УДК 519.853:517.988(045)
DOI: 10.22213/2410-9304-2020-2-61-70

Исследование модификации системы Лотки – Вольтерра: влияние внешних факторов на эволюцию системы конкурирующих процессов

Т. Г. Возмищева, кандидат физико-математических наук, доцент,
ИжГТУ имени М. Т. Калашникова, Ижевск, Россия

Исследуется модифицированная модель Лотки – Вольтерра – «хищник – жертва». Получены решения системы дифференциальных уравнений, которые моделируют нелинейное влияние на экосистему как внешних, так и внутренних факторов. Выбор дополнительных слагаемых в данной работе обусловлен следующими причинами:

1) *нелинейный характер скорости размножения жертвы;*
2) *наличие конкуренции между жертвами за питание;*
3) *нелинейная гибель жертв за счет экологических катастроф;*
4) *нелинейный характер скорости выедания жертв хищниками;*
5) *наличие конкуренции между хищниками за поедание жертв;*
6) *нелинейный характер скорости размножения хищников.*

Рассматриваются различные параметры системы дифференциальных уравнений, которые охватывают практически весь набор возможного благоприятного и неблагоприятного влияния на эволюцию биоценоза.

Исследуется модель конкурирующих популяций с поправками p_1x^2 *и* p_2y^2 *для жертв и хищников соответственно и следующие глобальные случаи: модель равного соотношения жертв и хищников за счет размножения жертв и гибели хищников* ($k = l$) *и за счет поедания жертв хищниками* ($a=b$)*; модель быстрого уменьшения жертвы по отношению к увеличению хищников, за счет поедания жертв.*

На основе построенных графиков проведен анализ результатов решения модифицированной системы Лотки – Вольтерра. Получены следующие выводы.

Для выживания экосистемы необходимы условия: достаточно большие коэффициенты размножения жертв; коэффициенты размножения жертв должны быть больше коэффициентов гибели хищников; наличие позитивного нелинейного характера скорости размножения жертв. Только в этом случае мы наблюдаем колебательный характер эволюции биоценоза.

В случае экологических катастроф биоценоз неминуемо погибает. Для его восстановления необходимо значительно повысить скорость размножения жертв. Тогда при незначительных отрицательных нелинейных слагаемых все-таки возможно восстановление биоценоза.

Ключевые слова: модель Лотки – Вольтерра, биологическая популяция, математическое моделирование, нелинейное влияние.

Введение

Математическое моделирование динамики биологических популяций – не только актуальная, но и чрезвычайно интересная проблема, так как она связана с конкурирующими процессами, с помощью которых можно описать эволюцию практически любой реальной системы. Аналитические и численные решения математической модели эволюции явления представляют значительный интерес во всех областях знаний [1]. В частности, в работе [2] приведен качественный анализ динамических систем в пространствах постоянной кривизны, в работе [3] исследованы модель Ричардсона гонки вооружения и модифицированная модель войны или сражения – модель Ланкастера – на основе модели Лотки – Вольтерра [4]. Существование биологического объекта в составе экосистемы обусловлено как закономерными внутренними процессами (репродукция, рост, питание, убийство и др.), так и случайными внешними явлениями, которые оказывают непосредственное влияние на протекание процессов жизнедеятельности [5]. В настоящее время на основе теории биологических сообществ изучается поведение хищников и жертв, поддающееся управлению. Равновесное состояние экосистем и их управление являются важнейшими вопросами математической экологии. Задачами управления служат переход систем из одного устойчивого состояния в другое, их восстановление и использование эволюционного развития. Условия равновесия системы естественно связаны с ее устойчивостью. Если на систему действуют небольшие возмущения и если после прекращения воздействия система возвращается в исходное состояние, то система является устойчивой. Если после прекращения воздействия система удаляется от состояния равновесия или колеблется с возрастанием амплитуды, то система неустойчива.

Важное достоинство динамического моделирования (инструмента прогнозирования и планирования в неопределенных динамично развивающихся ситуациях) состоит в том, что оно позволяет выявить неочевидные на уровне общих представлений закономерности [6, 7]. Это связано с тем, что даже простые модели способны демонстрировать сложное поведение, если дать им «разогнаться» во времени [8].

