УДК 519.853.4
DOI: 10.22213/2410-9304-2019-4-137-142

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ОБЩЕГО ВИДА ГЕНЕТИЧЕСКИМ АЛГОРИТМОМ[*]

*В. А. Тененев*, доктор физико-математическиxх наук, профессор, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова;
Удмуртский федеральный исследовательский центр УрОРАН, Ижевск, Россия
*А. С. Шаура*, кандидат технических наук, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова;
Удмуртский федеральный исследовательский центр УрОРАН, Ижевск, Россия

*В работе предложен генетический алгоритм решения задачи условной оптимизации общего вида с дополнительной популяцией для поиска допустимых особей и модифицированным турнирным отбором. При поиске решения акцент сделан на его допустимости, поэтому оценка приспособленности особей в первую очередь определяется не сравнением значений целевой функции, а качеством выполнения ограничений. Такой подход сочетает в себе эффективность генетических алгоритмов при решении задач глобальной оптимизации с простым и естественным непосредственным учетом условий в виде равенств или неравенств при поиске оптимального решения, не требуя дополнительных преобразований исходной задачи или сведения ее к безусловной оптимизации.*

*Важной особенностью метода является то, что он в значительной степени обладает универсальностью и хорошо подходит для задач с большим числом ограничений произвольного вида и функций со сложным характером − овражных, многоэкстремальных, недифференцируемых. В работе реализован гибридный генетический алгоритм с дополнительным обучением элиты, что значительно повышает скорость сходимости и качество получаемого решения по сравнению с классическим алгоритмом.*

*Сравнение результатов решения известных тестовых задач с опубликованными ранее результатами применения существующих подходов свидетельствует о перспективности и эффективности представленного алгоритма.*

**Ключевые слова:** условная оптимизация, нелинейное программирование, генетический алгоритм, дополнительная популяция, учет ограничений.

## Актуальность

Задача математического программирования в общем виде представляет собой задачу отыскания экстремума скалярной функции нескольких переменных при наличии системы ограничений, и никаких дополнительных условий ни на вид, ни на характер функций не накладывается. Задача в такой постановке наиболее сложна для решения, хотя для отдельных частных случаев, например, для задач линейного, квадратичного или выпуклого программирования, задач безусловной оптимизации и т. д., существуют свои, часто узкоспециализированные, подходы и методы, которые позволяют эффективно находить решение, если не во всех, то по крайней мере в большинстве случаев.

Основную сложность в решении создает не только наличие ограничений, но и произвольный характер функций − многоэкстремальность, овражность, недифференцируемость. И если в ряде случаев каждая из таких особенностей в отдельности может быть учтена при выборе соответствующего метода решения (сведение условной оптимизации к безусловной, применение эвристических алгоритмов или классических методов прямого поиска), то возможность их одновременного присутствия в задаче приводит к необходимости разрабатывать новые гибридные алгоритмы или модифицировать имеющиеся.

Поскольку для многоэкстремальных задач поиск глобального экстремума сопряжен с необходимостью перебора в многомерных пространствах большого количества локальных минимумов и максимумов, а применение генетических алгоритмов является практически единственным реально работающим на практике подходом к глобальной оптимизации, то выбор генетического алгоритма в качестве основного метода поиска при построении гибридных методов будет наиболее логичным и эффективным.

## Генетические алгоритмы в решении задач условной оптимизации

Первые попытки решения задачи условной оптимизации с помощью генетических алгоритмов были основаны на сведении ее к задаче безусловной минимизации путем построения различных штрафных и барьерных функций (*Penalty function*) [1, 2]. В настоящее время уже существует большое количество реализаций такого подхода со статическими [3], динамическими и даже адаптивными штрафными функциями [4], позволяющими управлять величиной штрафных коэффициентов и их влиянием на поиск решения в зависимости от соотношения числа допустимых и недопустимых особей в популяции, от их средней приспособленности, числа эпох и т. д. Такие методы достаточно часто используются ввиду простоты реализации и продолжают развиваться, но все они содержат существенный недостаток − штрафные слагаемые сильно меняют характер исходной целевой функции. А поскольку в решаемой задаче исходная целевая функция подменяется штрафной, то штрафные слагаемые частично компенсируют значения исходной функции и наоборот, что особенно критично для сложных ограничений при поиске решения вблизи границы допустимой



[*] Работа выполнена в рамках темы НИР УдмФИЦ УрО РАН «Искусственный интеллект в разработке, обучении и сопровождении экспертных систем представления и использования знаний в естественнонаучных, технических и социогуманитарных направлениях» АААА-А19-119092690104-4.

