УДК 338.45:658.5
DOI: 10.22213/2410-9304-2020-1-83-87

Метод решения задач теории ограничений систем при помощи линейных уравнений со многими неизвестными

В. Г. Осетров, доктор технических наук, профессор, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова, Ижевск, Россия
Е. С. Слащев, кандидат технических наук, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова;
Цифровые производственные системы, Ижевск, Россия
Д. М. Маликова, кандидат экономических наук, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова, Ижевск, Россия

В статье представлен метод решения задач теории ограничений систем в виде линейных уравнений со многими неизвестными, встречающихся на практике при управлении жизненным циклом изделия машиностроения. Использование метода направлено на автоматизацию процесса обоснования принятых решений на этапе подготовки производства и управления жизненным циклом изделия при управлении размерными, временными и экономическими связями. Пример первой задачи описывает ключевые аспекты ценообразования и оплаты труда с учетом производительности труда рабочих. Вторая задача является определением экономически достижимого допуска замыкающего звена размерной цепи. Третья задача описывает аспекты загрузки предприятия с учетом обязательных отчислений. Данные задачи позволяют найти рациональный вариант решения с ограниченным числом входных данных. Множество решений уравнений со многими неизвестными можно ограничить путем представления уравнений в форме математического ожидания дискретной величины и строгого алгоритма решения. Представленные задачи раскрывают метод решения задач теории ограничений систем и перспективы использования уравнений для практики при управлении жизненным циклом и построения автоматизированных систем за счет изменения сценариев и результатов расчета с учетом многофакторной модели производством.

Ключевые слова: линейное уравнение, жизненный цикл, обоснование технологических решений, PLM-система, математическое ожидание, распределение случайной величины, теория ограничений систем.

Введение

Анализ исследований в области решения линейных уравнений со многими неизвестными выявил, что авторы используют различные методы переборов и создание систем для нахождения неизвестных [1–10]. Установлено, что такие уравнения имеют множество решений. Например, одно уравнение с четырьмя неизвестными имеет бесконечно много решений, причем можно давать произвольные значения трем неизвестным, а два уравнения с четырьмя неизвестными имеют бесконечно много решений, причем произвольные значения можно давать двум неизвестным. Для трех уравнений с четырьмя неизвестными имеет бесконечно много решений, причем произвольные значения можно давать одному неизвестному, а четыре уравнения с четырьмя неизвестными имеют лишь одно решение.

Постановка задач и методы исследования

В данной работе представлена методика, с помощью которой возможно ограничить варианты нахождения произвольных неизвестных путем алгоритма с использованием теории вероятности для систем теории ограничений.

Типы линейных уравнений со многими неизвестными можно классифицировать следующим образом.

Первый тип с множеством положительных коэффициентов K при неизвестных X и свободным членом Д:

$$K_1X_1 + K_2X_2 + \ldots K_nX_n = \text{Д}. \tag{1}$$

Второй тип с положительными и отрицательными коэффициентами K:

$$K_1X_1 - K_2K_2 - \ldots K_nX_n = \text{Д}. \tag{2}$$

Третий тип с положительными и отрицательными коэффициентами K и свободным членом Д = 0:

$$K_1X_1 - K_2X_2 - \ldots K_nX_n = 0. \tag{3}$$

Уравнения привлекательны тем, что с помощью их представляется множество практических задач.

Сформулируем методику решения при помощи уравнений на следующих прикладных задачах.

Задача № 1

Бригада состоит из трех рабочих. Рабочие имеют K_i отношение производительности труда [шт./смену]. Задача – распределить денежное вознаграждение 600 рублей на бригаду.