Целью данной работы является исследование модифицированной модели Лотки – Вольтерра при влиянии нелинейных внешних факторов на эволюцию системы, численный анализ системы дифференциальных уравнений при различных параметрах, которые моделируют ситуацию благоприятного и неблагоприятного влияния на экосистему, сравнительный анализ на основе графического представления расчетов эволюционных траекторий биоценоза.

Модифицированная модель динамики системы «хищник – жертва»

Очевидно, что каждая популяция, являющаяся составной частью реального биоценоза, взаимодействует одновременно с множеством других популяций на основе пищевых связей. Эти взаимодействия могут относиться к различным типам, основными из которых являются: нейтрализм (межвидовое взаимодействие биотических факторов), конкуренция (соревнование за ограниченный ресурс, вражда с целью получения выгоды), антагонизм (соперничество), хищничество (представители одного вида поедают представителей другого вида) и пр.

Системы дифференциальных уравнений, описывающие реальные, совершенно различные явления в физике и механике, могут быть тесно связаны между собой. Их эволюция зачастую основана на конкурирующих процессах. Рассмотрим сначала классическую систему «хищник – жертва», в данной модели отсутствует конкуренция между объектами одного вида. Если в системе нет «хищников», то «жертвы» $x(t)$ плодятся пропорционально своей численности с коэффициентом прироста $k > 0$, соответственно, и хищные особи $y(t)$ без потребления добычи вымирают пропорционально своей численности с коэффициентом $l > 0$. Численность жертв сокращается из-за хищников, а последние, напротив, плодятся. Этот процесс описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = kx(t) - ax(t)y(t), \\ \dot{y}(t) = -ly(t) + bx(t)y(t). \end{cases}$$

При встречах хищников и жертв, частота которых прямо пропорциональна величине yx, происходит убийство жертв с коэффициентом a, b – коэффициент преобразования хищным видом биомассы потребленных жертв в свою биомассу, то есть сытые хищники способны к воспроизводству с коэффициентом b.

При достаточно благоприятных условиях реального биоценоза мы наблюдаем либо колебания популяций хищников и жертв, либо стабильное количество тех и других видов, хотя процесс поедания жертв хищниками осуществляется непрерывно. Однако благоприятные условия в действительности наблюдаются не всегда (например, образование мертвых зон). Естественно, необходимо учесть некоторую поправку в классической модели.

В данной работе мы рассмотрим модель конкурирующих популяций с поправками p_1x^2 и p_2y^2 для жертв и хищников соответственно:

$$\begin{cases} \dot{x} = kx - axy + p_1 x^2, \\ \dot{y} = -ly + bxy + p_2 y^2, \end{cases} \quad (1)$$

где коэффициенты p_1 и p_2 определяют влияние внешних факторов на эволюцию системы как положительного, так и отрицательного характера, так как разнообразие условий среды может быть вредным или, напротив, приносить пользу живым организмам, содействовать выживанию или мешать размножаться. Экологические факторы делятся на абиотические (свойства неживой природы), биотические (виды влияния живых организмов друг на друга) и антропогенные (человеческая деятельность). Для начала биологической игры задаются начальные значения x_0 для жертв и y_0 для хищников. Эволюция игры и финал (в случае образования мертвой зоны) зависят от знаков и соотношений соответствующих коэффициентов. Можно зашить усложнение системы в функциональную зависимость коэффициентов [9], но можно также добавить в правые части уравнений системы слагаемые, которые явно позволяют понять влияние отдельных компонент на исход биологической игры. Важно также рассмотреть предельные случаи [10], когда образуются мертвые зоны. Выбор дополнительных слагаемых в данной работе обусловлен следующими причинами:

1) нелинейный характер скорости размножения жертвы;

2) наличие конкуренции между жертвами за питание;

3) нелинейная гибель жертв за счет экологических катастроф;

4) нелинейный характер скорости выедания жертв хищниками;

5) наличие конкуренции между хищниками за поедание жертв;

6) нелинейный характер скорости размножения хищников.

