей с постоянными параметрами. Временное представление (1) сигнала  $x(t)$  используется при анализе безынерционных нелинейных цепей.

метры сигнала  $x(t)$ . На практике функция  $v(t)$  в выражении (3) определяется некоторым оператором  $\mathfrak{R}$ , преобразующим сигнал  $x(t)$  в сигнал  $v(t)$ .

Таким образом, существующее различие в определениях мгновенных параметров сигнала  $x(t)$  объясняется выбором различных операторов для определения сигнала  $v(t)$ .

В работе [2] доказано, что если выбирать оператор  $\mathfrak{R}$  с учетом выполнения вполне понятных требований<sup>2</sup>, то единственным линейным (аддитивным) оператором, удовлетворяющим указанным выше условиям, является *оператор Гильберта*  $\mathfrak{S}$ :

$$v(t) = \mathfrak{S} [x(t)] = \text{VP} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau, \quad (6)$$

где VP – символ главного значения по Коши.

В том случае когда сигнал  $x(t)$  интегрируем в квадрате, то:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega, \quad (7)$$

где  $S(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$  – спектральная плотность сигнала  $x(t)$ .

Поставив в соответствие эрмитовой функции  $S(j\omega)$ <sup>3</sup> эрмитову функцию  $V(j\omega)$

$$V(j\omega) = \begin{cases} -jS(j\omega), & \omega > 0, \\ 0, & \omega = 0, \\ jS(j\omega), & \omega < 0. \end{cases} \quad (8)$$

Нетрудно видеть, что обратное преобразование Фурье  $V(j\omega)$  определяет преобразование Гильберта (ПГ) сигнала  $x(t)$ :

$$v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} V(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega. \quad (9)$$

Формулами (6) и (9) определены, соответственно, два равноправных метода получения ПГ действительного сигнала  $x(t)$ : во временной и частотной областях.

Соотношение (8) позволяет проиллюстрировать физический смысл ПГ: фазовый поворот  $V(j\omega)$  от-

носительно  $S(j\omega)$  на положительных частотах на  $-\pi/2$ , на отрицательных частотах на  $+\pi/2$ .

Сигнал (3), мнимая часть которого формируется с помощью оператора Гильберта  $\mathfrak{S}$ , называют *гильбертовым сигналом*<sup>4</sup>  $y_3(t)$ , мнимую часть которого называют *сопряженным сигналом*  $v_3(t)$  по отношению к сигналу  $x(t)$ :

$$y_3(t) = x(t) + j \cdot v_3(t). \quad (10)$$

ПГ – *нелокальное преобразование*, поскольку согласно соотношению (6) для нахождения сопряженного сигнала  $v_3(t)$  требуется знать сигнал  $x(t)$  при изменении  $t$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ . В то же время ПГ – *асимптотически локальное преобразование*, поскольку ядро этого преобразования есть функция вида  $\sin(x)/x$ .

В связи с тем что ПГ не обладает свойством локальности, *гильбертова огибающая* не обладает свойством финитности.

В том случае когда сигнал  $x(t)$  является финитным<sup>5</sup> в связи с отсутствием свойства финитности у гильбертовой огибающей, при ее определении возникают проблемы, для решения которых предложена модификация ПГ – преобразование Гильберта – Коржика (ПГК) [3]. Суть данной модификации ПГ заключается в периодическом продолжении финитного сигнала  $x(t)$  на всю временную ось:  $-\infty < t < +\infty$ . Как нетрудно видеть, эта операция приводит к периодическому продолжению сопряженного сигнала  $v(t)$ , а также и к финитности гильбертовой огибающей сигнала  $x(t)$ .

Проведенный анализ ПГК показал, что данная модификация ПГ, во-первых, только частично решает проблему финитности гильбертовой огибающей сигналов, заданных на конечном интервале, во-вторых, приводит к дополнительным погрешностям определения гильбертовой огибающей методического характера.