области, и может даже привести к недопустимости найденного решения.

Менее многочисленная группа методов основана на «лечении» или исправлении недопустимых особей (*Feasibility maintenance*, *Repair*) [5, 6], получаемых в процессе эволюции, либо на проецировании их в допустимую область. Сложностью таких методов является то, что при активных ограничениях приближение к оптимальному решению сопровождается ростом числа недопустимых особей, а т. к. даже скрещивание допустимых родителей не гарантирует получение допустимого потомства, то найденные допустимые решения «портятся» уже на следующей итерации алгоритма, и процедура «лечения» требуется снова практически для каждой особи [7].

В последнее время развивается группа методов, разделяющих вычисление целевой функции и нарушения ограничений (*Separation of constraint violation and objective value*) и предпринимающих попытки непосредственного учета ограничений в процессе эволюции популяции. Суть этих методов заключается в стимулировании получения допустимого потомства и отбора «по допустимости». В некоторых реализациях при проведении отбора особи сначала ранжируются по величине суммарной невязки ограничений или по числу нарушенных ограничений, а затем − по значению целевой функции (*Ranking approach*) [8–10]. Акцент на допустимости найденного решения позволяет сосредоточиться на поиске в допустимых областях, а не равномерно перебирать все пространство поиска.

В работе [11] использована дополнительная популяция для поиска допустимых особей, которая эволюционирует на протяжении всего решения параллельно основной и наполняет ее вновь найденными решениями. Связь дополнительной и основной популяций осуществляется посредством межпопуляционного скрещивания. Такой подход позволяет в ряде случаев успешно находить решения, но, как и методы с «лечением» особей, сопровождается потерей уже найденных допустимых решений в процессе развития дополнительной популяции [12].

В связи с этим перспективным представляется изложенный ниже алгоритм, сочетающий в себе основные достоинства перечисленных выше подходов: наличие дополнительной популяции для хранения только допустимых решений и применение турнирного отбора основанного на допустимости.

**Суть предлагаемого подхода**

Без ограничения общности задача нелинейного программирования может быть представлена минимизацией целевой функции

$$F(\mathbf{x}) \to \min, \ \mathbf{x} \in R^n, \qquad (1)$$

при наличии ограничений

$$g_i(\mathbf{x}) \le 0, \ i = \overline{1, m_1}, \qquad (2)$$

$$h_i(\mathbf{x}) = 0, \ i = \overline{1, m_2}. \qquad (3)$$

Ограничения-равенства считаются выполненными приближенно с погрешностью $\varepsilon$ и заменяются неравенствами

$$\left|h_i(\mathbf{x})\right| - \varepsilon \le 0, \ i = \overline{1, m_2}.$$

Поэтому неравенства (2), (3) приводятся к виду

$$g_i(\mathbf{x}) \le 0, \ i = \overline{1, m}, \ m = m_1 + m_2. \qquad (4)$$

Введем обозначения: $\left\{\mathbf{x}^k\right\}$, $k = \overline{1, p}$ − популяция из $p$ особей; $D_i^k = \left(g_i\left(\mathbf{x}^k\right) \le 0\right)$, $i = \overline{1, m}$ − булева переменная, соответствующая истинности выполнения ограничения; $D(k) = \left\{\left(D_i^k = 1\right)\right\}$ − множество допустимых ограничений; $F(k) = F\left(\mathbf{x}^k\right)$ − значение функции приспособленности для $k$-й особи популяции; $G(k) = \sum_{i=1}^{m} g_i\left(\mathbf{x}^k\right)$ − сумма невязок ограничений для $k$-й особи популяции; $N(k) = \sum_{i=1}^{m} Ord\left(D_i^k\right)$ − количество выполненных ограничений для особи $k$; $k_* \in \left\{k_1, k_2\right\}$.

Рассмотрим последовательность турнирного отбора особи $k_*$ из двух особей $k_1$ и $k_2$ с учетом их допустимости [13].

1. $\left[\left(D(k_1) = 1\right) \wedge \left(D(k_2) = 1\right)\right] \to$ $\to \left[k_* = \arg\min\left(F(k_1), F(k_2)\right)\right]$ − если обе особи допустимые, то выбор по минимуму целевой функции.

2. $\left[\left(D(k_1) = 1\right) \wedge \left(D(k_2) = 0\right)\right] \to \left(k_* = k_1\right)$ − выбор допустимой особи $k_1$.