Очевидно, значительное усложнение и увеличение числа дополнительных слагаемых затрудняет понимание эволюции системы Лотки – Вольтерра. В данной работе мы рассмотрим следующие глобальные случаи:

1) модель равного соотношения жертв и хищников за счет размножения жертв и гибели хищников ($k = l$) и за счет поедания жертв хищниками (a=b);

2) модель быстрого уменьшения жертвы по отношению к увеличению хищников, за счет поедания жертв.

Кроме того, на систему влияют нелинейные дополнительные слагаемые, которые, возможно, определят гибель экосистемы.

Модель равного соотношения жертв и хищников за счет размножения жертв и гибели хищников ($k = l$) и за счет поедания жертв хищниками ($a = b$)

Рассмотрим следующие комбинации значений параметров системы 1 (см. табл. 1): равное соотношение жертв и хищников за счет размножения жертв и гибели хищников ($k = l$) и за счет поедания жертв хищниками ($a = b$) с учетом нелинейного характера скорости размножения жертв и хищников (знак +) и их гибели при экологических катастрофах и наличия конкуренции за питание (знак –).

Таблица 1. **Комбинации значений параметров для системы** (1)

1	$k = l$	$a > b$	$p_1 > 0$	$p_2 > 0$
2	$k = l$	$a > b$	$p_1 < 0$	$p_2 < 0$
3	$k > l$	$a = b$	$p_1 > 0$	$p_2 > 0$
4	$k > l$	$a = b$	$p_1 < 0$	$p_2 > 0$
5	$k > l$	$a = b$	$p_1 < 0$	$p_2 < 0$
6	$k < l$	$a = b$	$p_1 > 0$	$p_2 < 0$
7	$k < l$	$a = b$	$p_1 < 0$	$p_2 < 0$

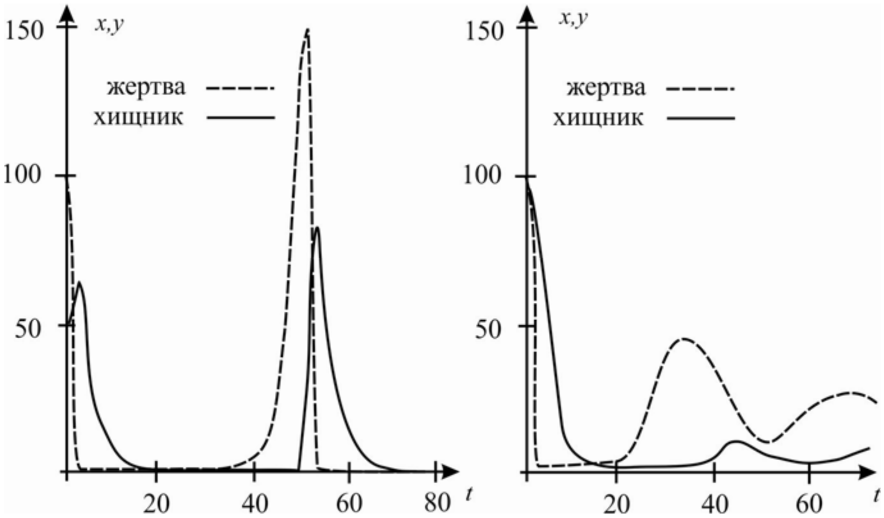
Случай 1. Рассмотрим следующую ситуацию: коэффициенты прироста жертв и гибели хищников равны; условия обитания для хищников и жертв – благоприятны, начальные условия – число хищников в два раза меньше, чем жертв (см. табл. 2).

Таблица 2. **Комбинации значений параметров для случая 1**

Начальные условия $k = l$		a	b	k	l	p_1	p_2
x_0	y_0						
100	50	0,04	0,02	0,3	0,3	0,0004	0,0004

Результаты вычислений представлены на рис. 1, *а*. Поведение системы практически совпадает с поведением классической системы Лотки – Вольтерра. Из рисунка видно, что даже при положительном влиянии внешней среды, способствующей нелинейному размножению, популяция не сразу может восстановить численность. Данный процесс имеет периодический характер.