Цель данной работы – исследование эффективности существующих методов определения огибающей действительного сигнала, заданного на конечном интервале, и разработка нового результативного и эффективного метода ее определения для действительного дискретного финитного сигнала.

<sup>2</sup> Требования к выбору оператора  $\mathfrak{R}$ : малые изменения сигнала  $x(t)$  должны приводить к малым изменениям мгновенных параметров; мгновенная фаза и мгновенная частота сигнала  $x(t)$  не должны изменяться при изменении мощности сигнала  $x(t)$  при неизменной его форме; параметры гармонического сигнала должны соответствовать их классическим определениям.

<sup>3</sup> Спектральная плотность  $S(j\omega)$  является эрмитовой функцией, поскольку ее действительная часть является четной функцией частоты  $\omega$ , а мнимая часть нечетной функцией частоты  $\omega$ .

<sup>4</sup> Авторы статьи избегают называть *гильбертовы сигналы* *аналитическими сигналами*, практики широко распространенной как в отечественной, так и зарубежной научной литературе. Такая позиция авторов объясняется тем, что *аналитический комплексный сигнал* совсем не обязательно должен быть *гильбертовым сигналом*.

<sup>5</sup> Финитный сигнал – сигнал  $x(t)$ , заданный на бесконечной прямой  $(-\infty, +\infty)$  и отличный от нуля на интервале длительностью  $T_0$   $(t_0, (t_0 + T))$  (т. е.  $x(t) = 0$  при  $t < t_0$  и  $t > (t_0 + T)$ ).

### Основной раздел

Пусть задан действительный сигнал  $x(t)$ ,  $-\infty < t < +\infty$ , спектр которого ограничен частотой  $F_1$ . Согласно теореме Котельникова<sup>6</sup> сигнал  $x(t)$  может быть получен интерполяцией дискретного сигнала  $x(n)$  при целочисленных  $n$ ,  $-\infty < n < +\infty$ , с помощью ядра Котельникова  $\frac{\sin 2\pi F_1(t-n)}{2\pi F_1(t-n)}$ :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \frac{\sin 2\pi F_1(t-n)}{2\pi F_1(t-n)}, \quad (11)$$

где  $x(n)$  – действительный дискретный сигнал (действительная последовательность), полученный дискретизацией непрерывного действительного сигнала  $x(t)$  с частотой дискретизации  $F_D = 2F_1$ .

Воспользовавшись теоремой Котельникова (11) и соотношением (6), можно найти мнимую часть гильбертова сигнала  $v_3(t)$  в двух альтернативных формах:

$$v_3(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \frac{(1 - \cos \pi(t-n))}{\pi(t-n)}; \quad (12)$$

$$v_3(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \frac{\sin^2(\pi(t-n)/2)}{\pi(t-n)/2}. \quad (13)$$

Отметим, что в формулах (12) и (13) функции  $f(t-n) = \frac{(1 - \cos \pi(t-n))}{\pi(t-n)}$  и  $f(t-n) = \frac{\sin^2(\pi(t-n)/2)}{\pi(t-n)/2}$  интерполируют дискретный сигнал  $x(n)$ . Исходя из соотношений (11)–(13) непрерывная гильбертова огибающая  $A_{3,\infty}(t)$  равна:

$$A_{3,\infty}(t) = \left[ \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \frac{\sin 2\pi F_1(t-n)}{2\pi F_1(t-n)} \right)^2 + \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \frac{\sin^2(\pi(t-n)/2)}{\pi(t-n)/2} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (14)$$

Отметим, что сопряженный сигнал  $v_3(t)$  и гильбертова огибающая  $A_{3,\infty}(t)$  не являются финитными.

Формулы (12) и (13) позволяют, положив  $F_D = 1$ , дискретную импульсную характеристику дискретного ПГ (ДПГ) (рис. 1) представить в следующих двух эквивалентных формах:

$$h_3(n) = \frac{(1 - \cos(\pi n))}{\pi n}; \quad h_3(n) = \frac{\sin^2(\pi n/2)}{(\pi n)/2}. \quad (15)$$

<sup>6</sup> **Теорема Котельникова:** «Любую функцию  $x(t)$ , состоящую из частот от 0 до  $F_1$ , можно передавать с любой точностью при помощи чисел, следующих друг за другом через  $1/2F_1$  с.»