3. $\left[\left(D(k_1) = 0\right) \wedge \left(D(k_2) = 1\right)\right] \to \left(k_* = k_2\right)$ − выбор допустимой особи $k_2$.

4. $\left[\left(D(k_1) = 0\right) \wedge \left(D(k_2) = 0\right)\right] \to$ $\to \left[k_* = \arg\min\left(G(k_1), G(k_2)\right)\right]$ − если обе особи недопустимые, то выбор по минимуму отклонений ограничений.

5. $\left[\left(D(k_1) = 0\right) \wedge \left(D(k_2) = 0\right)\right] \to$ $\to \left[k_* = \arg\max\left(N(k_1), N(k_2)\right)\right]5$ − если обе особи недопустимые, выбор по максимуму количества допустимых ограничений.

Популяция $\left\{\mathbf{x}^k\right\}$, $k = \overline{1, p}$, делится на две части: первая часть $k = \overline{1, p_R}$ может содержать недопустимые решения; вторая часть $k = \overline{p_R + 1, p}$ состоит только из допустимых решений. На этапе инициализации популяции первая часть заполняется случайным образом. Для второй части проводится наработка полного количества допустимых решений по следующему алгоритму.

1. Полагаем $k = 1$.

2. Генерируется выборка размером $p - p_R$ из случайных значений переменных.

3. Для этой выборки запускается эволюционный алгоритм, пока не появится допустимая особь, которая получает номер $p_R + k$.

4. $k = k + 1$, переход на пункт 1 или конец, при наполнении выборки.

5. Конец.

Затем запускается эволюционный алгоритм для первой части популяции. Выбор претендентов на скрещивание производится из обеих частей, но заменяются только особи из первой части, чтобы в процессе поиска решения не испортить найденное ранее допустимое множество и не лишиться его в дальнейшем.

В случае длительного нахождения итерационного процесса при одном значении целевой функции может быть проведено обновление допустимой второй части популяции.

**Апробация алгоритма и результаты**

Рассмотрим работу алгоритма на простом примере (задача g11 из [14]):

$$f(\mathbf{x}) = x_1^2 + (x_2 - 1)^2 \to \min,$$

$$g_1(\mathbf{x}) = x_2 - x_1^2 = 0, \ |\mathbf{x}| \le 1.$$

Аналитическое решение этой задачи находится методом множителей Лагранжа. Строится функция Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 + (x_2 - 1)^2 + \lambda(x_2 - x_1^2),$$

для которой решение системы уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - 2\lambda x_1 = 0, \ \frac{\partial L}{\partial x_2} = 2(x_2 - 1) + \lambda = 0,$$

$$x_2 - x_1^2 = 0$$

дает $x_1^{opt} = \pm\sqrt{0,5}$, $x_2^{opt} = 0,5$, $\lambda = 1$ и $f^{opt} = 0,75$.

На рис. 1 показана линия *1*, соответствующая ограничению $x_2 - x_1^2 = 0$.

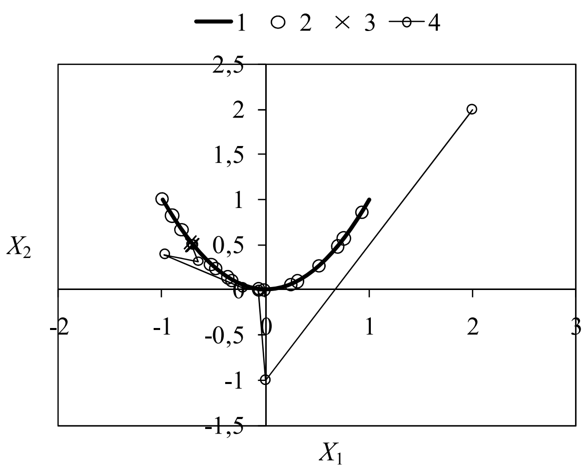


*Рис. 1.* Построение допустимого решения

Маркеры *2* показывают расположение допустимых точек из второй части популяции ($p = 50$, $p_R = 35$). Движение из лучшей допустимой точки к оптимальному значению в процессе поиска решения показано на рис. 2. Для сравнения, на рис. 1 показано движение точки (линия *4*), полученное с помощью процедуры DN0ONF FORTRAN MSDEV [15]. Точка оптимума на рис. 1 обозначена маркером *3*.