Решение:

1. Составим уравнение (см. формулу (1)) с данными, где коэффициенты обозначают производительность (руб.):

$$3X_1 + 2X_2 + 1X_3 = 600.$$

2. Преобразуем уравнение посредством деления коэффициентов на их сумму $\sum_{i=1}^{n} K_i = 6$, в результате получим (руб.):

$$\frac{3}{6}X_1 + \frac{2}{6}X_2 + \frac{1}{6}X_3 = 100, \text{ или}$$

$$0{,}5X_1 + 0{,}34X_2 + 0{,}16X_3 = 100, \quad (4)$$

3. Уравнение (4) является математическим ожиданием случайной дискретной величины.

$$M(x) = m_x. \quad (5)$$

Представление уравнения в виде математического ожидания является главным новшеством методики.

4. Принимая распределение случайной величины равномерным, построим кривую (см. рис. 1). Графическое отображение распределения случайной величины является вторым новшеством метода.

5. Из графика составляем соотношения и находим случайные величины (руб.):

$$X_1 = 100; X_2 = 0{,}34/0{,}5 \cdot 100 = 68;$$

$$X_3 = 0{,}16/0{,}5 \cdot 100 = 32.$$

Подставляя X_i в уравнение (5), получим (руб.):

$$0{,}5 \cdot 100 + 0{,}34 \cdot 68 + 0{,}16 \cdot 32 = 78{,}24. \quad (6)$$

Равенство уравнений (4) и (6) не выполняется. Для того чтобы равенство выполнилось, применим два способа.

Первый способ. Находится поправка или масштабирование [1]:

$$П = 100/78{,}24 = 1{,}28.$$

Умножая X_i на поправку, получим 1-й вариант решения (руб.): $X_1 = 128$; $X_2 = 87$; $X_3 = 49$.

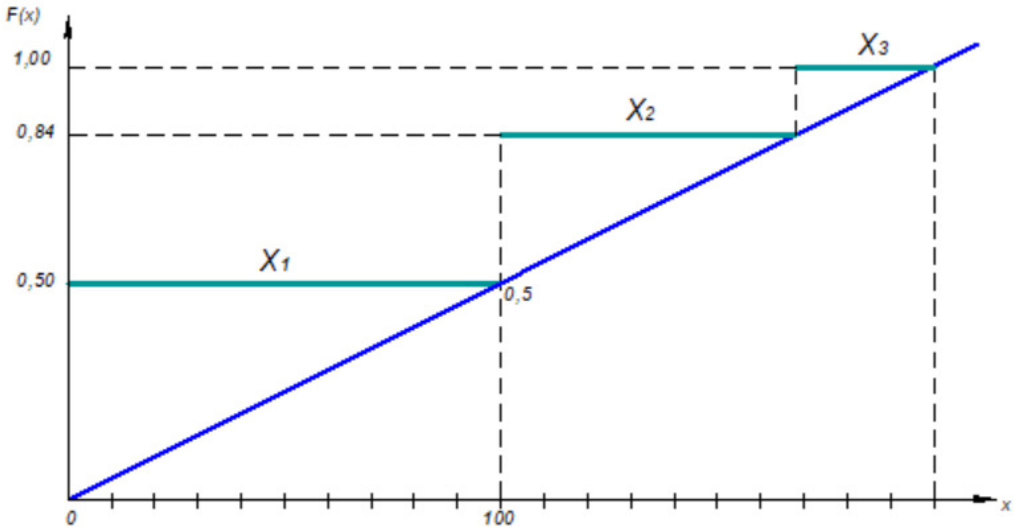

Рис. 1. График функции распределения случайной величины

Второй способ. Используя два произвольных значения X_i из соотношений, а третий неизвестный член уравнения получим расчетом(руб.):

$0{,}5X_1 + 0{,}34 \cdot 68 + 0{,}16 \cdot 32 = 100$ $X_1 = 143{,}5$;

$0{,}5 \cdot 100 + 0{,}34X_2 + 0{,}16 \cdot 32 = 100$ $X_1 = 132$;

$0{,}5 \cdot 100 + 0{,}34 \cdot 68 + 0{,}16\, X_3 = 100$ $X_1 = 168$.