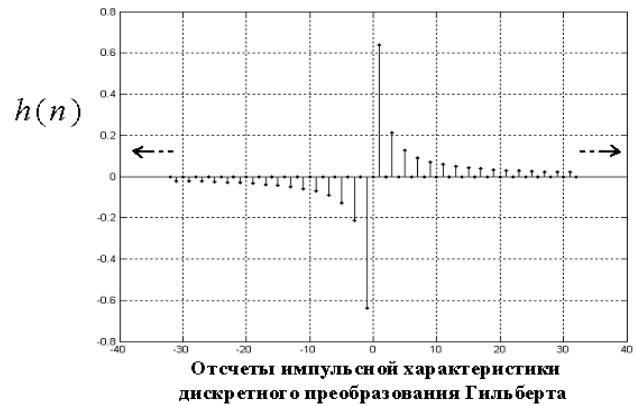


Рис. 1. Дискретная импульсная характеристика дискретного преобразования Гильберта

Гильбертов дискретный сигнал при этом определяется следующим выражением:

$$y_3(n) = x(n) + j \cdot v_3(n), \quad (16)$$

где сопряженный дискретный сигнал  $v_3(n)$  задается сверткой:

$$v_3(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k). \quad (17)$$

Естественно, реализовать на компьютере теоретические соотношения (14) и (16) мы не можем, поскольку на практике мы имеем дело с дискретными сигналами, заданными на конечном интервале  $0, (N-1)$ , где  $N$  может быть большим числом, но не бесконечным.

Для реализации ДПГ во временной области в виде КИХ-фильтра необходимо тем или иным способом «усечь» импульсную характеристику ДПГ  $h_3(n)$ . Останавливаться подробно на этом способе (далеко не лучшим) реализации ДПГ не будем, поскольку его преимущества и существенные недостатки подробно рассмотрены в [4].

Рассмотрим более эффективный способ получения гильбертова сигнала – реализацию ДПГ в частотной области на основе дискретного преобразования Фурье.

Введем в рассмотрение прямое дискретное преобразование Фурье (ДПФ), которое является разложением дискретного сигнала  $x(n)$  на конечном интервале  $n = \overline{0, N-1}$  по системе дискретных экспоненциальных функций (ДЭФ) (базису ДПФ) [5–8].

Прямое дискретное преобразование Фурье (ДПФ), получившее в настоящее время широчайшее распространение благодаря алгоритмам быстрого преобразования Фурье, в алгебраической форме задается следующим выражением:

$$S_N(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn};$$

$$W_N = \exp\left(-j \frac{2\pi}{N}\right), \quad k = \overline{0, (N-1)}, \quad (18)$$

где  $x(n)$  – дискретный сигнал, заданный на  $N$  – интервале, т. е.  $n = \overline{0, N-1}$ ,  $S_N(k)$  – коэффициенты ДПФ (спектр).

Обратное дискретное преобразование Фурье (ОДПФ) определяется соотношением:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} S_N(k) W_N^{-kn}. \quad (19)$$

Исходя из соотношений (16) и (18) ДПГ в частотной области сигнала  $x(n)$ ;  $n = \overline{0, N-1}$ , определим в следующем виде:

$$x_{\text{ДПФ } \mathfrak{z}}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} V_N(k) W_N^{-kn};$$

$$V_N(k) = \begin{cases} -j \cdot S_N(k) & \text{при } k = \overline{1, (N/2-1)}; \\ S_N(k) = 0 & \text{при } k = 0; k = N/2; \\ +j \cdot S_N(k) & \text{при } k = \overline{(N/2+1), (N-1)}, \end{cases} \quad (20)$$

где  $x_{\text{ДПФ } \mathfrak{z}}(n)$  – сопряженный сигнал, полученный методом ДПФ.