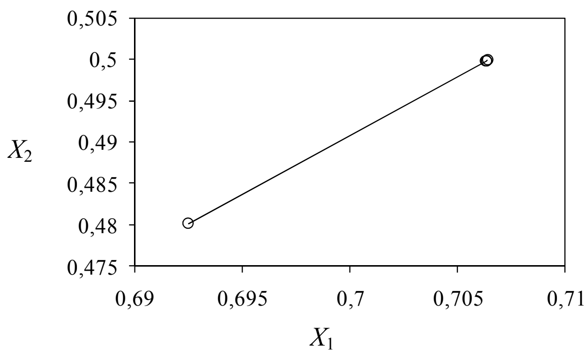


*Рис. 2.* Движение к оптимальной точке

Рассмотрим работу представленного алгоритма на решении более сложных задач.

Задача g02. Целевая функция многоэкстремальная, число переменных 20, ограничения-неравенства.

$$f(\mathbf{x}) = -\left| \frac{\sum_{i=1}^{n} \cos^4(x_i) - 2\prod_{i=1}^{n} \cos^2(x_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} i x_i^2}} \right| \to \min$$

$$g_1(\mathbf{x}) = 0,75 - \prod_{i=1}^{n} x_i \le 0,$$

$$g_2(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i - 7,5n \le 0,$$

$n = 20$ и $0 < x_i \le 10$ ($i = 1, ..., n$).

Известное решение: $f^{opt} = -0,803619$, решение, найденное с помощью представленного алгоритма: $x^{opt} =$ (3,162488; 3,128291; 3,094841; 3,06148; 3,027901; 2,99378; 2,958626; 2,921825; 0,49482; 0,488398; 0,482322; 0,476657; 0,471279; 0,466202; 0,461403; 0,456859; 0,452487; 0,448301; 0,444243; 0,440327), $f^{opt} = -0,803612$.

Задача g03. Нелинейная целевая функция, ограничение-равенство.

$$f(\mathbf{x}) = -\left(\sqrt{n}\right)^n \prod_{i=1}^{n} x_i \to \min,$$

$$h_1(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 1 = 0,$$

$n = 10$ и $0 \le x_i \le 1$ ($i = 1, ..., n$).

Известное решение: $f^{opt} = -1,0005001$, решение, найденное с помощью представленного алгоритма:

$x^{opt}=(0{,}316382;\ 0{,}316382;\ 0{,}316391;\ 0{,}31639;\ 0{,}316383;\ 0{,}316386;\ 0{,}316391;\ 0{,}316383;\ 0{,}316391;\ 0{,}316381)$, $f^{opt}=-1{,}00501$.

Задача g08. Целевая функция многоэкстремальная, число переменных 2, ограничения-неравенства.

$$f(\mathbf{x})=-\frac{\sin^3(2\pi x_1)\sin(2\pi x_2)}{x_1^3(x_1+x_2)}\to \min,$$

$$g_1(\mathbf{x})=x_1^2-x_2+1\le 0,$$

$$g_2(\mathbf{x})=1-x_1+(x_2-4)^2\le 0,$$

$$0\le x_1\le 10 \text{ и } 0\le x_2\le 10.$$

Известное решение: $f^{opt}=-0{,}09582504141803559$, найденное: $x^{opt}=(1{,}227971;\ 4{,}245373)$, $f^{opt}=-0{,}09583$.

Вид многоэкстремальной целевой функции показан на рис. 3.

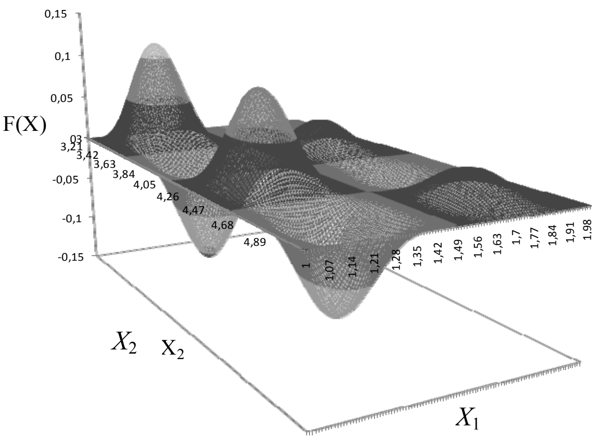


*Рис. 3.* Вид целевой функции в задаче g08

Задача g10. Целевая функция линейная, число переменных 2, ограничения-неравенства.