Результаты расчетов всех вариантов (руб.):

1. $X_1 = 128$; $X_2 = 87$; $X_3 = 49$.
2. $X_1 = 143$; $X_2 = 68$; $X_3 = 32$.
3. $X_1 = 100$; $X_2 = 132$; $X_3 = 32$.
4. $X_1 = 100$; $X_2 = 68$; $X_3 = 168$.

Для равномерного денежного распределения между рабочими выбирается первый вариант.

Анализ вариантов решений показал, что оптимальным вариантом является 3-й вариант, так как в этом варианте минимальное количество грамм. Первый и второй варианты с отрицательными решениями не принимаются.

Задача № 2

Распределить экономически достижимый допуск замыкающего звена TA_Δ на составляющие звенья в зависимости от величины номинального размера (см. рис. 2).

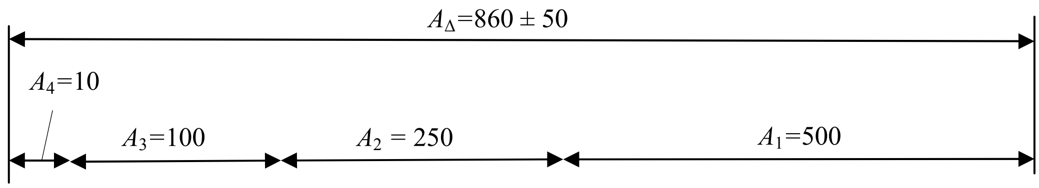

Рис. 2. Пример размерной цепи

Общая формула допуска замыкающего звена, рассчитываемая методом равноточных допусков, имеет вид:

$$TA_\Delta = \sum_i^{n-1} TA_i = \sum_i^{n-1} K_i \cdot X_i, \text{ или}$$

$$TA_\Delta = \sum_i^{n-1} 0{,}45\sqrt[3]{A_i} + 0{,}001 A_i) \cdot a_i, \qquad (7)$$

где a_i – количество единиц допуска составляющего звена неизвестная величина, в уравнении $X_i=a_i$, а значение $K_i = \sum_i^{n-1} 0{,}45\sqrt[3]{A_i} + 0{,}001 A_i)$ – единица допуска, характеризуются значением номинальных звеньев размерной цепи. Уравнения в числовом виде:

$$\begin{aligned} 4 \cdot X_1 + 3 \cdot X_2 + 2 \cdot X_3 + 1 \cdot X_4 = 100, \\ 0{,}4 \cdot X_1 + 0{,}3 \cdot X_2 + 0{,}2 \cdot X_3 + 0{,}1 \cdot X_4 = 10. \end{aligned} \qquad (8)$$

Для нахождения неизвестных построим график (рис. 3).