Случай 2. Ситуация, при которой коэффициенты размножения жертв и гибели хищников равны, условия жизнедеятельности оказывают негативное влияние на развитие популяций как для жертв, так и для хищников, $p_1 = p_2 = -0,006$ (см. табл. 2).



а *б*

Рис. 1. Динамика численности популяции, случай 1:
а – условия биоценоза благоприятны; *б* – условия биоценоза неблагоприятны

Из рис. 1, *б* видно, что такое влияние с течением времени приводит к затухающим колебаниям, численность видов уменьшается. Отметим, что в начальные моменты времени поведение модифицированной модели совпадает с поведением классической модели Лотки – Вольтерра. С течением времени для классической модели характерен рост численности жертв. Следовательно, даже незначительное негативное влияние на биоценоз приводит к сокращению численности и жертв, и хищников.

Случай 3. Ситуация, при которой коэффициент размножения жертв выше, по сравнению с коэффициентом смертности хищников. Условия обитания способствуют благополучному развитию обеих популяций (см. табл. 3).

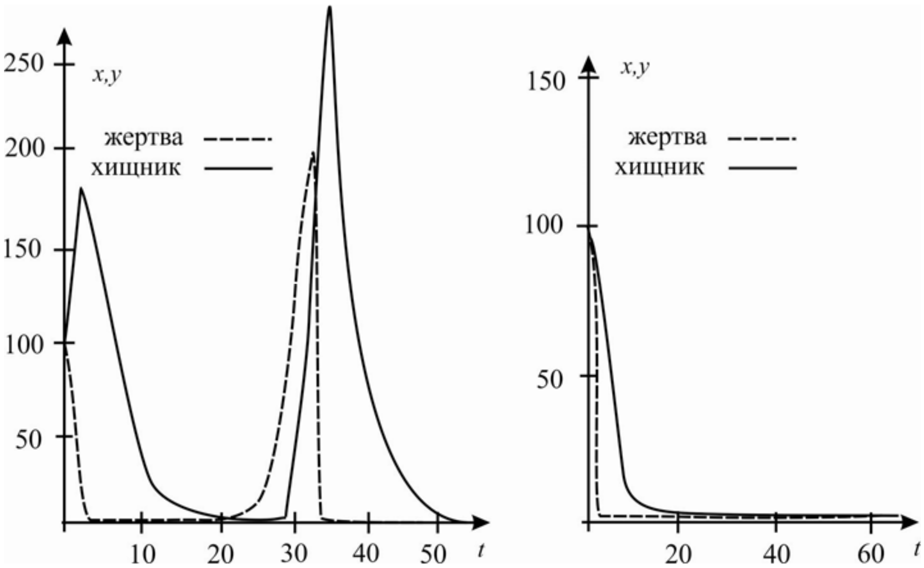
Таблица 3. **Комбинации значений параметров для случая 3**

Начальные условия $k = l$		a	b	k	l	p_1	p_1
x_0	y_0						
100	100	0,02	0,02	0,7	0,3	0,0006	0,0006

Видно (см. рис. 2, *а*), что число жертв идет на спад, это связано с резким ростом численности хищных видов. После этого жертвы довольно долго восстанавливаются, что приводит к резкому уменьшению числа хищников, которые терпят недостаток в пище. В то время как вымирают хищники, жертвы начинают активно размножаться. Мы наблюдаем колебательный процесс.

Случай 4. Ситуация, при которой коэффициент роста жертв больше, чем коэффициент гибели хищников. Условия благоприятны исключительно для последних, жертвы терпят кризис, $p_1 = -0{,}006$, $p_2 = 0{,}006$. Значения x_0 и y_0 для обоих видов в начальный момент времени равны. Результаты вычислений для данного случая представлены на рис. 2, *б*.