$$f(\mathbf{x})=x_1+x_2+x_3\to \min,$$

$$g_1(\mathbf{x})=-1+0{,}0025(x_4+x_6)\le 0,$$

$$g_2(\mathbf{x})=-1+0{,}0025(x_5+x_7-x_4)\le 0,$$

$$g_3(\mathbf{x})=-1+0{,}01(x_8-x_5)\le 0,$$

$$g_4(\mathbf{x})=-x_1x_6+833{,}332552x_4+100x_1-83333{,}333\le 0.$$

$$g_5(\mathbf{x})=-x_2x_7+1250x_5+x_2x_4-1250x_4\le 0,$$

$$g_6(\mathbf{x})=-x_3x_8+1250000+x_3x_5-2500x_5\le 0,$$

$100\le x_1\le 10000$, $1000\le x_1\le 10000$ ($i=2,3$) и $10\le x_i\le 1000$ ($i=4,\dots,8$).

Известное решение: $f^{opt}=7049{,}24802052$, найденное: $x^{opt}=(576{,}2782;\ 1369{,}98;\ 5103{,}023;\ 181{,}7642;\ 295{,}8791;\ 218{,}2358;\ 285{,}8852;\ 395{,}8791)$, $f^{opt}=7049{,}281$.

Изменение доли допустимых решений в первой части популяции показано на рис. 4.

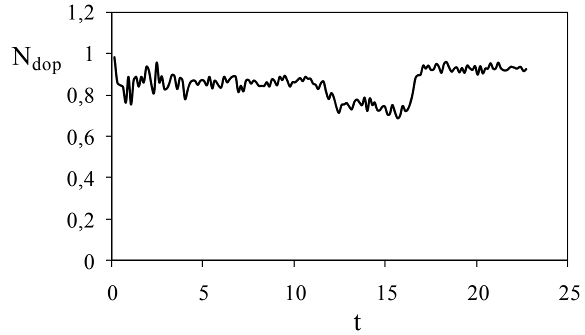


*Рис. 4.* Изменение во времени доли допустимых решений $N_{dop}$ в первой части популяции

Задача g13. Целевая функция нелинейная, число переменных 5, ограничения-равенства.

$$f(\mathbf{x})=e^{x_1x_2x_3x_4x_5}\to \min,$$

$$h_1(\mathbf{x})=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2-10=0,$$

$$h_2(\mathbf{x})=x_2x_3-5x_4x_5=0,$$

$$h_3(\mathbf{x})=x_1^3+x_2^3+1=0,$$

где $-2{,}3\le x_i\le 2{,}3$ ($i=1,2$) и $-3{,}2\le x_i\le 3{,}2$ ($i=3,4,5$).

Известное решение: $x^{opt}=(-1{,}71714224003;\ 1{,}59572124049468;\ 1{,}8272502406271;\ -0{,}763659881912867;\ -0{,}76365986736498)$, $f^{opt}=0{,}0539411514041898$, найденное: $x^{opt}=(-1{,}71919;\ 1{,}598214;\ 1{,}823422;\ -0{,}7579;\ -0{,}769288)$, $f^{opt}=0{,}053874$.

Задача g14. Целевая функция нелинейная, число переменных 10, ограничения-равенства.

$$f(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{10}x_i\left(c_i+\ln\frac{x_i}{\sum_{j=1}^{10}x_j}\right)\to \min,$$

$$h_1(\mathbf{x})=x_1+2x_2+2x_3+x_6+x_{10}-2=0,$$

$$h_2(\mathbf{x})=x_4+2x_5+x_6+x_7-1=0,$$

$$h_3(\mathbf{x})=x_3+x_7+x_8+2x_9+x_{10}-1=0,$$

где $0<x_i\le 10$ ($i=1,\dots,10$) и $c_1=-6{,}089$, $c_2=-17{,}164$, $c_3=-34{,}054$, $c_4=-5{,}914$, $c_5=-24{,}721$, $c_6=-14{,}986$, $c_7=-24{,}1$, $c_8=-10{,}708$, $c_9=-26{,}662$, $c_{10}=-22{,}179$.

Наилучшее известное решение: $x^{opt}=(0{,}0406684113216282;\ 0{,}1477212404922452;\ 0{,}783205732104114;\ 0{,}00141433931889084;$

0,485293636780388; 0,000693183051556082; 0,0274052040687766; 0,0179509660214818; 0,0373268186859717; 0,0968844604336845), $f^{opt} = -47,7648884594915$.