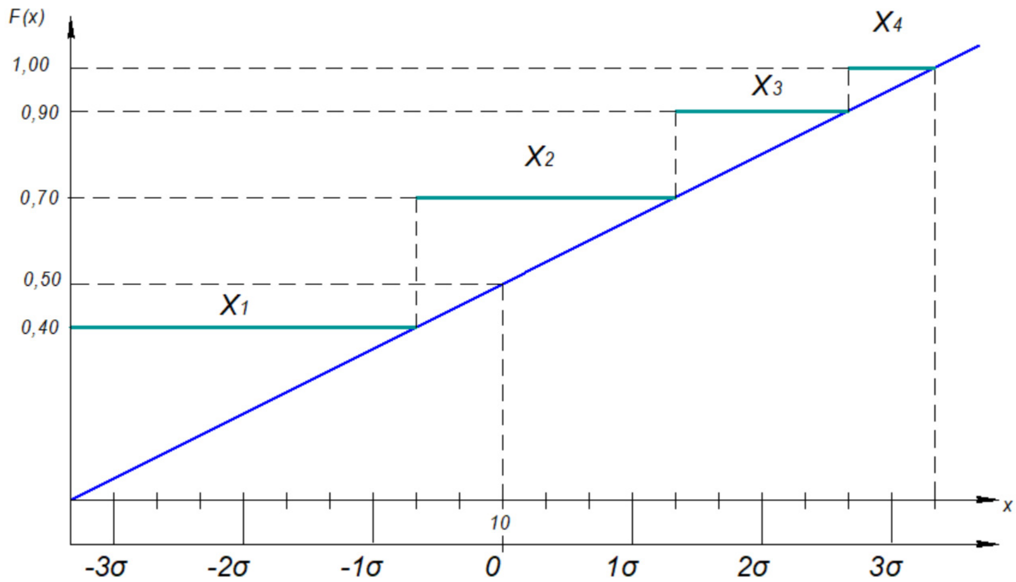

Рис. 3. График функции распределения дискретной случайной величины с 4 неизвестными

На графике две оси абсцисс различных математических ожиданий 10 и 0. Из подобия треугольников графика находим соотношения:

$X_1 = 0{,}4/0{,}5 \cdot 10 = 8$, $X_2 = 0{,}2/0{,}5 \cdot 10 = 4$,

$X_3 = 0{,}3/0{,}5 \cdot 10 = 6$, $X_4 = 0{,}1/0{,}5 \cdot 10 = 2$.

Подставляя в уравнение (8), получим:

$0{,}4 \cdot 8 + 0{,}3 \cdot 6 + 0{,}2 \cdot 4 + 0{,}1 \cdot 2 = 6$.

Для выполнения равенства находим решения по 2-му способу:

$0{,}4 \cdot X_1 + 0{,}3 \cdot 6 + 0{,}2 \cdot 4 + 0{,}1 \cdot 2 = 10$; $X_1 = 18$;

$0{,}4 \cdot 8 + 0{,}3 \cdot X_2 + 0{,}2 \cdot 4 + 0{,}1 \cdot 2 = 10$; $X_2 = 19{,}3$;

$0{,}4 \cdot 8 + 0{,}3 \cdot 6 + 0{,}2 \cdot X_3 + 0{,}1 \cdot 2 = 10$; $X_3 = 24$;

$0{,}4 \cdot 8 + 0{,}3 \cdot 6 + 0{,}2 \cdot 4 + 0{,}1 \cdot X_4 = 10$; $X_4 = 42$.

Результаты решений все вариантов:

1. $X_1 = 18$, $X_2 = 6$, $X_3 = 4$, $X_4 = 2$.
2. $X_1 = 8$, $X_2 = 19{,}3$, $X_3 = 4$, $X_4 = 2$.
3. $X_1 = 8$, $X_2 = 6$, $X_3 = 24$, $X_4 = 2$.
4. $X_1 = 8$, $X_2 = 6$, $X_3 = 4$, $X_4 = 42$.

Из четырех вариантов решений для задачи 2 принимаем 1-й вариант. Большему номинальному размеру – больший допуск.

Третий тип задач распадается на 2 вида: 1 – с положительными коэффициентами; 2 – с положительными и отрицательными. Сложность решения этой задачи заключается в том, что Д = 0 и первый способ поправки не применим.

Задача № 3

Рассмотрим пример задачи обеспечения цикла производства с учетом обязательных отчислений. Необходимо определить, сколько килограмм продукции надо продать и закупить предприятию, чтобы после торговли осталось 100 единиц.

Составим уравнение и сделаем преобразования:

$$4X_1+3X_2-2X_3-1X_4=100,$$
$$0{,}4X_1+0{,}3X_2-0{,}2X_3-0{,}1X_4=10\,. \qquad (9)$$

В уравнении (9) коэффициенты показывают стоимость.