Гильбертов сигнал

$$y_{\text{ДПФ } \mathfrak{z}}(n) = x(n) + j \cdot x_{\text{ДПФ } \mathfrak{z}}(n) \quad (21)$$

позволяет однозначно определить огибающую действительного дискретного сигнала  $x(n)$  методом ДПФ:

$$A_{\text{ДПФ}}(n) = \sqrt{x^2(n) + x_{\text{ДПФ } \mathfrak{z}}^2(n)}. \quad (22)$$

Алгоритм получения гильбертова сигнала  $y_{\text{ДПФ } \mathfrak{z}}(n)$  представлен на рис. 2.

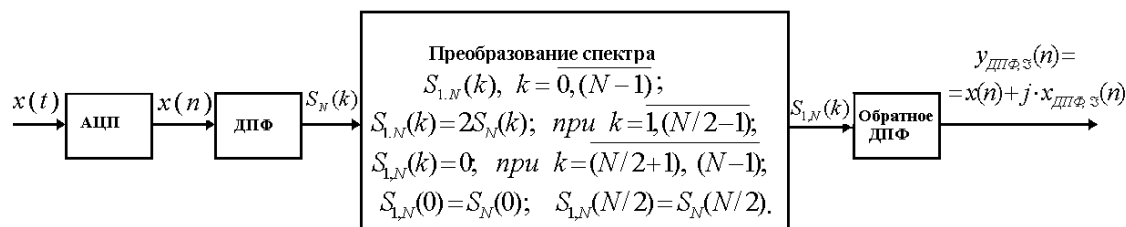


Рис. 2. Алгоритм получения гильбертова сигнала методом ДПФ

Отметим, что ДПГ в частотной области на основе ДПФ, по сути дела, является дискретным вариантом преобразования Гильберта – Коржика.

Рассмотрим способ получения гильбертова сигнала на основе дискретно-временного преобразования (ДВПФ).

Действительному дискретному финитному сигналу  $x(n)$ , заданному на  $N$ -интервале, поставим в соответствие сигнал вида:

$$x_1(n) = x(n), \quad n = \overline{0, N-1};$$

$$x_1(n) = 0 \quad \text{при } -\infty < n < 0 \quad \text{и при } N \leq n < \infty. \quad (23)$$

ДВПФ сигнала  $x_1(n)$ ;  $-\infty < n < +\infty$ , определяется как  $z$ -преобразование  $x_1(n)$  на единичной окружности:

$$\begin{aligned} S(z) \Big|_{z=\exp(-j2\pi f)} &= S(j2\pi f) = S(j\omega) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n) \cdot \exp(-j2\pi \cdot f \cdot n) = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot \exp(-j2\pi \cdot f \cdot n); \quad 0 \leq f < 1. \end{aligned} \quad (24)$$

Из соотношений (8), (9) и (24) непосредственно следует, что выражение:

$$x_{1 \text{ ДВПФ } \mathfrak{z}}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} V(j\omega) \cdot e^{j\omega n} d\omega; \quad -\infty < n < +\infty; \quad (25)$$

определяет сопряженный сигнал по отношению к сигналу  $x_1(n)$ . Следовательно, огибающая действительного дискретного сигнала  $x_1(n)$ , определенная методом ДВПФ, равна:

$$A_{\text{ДВПФ}}(n) = \sqrt{x_1^2(n) + x_{1 \text{ ДВПФ } \mathfrak{z}}^2(n)}; \quad -\infty < n < +\infty. \quad (26)$$

Нетрудно видеть, что сопряженный сигнал  $x_{1 \text{ ДВПФ } \mathfrak{z}}(n)$  и огибающая  $A_{\text{ДВПФ}}(n)$  не являются финитными функциями, а непосредственное нахождение огибающей  $A_{\text{ДВПФ}}(n)$  согласно формуле (26) проблематично в силу пределов изменения аргумента  $n$ . Для определения огибающей сигнала  $x_1(n)$  (23) применим следующий подход.