Лучшее допустимое решение, полученное во второй части популяции: $x^{opt} = (0,286277; 0,341345; 0,498967; 0,047457; 0,370044; 0,012033; 0,199438; 0,009014; 0,136619; 0,020284)$, $f^{opt} = -46,8055$, а оптимальное решение задачи из первой части популяции $x^{opt} = (0,055111; 0,191351; 0,743244; 0,001572; 0,488254; 0,000599; 0,028322; 0,014481; 0,070435; 0,078103)$, $f^{opt} = -47,7756$.

При решении всех рассмотренных задач, кроме g11, задавался объем популяции от 500 до 2000 особей. Соотношение размеров 1-й и 2-й частей популяции − (0,7; 0,3). Количество эпох генетического алгоритма от 10000 до 100000 при $\varepsilon = 0,001$. Применялся гибридный вариант метода с применением выделения малой окрестности лучшего решения $\left[\mathbf{x}^{best} \pm \boldsymbol{\delta}\right]$ и дополнительного улучшения решения на каждой итерации также генетическим алгоритмом [16]. Базовый генетический алгоритм оптимизации применялся при решении задачи идентификации технической системы [17].

**Заключение**

Приведенные выше результаты решения известных тестовых задач условной оптимизации (g02, g03, g08, g10, g11, g13 и g14) в сравнении с аналогичными в [18–20], но полученными с применением других подходов, показывают, что предложенный алгоритм везде отработал не хуже, а в ряде случаев − значительно лучше. Это говорит о перспективности разработки подобных гибридных методов, поскольку, сочетая лучшие качества как классических, так и современных подходов, они существенно расширяют возможности каждого лежащего в их основе метода.

### Библиографические ссылки

1. *Michalewicz Z.* Handling Constraints in Genetic Algorithms. Proc. of the 4th International Conference on Genetic Algorithms, 1991. Pp. 151-157. URL: https://ci.nii.ac.jp/naid/10006390693/en/.

2. Helio Barbosa, Afonso Lemonge. An Adaptive Penalty Method for Genetic Algorithms in Constrained Optimization Problems. 2008. DOI: 10.5772/5446.

3. Mohamed Abdel-Baset, Ibrahim M. Hezam. An Effective Hybrid Flower Pollination and Genetic Algorithm for Constrained Optimization Problems. Advanced Engineering Technology and Application. 4. 27-34. 2015. DOI: 10.12785/aeta/040203.

4. Wali Mashwani, Ozgur Yeniay, Habib Shah, Nasser Tairan, Muhammad Sulaiman. Hybrid Constrained Evolutionary Algorithm for Numerical Optimization Problems. Hacettepe University Bulletin of Natural Sciences and Engineering Series B: Mathematics and Statistics. 48. 2018. DOI: 931-950. 10.15672/HJMS.2018.625.

5. *Yu X., Gen M.* Introduction to Evolutionary Algorithms. London: Springer. 2010. DOI:0.1007/978-1-84996-129-5.

6. *Kimbrough S. O., Lu M., Koehler G. J., & Wood D. H.* On a Feasible–Infeasible Two-Population (FI-2Pop) Genetic Algorithm for Constrained Optimization: Distance Tracing and no Free Lunch. European Journal of Operational Research, 2008, 190 (2), 310-327. http://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2007.06.028.

7. *Koziel S., Michalewicz Z.* Evolutionary Algorithms, Homomorphous Mappings, and Constrained Parameter Optimization. Evolutionary computation. 1996. DOI: abs/10.1162/evco.1996.4.1.1.

8. *Mezura-Montes E., Coello C. A*. Constrainthandling in nature-inspired numerical optimization: Past, present and future. Swarm and Evolutionary Computation, 2011, 1(4), 173-194. DOI:10.1016/j.swevo.2011.10.001.

9. Rafael Garcia, Beatriz Lima, Breno Jacob, Afonso Lemonge. Handling optimization problems with constraints of different magnitudes using evolutionary algorithms. 2015. DOI: 10.20906/CPS/CILAMCE2015-0631.

10. Adam Chehouri, Rafic Younes, Jean Perron, Adrian Ilinca. A constraint-handling technique for genetic algorithms using a violation factor. 2016. 12. 350-362. DOI: 10.3844/jcssp.2016.350-362.

11. *Прохоровская Е. В., Тененёв В. А., Шаура А. С.* Генетические алгоритмы с вещественным кодированием при решении задач условной оптимизации // Интеллектуальные системы в производстве. 2008. № 2 (12) С. 46–55.