Из подобия треугольников графика рис. 3 находим соотношения:

$$X_1=0{,}4/0{,}5\cdot10=8\,,\; X_2=0{,}2/0{,}5\cdot10=4\,,$$
$$X_3=0{,}3/0{,}5\cdot10=6\,,\; X_4=0{,}1/0{,}5\cdot10=2\,.$$

Для определения вариантов решений используем 2-й способ:

$$0{,}4\cdot X_1+0{,}3\cdot6-0{,}2\cdot4-0{,}1\cdot2=10\,;\, X_1=23\,;$$
$$0{,}4\cdot8+0{,}3\cdot X_2-0{,}2-0{,}1\cdot2=10\,;\, X_2=26\,;$$
$$0{,}4\cdot8+0{,}3\cdot6-0{,}2\cdot X_3-0{,}1\cdot2=10\,;\, X_3=-26\,;$$
$$0{,}4\cdot8+0{,}3\cdot6-0{,}2\cdot4-0{,}1\cdot X_4=10\,;\, X_4=-58\,.$$

Результаты решений всех вариантов:

1. $X_1=23\,, X_2=6\,, X_3=4\,, X_4=2\,.$
2. $X_1=8\,, X_2=26\,, X_3=4\,, X_4=2\,.$
3. $X_1=8\,, X_2=6\,, X_3=-26\,, X_4=2\,.$
4. $X_1=8\,, X_2=6\,, X_3=4\,, X_4=-58\,.$

Оптимальным вариантом для задачи (3) является 1-й вариант решения, который отражает минимальные затраты.

Обсуждение результатов

Множество решений уравнения теории ограничения систем с многими неизвестными можно ограничить путем представления уравнения в форме математического ожидания дискретной величины и строгого алгоритма решения. В данной части представлены три задачи, раскрывающие предлагаемый метод решения, и перспективы использования уравнений для практики при управлении жизненным циклом и построения систем.

Библиографические ссылки

1. *Осетров В. Г., Слащев Е. С.* Сборка в машиностроении, приборостроении. Теория технология и организация. Ижевск : Изд-во Ижевского института комплексного приборостроения, 2015. 328 с.

2. *Детмер У.* Теория ограничений Голдратта. Системный подход к непрерывному совершенствованию. М. : Альпина Паблишерз, 2010. 443 с.

3. *Goldratt E.M.* The haystack syndrome sifting information out of the data ocean. North River Press, 1990. P. 8-13.

4. Томас Корбетт. Управленческий учет по TOC. Учет прохода. Киев : Издательство «Необхідно і достатньо», 2009. 232 с.

5. Экономика, организация и планирование гражданской авиации / под ред. А. В. Мирошникова. М. : Транспорт, 2000. 240 с.

6. *Вумек Д. П., Джонс Д. Т.* Бережливое производство: Как избавиться от потерь и добиться процветания вашей компании. М. : Альпина Паблишерз, 2017. 472 с.

7. *Слащев Е. С., Осетров В.Г., Маликова Д. М.* Методология функционального проектирования процессов системы управления жизненным циклом изделия // Интеллектуальные системы в производстве. 2019. Т. 17. № 2. С. 88–92.

8. *Рузина Е. А., Пластинин В. Г., Палкин И. Ю.* Реализация ИПИ-технологий в разработке автоматизированной системы оперативно-диспетчерского управления инструментальным производством // Информ. технологии в проектировании и производстве. 2007. № 4. С. 94–100.

9. *Слащев Е. С., Осетров В. Г.* Формализация выбора метода достижения точности замыкающего звена при сборке // Системы проектирования, моделирования, подготовки производства и управление проектами CAD/CAM/CAE/PDM : сб. ст. XI Международной научно-практической конференции. Пенза : Приволжский дом знаний, 2017. С. 8––14.

10. *Владыкин А. А.* Теория ограничений систем в реализации инновационных изменений на промышленных предприятия // Науковедение : интернет-журнал. 2016. Т. 8. № 2. С. 1–9.

References

1. Osetrov V.G., Slashchev E.S. *Sborka v mashinostroenii, priborostroenii. Teoriya tehnologiya i organizaciya* [Assembly in mechanical engineering, instrument making. Theory of technology and organization]. Izhevsk : Publishing House of the Izhevsk Institute for Integrated Instrument Engineering, 2015. 328 p. (in Russ.).