Вернемся к ДПФ. Частота дискретизации спектра  $S_N(k)$  (18) равна  $f_0 = 1/N$ . Во временной области спектру  $S_N(k)$  (рис. 3, б) будет соответствовать сигнал  $x(n)$  (рис. 3, а). Отметим, что, несмотря на то, что сигнал  $x(n)$  и спектр  $S_N(k)$  заданы на  $N$ -интервалах, они периодически продолжают на всю временную и частотную оси соответственно<sup>7</sup>.

Подвергнем спектр  $S_N(k)$  дискретизации с частотой  $f_0 = 2/N$  и получим спектр  $S_{1,N}(k)$  (рис. 4, б). Во

<sup>7</sup> Свойство периодичности ДПФ объясняется тем, что ДПФ равно ДВПФ периодического дискретного сигнала. Если сигнал периодичен, то прямое ДВПФ дискретно. Если спектр периодичен, то обратное ДВПФ дискретно. Если сигнал дискретен, то прямое ДВПФ периодично. Если спектр дискретен, то обратное ДВПФ периодично.

временной области спектру  $S_{1,N}(k)$  будет соответствовать сигнал  $x_1(n)$  (рис. 4, а), который представляет собой сигнал  $x(n)$ , дополненный пятнадцатью нулями.

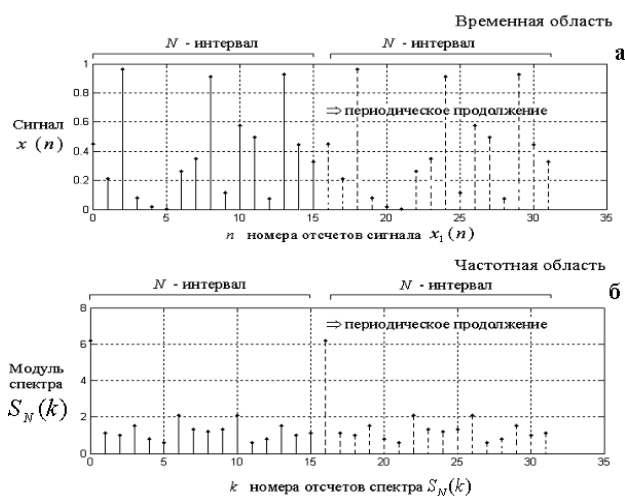


Рис. 3. Дискретное преобразование Фурье дискретного  $x(n)$ ;  $n = 0, 15$

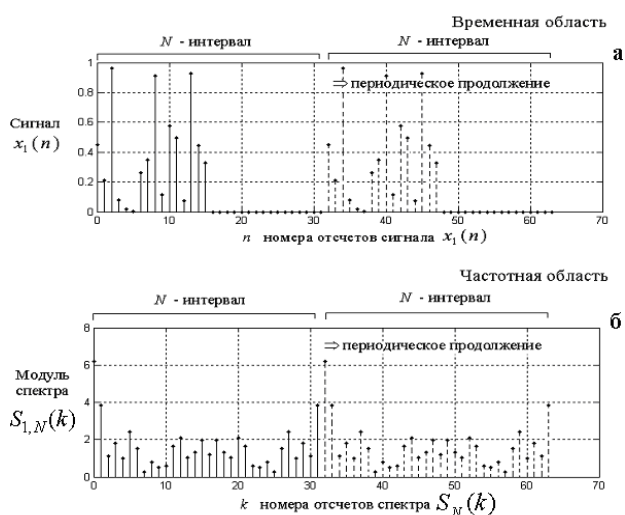


Рис. 4. Дискретное преобразование Фурье дискретного  $x_1(n)$ , заданного на  $N$ -интервале и дополненного  $N$  нулями<sup>8</sup>

Справедливо и обратное утверждение: дополнение нулями сигнала  $x(n)$  приводит к увеличению частоты дискретизации спектра  $S_N(k)$ . Следовательно, увеличивая число нулевых отсчетов в сигнале  $x(n)$ , мы можем вычислить огибающую на  $N$ -интервале сигнала  $x(n)$ , которая по мере увеличения числа нулевых отсчетов в сигнале  $x(n)$  будет все более приближаться к огибающей  $A_{ДВПФ}(n)$ .