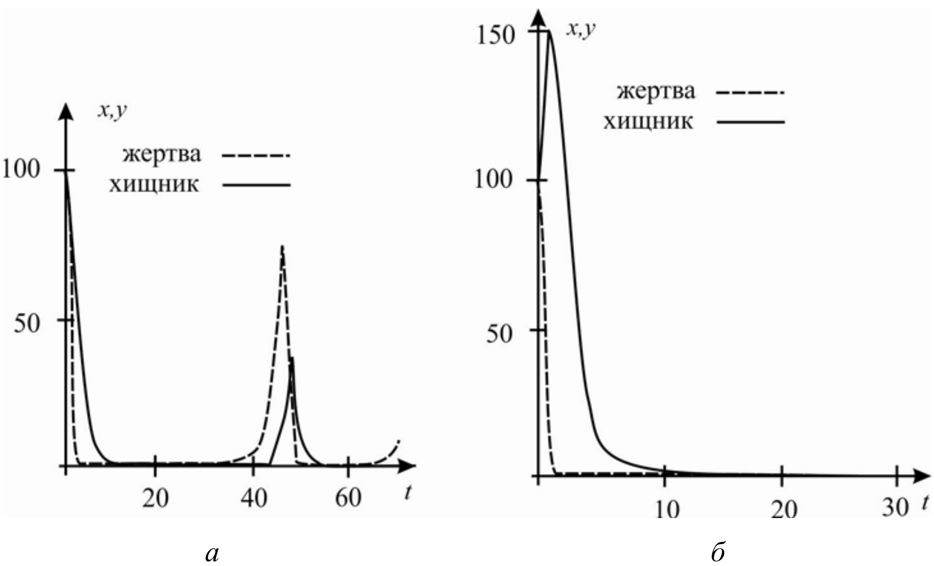
Видно, что жертвы достаточно быстро прекращают свое развитие, их численность достигает нуля. Популяция же хищников также вымирает, но более медленно. Популяции не успевают размножаться, образуется так называемая мертвая зона.



а б

Рис. 2. Динамика численности популяции системы (1):
а – условия биоценоза благоприятны; *б* – условия биоценоза неблагоприятны для жертв

Случай 5. Ситуация, при которой коэффициент роста жертв больше, чем коэффициент гибели хищных видов $k = 0{,}8$, $l = 0{,}6$. Условия среды неблагоприятны и для жертв, и для хищников, $p_1 = p_2 = -0{,}006$, начальные условия те же самые.



а б

Рис. 3. Динамика численности популяции системы (1):
а – условия биоценоза неблагоприятны; *б* – условия биоценоза благоприятны

Из рис. 3, *а* видно, что характер эволюции системы носит колебательный характер, за счет более высокого коэффициента рождаемости жертв система выживает, но амплитуда колебаний падает из-за неблагоприятных условий. Что делать в этом случае? Конечно, улучшить условия существования жертв, возможно, в этом случае экосистема выживет.

Случай 6. Ситуация, при которой коэффициент роста жертв меньше, чем коэффициент гибели хищных видов $k = 0,2$, $l = 0,6$. Условия среды благоприятны и для жертв, и для хищников, $p_1 = 0,0006$, $p_2 = 0,0008$, начальные условия те же самые. Из рис. 3, *б* видно, что число жертв резко идет к снижению, хищники изначально начинают активно размножаться. Далее численность популяций уменьшается, так как жертв становится меньше и хищникам нечем питаться. Коэффициент смертности выше рождаемости, что отрицательно влияет на систему. Популяции не в состоянии продолжить свое существование, несмотря на благоприятные условия. Таким образом, в этом случае необходимо повлиять на увеличение рождаемости жертв.

Случай 7. Здесь мы рассмотрим аналогичный случай, но при отрицательном влиянии дополнительных слагаемых $p_1 = -0,006$, $p_2 = -0,008$, $k = 0,4$, $l = 0,6$. В этом случае, несмотря на увеличение рождаемости жертв, оба вида также погибают, причем практически сразу, и жертвы, и хищники гибнут, так как влияют отрицательные факторы.