12. *Kimbrough S. O., Lu M., Koehler G. J., & Wood D. H.* On a Feasible–Infeasible Two-Population (FI-2Pop) Genetic Algorithm for Constrained Optimization: Distance Tracing and no Free Lunch. European Journal of Operational Research, 2008, 190 (2), 310-327. http://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2007.06.028.

13. *Kalyanmoy Deb.* An efficient constraint handling method for genetic algorithms / Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 2000. 186. 311-338.

14. *Liang J. J.* Thomas Philip Runarsson, Efren Mezura-Montes, Maurice Clerc P. N. Suganthan, Carlos A. Coello Coello, K. Deb. Problem Definitions and Evaluation Criteria for the CEC 2006. Special Session on Constrained Real-Parameter Optimization. Technical Report, September 18, 2006. pp. 24.

15. *Schittkowski K.* On the convergence of a sequential quadratic programming method with an augmented Lagrangian line search function, Mathematik Operationsforschung und Statistik, Serie Optimization, 1983, 14, 197-216.

16. *Тененев В. А., Паклин Н. Б.* Гибридный генетический алгоритм с дополнительным обучением лидера // Интеллектуальные системы в производстве. 2003. № 2. С. 181–206.

17. *Редер Т., Тененев В. А., Мищенкова О. В.* Идентификация динамической модели предохранительного клапана // Интеллектуальные системы в производстве. 2018. Т. 21. № 4. С. 13–21.

18. Helio Barbosa, Afonso Lemonge. An Adaptive Penalty Method for Genetic Algorithms in Constrained Optimization Problems. 2008. DOI: 10.5772/5446.

19. Wali Mashwani, Ozgur Yeniay, Habib Shah, Nasser Tairan, Muhammad Sulaiman. Hybrid Constrained Evolutionary Algorithm for Numerical Optimization Problems. Hacettepe University Bulletin of Natural Sciences and Engineering Series B: Mathematics and Statistics. 48. 2018. DOI: 931-950. 10.15672/HJMS.2018.625.

20. Rafael Garcia, Beatriz Lima, Breno Jacob, Afonso Lemonge. Handling optimization problems with constraints of different magnitudes using evolutionary algorithms. 2015. DOI: 10.20906/CPS/CILAMCE2015-0631.

### References

1. Michalewicz Z. Handling Constraints in Genetic Algorithms. Proc. of the 4th International Conference on Genetic Algorithms, 1991. Pp. 151-157. https://ci.nii.ac.jp/naid/10006390693/en/.

2. Helio Barbosa, Afonso Lemonge. An Adaptive Penalty Method for Genetic Algorithms in Constrained Optimization Problems. 2008. DOI: 10.5772/5446.

3. Mohamed Abdel-Baset, Ibrahim M. Hezam. An Effective Hybrid Flower Pollination and Genetic Algorithm for Constrained Optimization Problems. Advanced Engineering Technology and Application. 4. 27-34. 2015. DOI: 10.12785/aeta/040203.

4. Wali Mashwani, Ozgur Yeniay, Habib Shah, Nasser Tairan, Muhammad Sulaiman. Hybrid Constrained Evolutionary Algorithm for Numerical Optimization Problems. Hacettepe University Bulletin of Natural Sciences and Engineering Series B: Mathematics and Statistics. 48. 2018. DOI: 931-950. 10.15672/HJMS.2018.625.

5. Yu, X., Gen, M. Introduction to Evolutionary Algorithms. London: Springer. 2010. DOI:0.1007/978-1-84996-129-5.

6. Kimbrough, S. O., Lu, M., Koehler, G. J., & Wood, D. H. On a Feasible–Infeasible Two-Population (FI-2Pop) Genetic Algorithm for Constrained Optimization: Distance Tracing and no Free Lunch. European Journal of Operational Research, 2008, 190 (2), 310-327. http://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2007.06.028.

7. Koziel, S., Michalewicz, Z. Evolutionary Algorithms, Homomorphous Mappings, and Constrained Parameter Optimization. Evolutionary computation. 1996. DOI: abs/10.1162/evco.1996.4.1.1.

8. E. Mezura-Montes, C.A. Coello. Constrainthandling in nature-inspired numerical optimization: Past, present and future. Swarm and Evolutionary Computation, 2011, 1(4), 173-194. DOI:10.1016/j.swevo.2011.10.001.