Для подтверждения теоретических результатов было приведено численное моделирование (рис. 5, а, б, в; рис. 6, а, б, в; рис. 7, а, б, в). При моделировании для получения «истинной» огибающей  $A_{ДВПФ}(n)$  сигнал  $x(n)$ ,  $n = 0, N-1$ ,  $N = 64$  дополнялся 16320 нулевыми отсчетами. Дискретное преобразование Фурье полученного сигнала  $x_1(n)$  осуществлялось методом параметрического ДПФ [9, 10], что позволило сократить затраты памяти в 256 раз, а вычислительные затраты – в 7 раз. Метод ДПФ-П (рис. 7, в) предполагает дополнение сигнала  $x(n)$ ,  $n = 0, N-1$ ,  $N = 64$  192 нулевыми отсчетами.

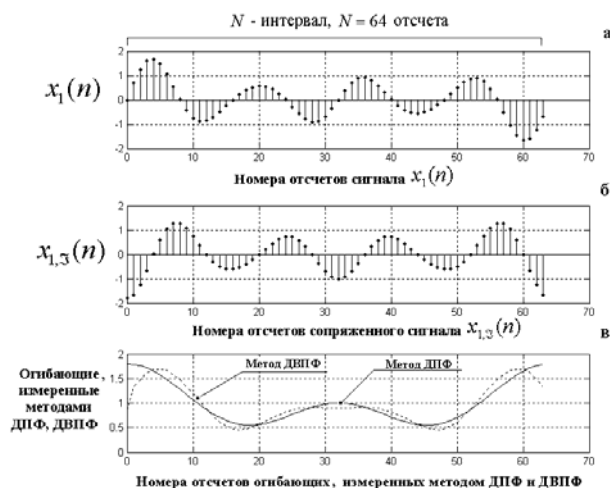


Рис. 5. Огибающие: метод дискретного преобразования Фурье, метод дискретно-временного преобразования Фурье

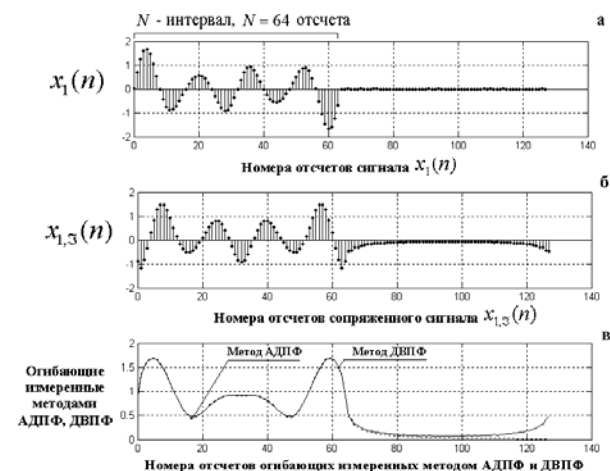


Рис. 6. Огибающие: метод аperiodического дискретного преобразования Фурье, метод дискретно-временного преобразования Фурье

<sup>8</sup> Аperiodическое дискретное преобразование Фурье (АПДФ) – ДПФ дискретного сигнала  $x(n)$ , заданного на  $N$ -интервале и дополненного  $N$  нулями, (название введено авторами).