Подведем итоги:

1. Влияние дополнительных факторов на эволюцию биоценоза является существенным, положительные значения коэффициентов вызывают процветание биоценоза, отрицательные же значения приводят к гибели и жертв, и хищников. Чтобы контролировать реальный биоценоз и не допускать образование мертвых зон, нужно, по крайней мере, способствовать значительному размножению жертв, что приводит, соответственно, к увеличению численности хищников.

2. Только достаточно большие коэффициенты размножения жертв, которые к тому же должны быть больше по сравнению с коэффициентами вымирания хищников, могут перебороть нелинейную гибель видов, обусловленную экологическими катастрофами.

Модель быстрого уменьшения численности жертвы по отношению к увеличению численности хищников за счет поедания жертв

Мы рассмотрим случаи, когда $a/b > 1$, то есть коэффициент убийства жертв выше, чем коэффициент преобразования хищниками биомассы жертв в свою биомассу, и $a/b < 1$, то есть хищники быстро размножаются за счет поедания жертв, их количество быстро увеличивается. Кроме того, нелинейные эффекты могут менять ход эволюции системы. Смоделируем случаи комбинаций значений параметров системы (1) в табл. 4.

Таблица 4. **Комбинации значений параметров для системы (1)**

1	$k = l$	$a/b > 1$	$p_1 > 0$	$p_2 > 0$
2	$k = l$	$a/b > 1$	$p_1 < 0$	$p_2 < 0$
3	$k < l$	$a/b > 1$	$p_1 > 0$	$p_2 > 0$
4	$k < l$	$a/b > 1$	$p_1 < 0$	$p_2 < 0$
5	$k > l$	$a/b < 1$	$p_1 > 0$	$p_2 > 0$
6	$k < l$	$a/b < 1$	$p_1 < 0$	$p_2 < 0$

Случай 1. Ситуация, при которой коэффициенты размножения жертв и гибели хищников равны, условия среды благоприятны. Число жертв резко уменьшается при нападении хищников, что может быть вызвано их агрессивностью, обусловленной нелинейным характером размножения (см. табл. 5). На рис. 4 виден сначала рост хищников, жертвы очень быстро погибают. Далее мы наблюдаем вымирание популяций, несмотря на положительные коэффициенты нелинейных слагаемых. Если же рассмотреть отрицательные коэффициенты нелинейных слагаемых, то гибель популяций начинается в начальный момент времени (*случай 2*). Далее характер эволюции аналогичен.

Таблица 5. **Комбинации значений параметров для случая 1**

Начальные условия $k = l$		a	b	k	l	p_1	p_2
x_0	y_0						
100	100	0,5	0,3	0,2	0,2	0,0003	0,0005

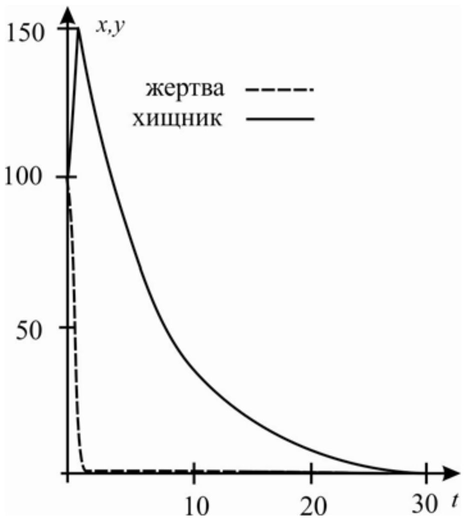


Рис. 4. Динамика численности популяции системы (1): условия биоценоза благоприятны

Случай 3. Ситуация, при которой рождаемость жертв ниже по сравнению с гибелью хищников, условия благоприятные для обоих видов (см. табл. 6).

Таблица 6. **Комбинации значений параметров для случаев 3, 4**

Начальные условия $k = l$		a	b	k	l	p_1	p_2
x_0	y_0						
100	50	0,5	0,3	0,02	0,04	0,0004	0,0003
						– 0,0004	– 0,0003

На рис. 5 представлены результаты вычислений. Число жертв резко идет на спад до нуля. За счет благоприятных условий хищники сначала активно размножаются и далее они продолжают выживать (продолжительность жизни увеличивается) достаточно долго, численность их уменьшается медленно, что значительно отличается от рассмотренных ранее случаев.