9. Rafael Garcia, Beatriz Lima, Breno Jacob, Afonso Lemonge,. Handling optimization problems with constraints of different magnitudes using evolutionary algorithms. 2015. DOI: 10.20906/CPS/CILAMCE2015-0631.

10. Adam Chehouri, Rafic Younes, Jean Perron, Adrian Ilinca. A constraint-handling technique for genetic algorithms using a violation factor. 2016. 12. 350-362. DOI: 10.3844/jcssp.2016.350-362.

11. Prokhorovskaya Ye.V., Tenenev V.A., Shaura A.C. [Genetic algorithms with real coding for solving problems of conditional optimization]. *Intellektual'nyye sistemy v proizvodstve*, 2008, vol. 12, no. 2, pp. 46-55. (in Russ.).

12. Kimbrough, S. O., Lu, M., Koehler, G. J., & Wood, D. H. On a Feasible–Infeasible Two-Population (FI-2Pop) Genetic Algorithm for Constrained Optimization: Distance Tracing and no Free Lunch. European Journal of Operational Research, 2008, 190 (2), 310-327. http://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2007.06.028.

13. Kalyanmoy Deb. An efficient constraint handling method for genetic algorithms /Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 2000. 186. 311-338.

14. J. J. Liang, Thomas Philip Runarsson, Efren Mezura-Montes, Maurice Clerc P. N. Suganthan, Carlos A. Coello Coello, K. Deb. Problem Definitions and Evaluation Criteria for the CEC 2006. Special Session on Constrained Real-Parameter Optimization. Technical Report, September 18, 2006. pp.24.

15. Schittkowski, K. On the convergence of a sequential quadratic programming method with an augmented Lagrangian line search function, Mathematik Operationsforschung und Statistik, Serie Optimization, 1983, 14, 197-216.

16. Tenenev V.A., Paklin N.B. [Hybrid genetic algorithm with additional leader training]. *Intellektual'nyye sistemy v proizvodstve*, 2003, no. 2, pp. 181-206. (in Russ.).

17. Raeder T., Tenenev V.A., Mischenkova O.V. [Identification of Dynamic Model of Safety Valve]. *Intellektual'nyye sistemy v proizvodstve*, 2018, vol. 21, no. 4, pp. 13-21. (in Russ.).

18. Helio Barbosa, Afonso Lemonge. An Adaptive Penalty Method for Genetic Algorithms in Constrained Optimization Problems. 2008. DOI: 10.5772/5446.

19. Wali Mashwani, Ozgur Yeniay, Habib Shah, Nasser Tairan, Muhammad Sulaiman. Hybrid Constrained Evolutionary Algorithm for Numerical Optimization Problems. Hacettepe University Bulletin of Natural Sciences and Engineering Series B: Mathematics and Statistics. 48. 2018. DOI: 931-950. 10.15672/HJMS.2018.625.

20. Rafael Garcia, Beatriz Lima, Breno Jacob, Afonso Lemonge,. Handling optimization problems with constraints of different magnitudes using evolutionary algorithms. 2015. DOI: 10.20906/CPS/CILAMCE2015-0631.

* * *

**Solving General Nonlinear Programming Problems with a Genetic Algorithm**

*V. A. Tenenev,* DSc (Physics and Mathematics), Kalashnikov ISTU, Udmurt Federal Research Center of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Izhevsk, Russia

*A. S. Shaura,* PhD in Engineering, Udmurt Federal Research Center of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Izhevsk, Russia

*The paper proposes a genetic algorithm with an additional population to search for feasible individuals and modified tournament selection to solve the conditional optimization problem. When searching for a solution, the emphasis is on its feasibility, so the assessment of a fitness of individuals is primarily determined not by comparing the values of the objective function, but by the satisfaction of the implementation of constraints. This approach combines the effectiveness of genetic algorithms in solving global optimization problems with simple and natural direct consideration of constraints in the form of equality or inequalities in the search for the optimal solution, without requiring additional transformations of the original problem or reducing it to unconditional optimization.*

*An important feature of the method is that it is largely versatile and well-suited to problem with a large number of constraints and ravine, multi-extreme and non-differentiated functions. The work implemented a hybrid genetic algorithm with additional elite training, which significantly increases the rate of convergence and the quality of the resulting solution compared to the classic algorithm.*

*Comparing the results of the solution of known optimization benchmarks with the previously published results of the existing approaches shows the perspective and effectiveness of the presented algorithm.*

**Keywords:** constrained optimization problem, nonlinear programming, genetic algorithm, additional population, constraint handling.

Получено: 14.11.19