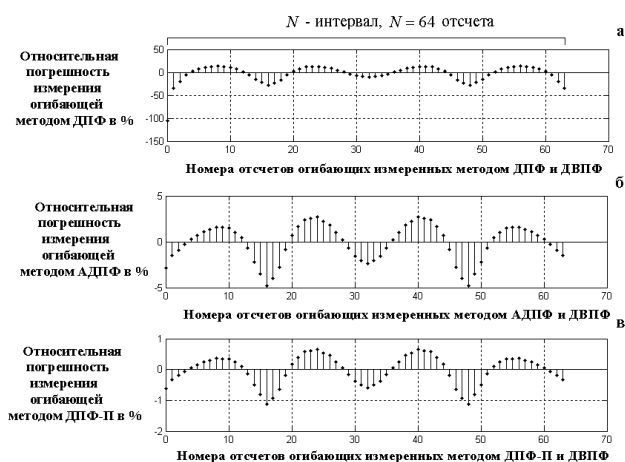


Рис. 7. Относительные погрешности измерения огибающих:  $A_{\text{ДПФ}}(n)$ ,  $A_{\text{АДПФ}}(n)$ ,  $A_{\text{ДПФ-II}}(n)$

Анализ теоретических и экспериментальных результатов позволяет сделать следующие выводы.

• ДПГ на базе ДПФ лишь асимптотически логарифмическое преобразование с ядром вида  $\frac{\sin(N \cdot x / 2)}{N \sin(x / 2)}$  и

не дает решения главной проблемы – отсутствие свойства финитности огибающей. Происходит, по сути дела, «маскирование» этого недостатка ДПГ путем наложения сопряженного сигнала  $x_{1\text{ДВПФ},3}(n)$  (25). При этом относительная погрешность огибающей  $A_{\text{ДПФ}}(n)$  составляет 40–100 % (рис. 7, а). Причиной столь высокой относительной погрешности огибающей  $A_{\text{ДПФ}}(n)$  является нефинитность сопряженного сигнала  $x_{1,3}(n)$  (рис. 6, б) при финитности сигнала  $x_1(n)$ .

• Измерение огибающей методом АДПФ (рис. 6, а, б) позволяет, по сравнению с методом ДПФ, на порядок уменьшить относительную погрешность измерения огибающей (рис. 7, б).

• Измерение огибающей методом ДПФ-II позволяет измерять огибающую на  $N$ -интервале с заданной точностью (рис. 7, в).

#### Выводы

1. Проведенное исследование эффективности существующих методов определения огибающей как непрерывного, так и дискретного действительного сигнала, заданного на конечном интервале, позволило сделать вывод о том, что основным источником относительной погрешности в измерении огибающей является отсутствие у нее свойства финитности.

2. Разработан новый результативный и эффективный метод измерения огибающей действительного дискретного финитного сигнала, который на порядок уменьшает относительную погрешность ее измерения, на порядок сокращает вычислительные затраты и необходимую память для реализации метода.

#### Библиографические ссылки

1. Вакман Д. Е. Об определении понятий амплитуды, фазы и мгновенной частоты сигнала // Радиотехника и электроника. 1972. № 5. С. 973–978.
2. Ванштейн Л. А., Вакман Д. Е. Разделение частот в теории колебаний и волн. М.: Наука, 1983. 288 с.
3. Финк Л. М. Сигналы. Помехи. Ошибки. М.: Радио и связь, 1984. 256 с.
4. Лайонс Р. Цифровая обработка сигналов. 2-е изд. / пер. с англ. М.: Бинум-Пресс, 2006. 636 с.
5. Рабинер Л., Голд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов / пер. с англ. М.: Мир, 1978. 839 с.
6. Марпл-мл. С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения / пер. с англ. М.: Мир, 1990. 584 с.
7. Gonzalez R. C., Woods R. E. Digital Image Processing, 4th Ed. Published by Pearson. 2018. 1168 pages.
8. Прэтт У. Цифровая обработка изображений: в 2 кн. / пер. с англ. М.: Мир, 1982. 790 с.
9. Пономарев А. В. Основы теории двумерной цифровой обработки сигналов в базисах Фурье с варьируемыми параметрами // Цифровая обработка сигналов. 2019. № 2. С. 12–20.
10. Пономарева О. В., Пономарев А. В., Смирнова Н. В. Цифровизация измерений спектров в базисе Фурье – тенденции развития и проблемы // Приборы и методы измерений. 2019. № 3, С. 271–280. DOI: 21122/2220-95062-2019-10-3-271-280