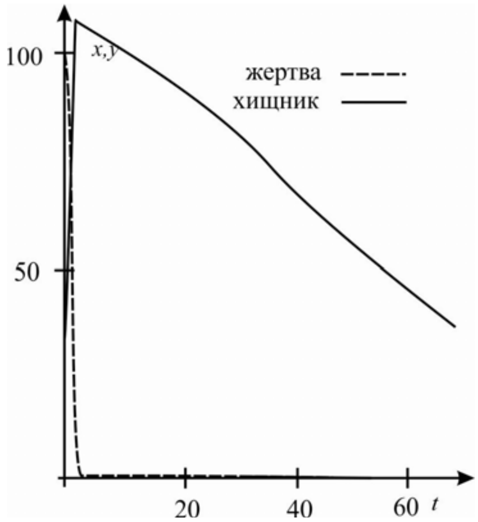


Рис. 5. Динамика численности популяции системы (1): условия биоценоза благоприятны, рождаемость жертв низкая

Случай 4. Отличие данного случая заключается лишь в том, что условия неблагоприятны (см. табл. 6), поэтому происходит быстрый спад численности хищников до нуля.

Случай 5. Ситуация, при которой скорость размножения жертв гораздо выше, чем скорость гибели хищников. Условия среды соответствуют благоприятному нелинейному размножению для первых и вторых видов (см. табл. 7).

Таблица 7. **Комбинации значений параметров для случая 5**

Начальные условия $k = l$		a	b	k	l	p_1	p_2
x_0	y_0						
100	50	0,2	0,3	0,4	0,2	0,0005	0,0007

В данной модели также учитывается, что число погибших хищников резко сокращается по сравнению с их приростом за счет обильного поедания жертв. На рис. 6, *а* видно, что сначала хищники активно размножаются, но из-за низкой рождаемости жертв и нехватки питания погибают, несмотря на благоприятные условия.

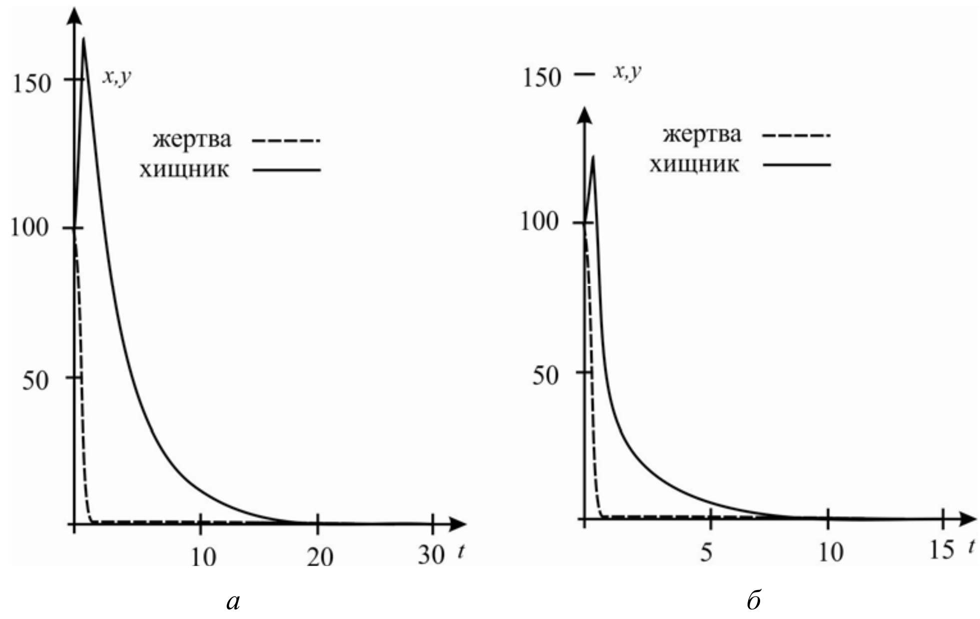


Рис. 6. Динамика численности популяции системы (1): *а* – условия биоценоза благоприятны; *б* – условия биоценоза неблагоприятны

Случай 6. Ситуация, при которой скорость роста численности жертв уменьшается по сравнению со скоростью гибели хищников. Нелинейные дополнительные слагаемые отрицательны. В данной модели также учитывается, что число погибших хищников резко сокращается по сравнению с их приростом за счет обильного поедания жертв (см. табл. 8).