2. Detmer W. *Teoriya ogranichenij Goldratta. Sistemnyj podhod k nepreryvnomu sovershenstvovaniyu* [Goldratt's Theory of Constraints. A systematic approach

to continuous improvement]. Moscow, Alpina Publ., 2010. 443 p. (in Russ.).

3. Goldratt E.M. The haystack syndrome sifting information out of the data ocean. North River Press, 1990. Pp. 8-13.

4. Thomas Corbett. *Upravlencheskij uchet po TOS. Uchet prohoda* [Management accounting for CBT. Accounting for the passage]. Kiev: Publishing house “Neobhidno i dostahno”, 2009. 232 p. (in Russ.).

5. *Ekonomika, organizaciya i planirovanie grazhdanskoj aviacii* [Economics, organization and planning of civil aviation], ed. A.V. Miroshnikova. Moscow, Transport Publ., 2000. 240 p. (in Russ.).

6. Vumek D.P., Jones D.T. *Berezhlivoe proizvodstvo: Kak izbavitsya ot poter i dobitsya procvetaniya vashej kompanii* [Lean production: How to get rid of los(in Russ.).

7. Slashchev E. S., Osetrov V. G., Malikova D. M. [Methodology of the functional design of the processes for the product life cycle management system]. Intellektualnye *sistemy v proizvodstve*. 2019. Vol. 17. No. 2. Pp. 88-92 (in Russ.).

8. Ruzina E.A, Plastinin V.G, Palkin I. Yu. [Implementation of IPS technologies in the development of automated systems for operational dispatch control of tool production]. Information technologies in design and production. 2007. No. 4. Pp. 94-100 (in Russ.).

9. Slashchev E. S., Osetrov V. G. *Formalizaciya vybora metoda dostizheniya tochnosti zamykayushego zvena pri sborke* [Formalization of the choice of the method for achieving the accuracy of the closing link during assembly]. *Sistemy proektirovaniya, modelirovaniya, podgotovki proizvodstva i upravlenie proektami CAD/CAM/CAE/PDM : sb. st. XI Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoj konferencii* [Proc. Systems for design, modeling, production preparation and project management CAD / CAM / CAE / PDM: Collected papers of XI International Scientific and Practical Conference]. Penza, Volga House of Knowledge, 2017. Pp. 8-14 (in Russ.).

10. Vladykin A. A. [The theory of system limitations in the implementation of innovative changes at industrial enterprises]. *Naukovedenie*: Internet Journal. 2016. Vol. 8. No. 2. Pp. 1-9 (in Russ.).

* * *

Method for Solving Problems of Theory of Constraint by Linear Equations with Multiple Unknowns

V. G. Osetrov, DSc in Engineering, Professor, Kalashnikov ISTU, Izhevsk, Russia
E. S. Slashcheev, PhD in Engineering, Kalashnikov ISTU, Izhevsk, Russia
D. M. Malikova, PhD in Economics, Kalashnikov ISTU, Izhevsk, Russia

The paper presents a method for solving problems of the theory of constraint in the form of linear equations with many unknowns encountered in practice when managing the life cycle of engineering products. The method is aimed at automating the process of substantiating the decisions taken at the stage of preparation for production and managing the product life cycle when managing dimensional, temporary and economic relations. The example of the first problem describes the key aspects of pricing and remuneration taking into account the productivity of workers. The second problem is to determine the economically achievable tolerance of the closing link of a dimension chain. The third problem describes the aspects of the enterprise load, taking into account mandatory contributions. These problems allow us to find a rational solution with a limited number of input data. Many solutions to equations with many unknowns can be limited by presenting the equations in the form of a mathematical expectation of a discrete quantity and a rigorous solution algorithm. The presented problems reveal a method for solving the problems of the theory of constraint and the prospects of using equations for practice in managing the life cycle and building automated systems by changing scenarios and calculation results taking into account a multi-factor model of production.

Keywords: linear equation, life cycle, substantiation of technological solutions, PLM-system, mathematical expectation, distribution of a random variable, theory of constraint.

Получено: 22.01.2020