#### References

1. Vakman D.E. [On the definition of the concepts of amplitude, phase and instantaneous signal frequency]. *Radiotekhnika i elektronika*. 1972, no. 5, pp. 973-978 (in Russ.).
2. Vanshtejn L.A., Vakman D.E. *Razdelenie chastot v torii kolebanij i voln* [Separation of frequencies in thorium oscillations and waves]. Moscow, Nauka Publ., 1983. 288 p. (in Russ.).
3. Fink L.M. *Signalny. Pomekhi. Oshibki* [Signals. Interference. Mistakes] Moscow, Radio and communications, 1984. 256 p. (in Russ.).
4. Lajons R. *Cifrovaya obrabotka signalov / 2-e izd., per. s angl* [Digital signal processing / 2nd ed., Trans. from English]. Moscow, Binom-Press Publ., 2006. 636 p. (in Russ.).
5. Rabiner L., Gould B. *Teoriya i primeneniye cifrovoj obrabotki signalov* [Theory and application of digital signal processing]. Moscow, Mir Publ. 1978. 839 p. (in Russ.).
6. Marpl-ml. S.L. *Cifrovoy spektral'nyj analiz i ego prilozheniya* [Digital spectral analysis and its applications]. Moscow, Mir Publ. 1990. 584 p. (in Russ.).
7. Gonzalez R.C., Woods R.E. Digital Image Processing, 4th Ed. Published by Pearson. 2018. 1168 pages.
8. Prehth U. *Cifrovaya obrabotka izobrazhenij. V 2-h knigah. Perevod s angl.* [Digital image processing]. Moscow, Mir Publ. 1982, 790 p. (in Russ.).
9. Ponomarev A.V. [Fundamentals of the theory of two-dimensional digital signal processing in Fourier bases with variable parameters]. *Digital signal processing*. 2019, no. 2, pp.12-20. (in Russ.).
10. Ponomareva O.V., Ponomarev A.V., Smirnova N.V. [Digitalization of spectral measurements in the Fourier basis - development trends and problems]. *Instruments and methods of measurements*. 2019, no. 3, pp. 271-280 (in Russ.). DOI: 21122 / 2220-95062-2019-10-3-271-280.

\* \* \*

**Envelope of a Real Discrete Signal on a Finite Interval and Methods for Its Determination***O. V. Ponomareva*, DSc in Engineering, Professor, Kalashnikov ISTU, Izhevsk, Russia*A. V. Ponomarev*, PhD in Economics, Associate Professor, Kalashnikov ISTU, Izhevsk, Russia

*Methods of determining the envelopes (instantaneous amplitudes) of an actual signal are studied, both for a continuous and a discrete case. The representation of a real continuous and discrete signal in the time and frequency domains is considered. It is shown that the application of one or another representation of the signal is determined by the area of application of the signal processing method. The analysis of the advantages and disadvantages of existing methods for determining the envelope (instantaneous amplitude) of the actual signal for a continuous and discrete case is given. The efficiency of the choice of determining the conjugate signal by the Hilbert transform method is substantiated. The problem of determining the Hilbert envelope for real, discrete, finite signals by the methods of discrete Fourier transform and discrete - time Fourier transform is considered. The main reason for the large relative errors in the measurement of Hilbert envelopes by the discrete Fourier transform method is revealed. A new effective and efficient method has been developed for measuring the envelope of a real, discrete, finite signal, which reduces the relative error of its measurement by an order of magnitude, reduces computational costs and the necessary memory for implementing the method. The theoretical results obtained in the work are confirmed by the results of numerical simulation of measuring the envelope of a real, discrete, finite signal by the existing and proposed method.*

**Keywords:** Envelope of the actual signal, finite function, digital signal processing, finite interval, parametric Fourier transform.

Получено: 15.11.19