Таблица 8. **Комбинации значений параметров для случая 6**

Начальные условия $k = l$		a	b	k	l	p_1	p_2
x_0	y_0						
100	50	0,3	0,6	0,4	0,8	–0,004	–0,007

На рис. 6, *б* видно резкое уменьшение количества обоих видов, даже возможность обильного питания не может перебороть низкую рождаемость жертв, высокую смертность хищников и отрицательное влияние нелинейных факторов.

Заключение

Рассмотренная достаточно простая модель описывает эволюцию системы с конкурирующими процессами и нелинейным влиянием как внешних, так и внутренних факторов, и дает возможность явно предсказать, а значит, избежать появления мертвых зон в природе. Преимущество данной модели состоит в том, что нелинейные слагаемые описывают практически весь набор возможных случаев позитивного и негативного влияния окружающей среды. Различные комбинации параметров системы дифференциальных уравнений определяют эволюцию биоценоза.

На основе проведенных численных расчетов и анализа результатов решения модифицированной системы Лотки – Вольтерра с различными параметрами можно сделать выводы.

Для выживания экосистемы необходимы следующие условия:

1) достаточно большие коэффициенты размножения жертв;

2) коэффициенты размножения жертв должны быть больше коэффициентов гибели хищников;

3) наличие позитивного нелинейного характера скорости размножения жертв.

Только в этом случае мы наблюдаем колебательный характер эволюции биоценоза.

В случае экологических катастроф биоценоз неминуемо погибает. Для его восстановления необходимо значительно повысить скорость размножения жертв. Тогда при незначительных отрицательных нелинейных слагаемых всё-таки возможно восстановление биоценоза.

Библиографические ссылки

1. *Базыкин А. Д.* Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. М. ; Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2003. 368 с.

2. *Возмищева Т. Г.* Траекторная эквивалентность задачи двух центров в плоском пространстве, в пространстве Лобачевского и на сфере: предельный переход (часть 1) // Вестник ИжГТУ имени М. Т. Калашникова. 2015. Т. 18. № 2. С. 112–116.

3. *Возмищева Т. Г.*, *Рудина Ю. И.* Исследование модифицированной модели войны или сражения на основе модели Лотки – Вольтерра, качественный и численный анализ // Приборостроение в XXI веке – 2019. Интеграция науки, образования и производства : сборник материалов XV Всероссийской научно-технической конференции. Ижевск, 2019. С. 314–322.

4. *Вольтерра В.* Математическая теория борьбы за существование. М. : Наука, 1976. 286 с.

5. *Демидова А. В.* Детерминистические модели «хищник-жертва» [Электронный ресурс]. URL: http://nanomod.sci.pfu.edu.ru/webfm_send/14 (дата обращения: 24.02.2020).

6. Взаимодействие в системе хищник-жертва. URL: https://works.doklad.ru/view/z8dRLicSzno/all.html (дата обращения: 24.02.2020).

7. *Эдвардс Ч. Г.* Дифференциальные уравнения и краевые задачи: моделирование и вычисление с помощью Mathematica, Maple и MATLAB. 3-е изд. М. : Вильямс, 2008. 1094 с.

8. *Бродский Ю. И.* Лекции по математическому и имитационному моделированию. М. ; Берлин : Директ медиа, 2015. 240 с.

9. *Арнольд В. И.* «Жесткие» и «мягкие» математические модели. М. : МЦНМО, 2004. 32 с.

10. *Vozmishcheva T. G.* The limit passage of space curvature in problems of celestial mechanics // Astrophysics and Space Science, 2016. Vol. 361 (9). Pp. 1-7.

References

1. Bazykin A.D. *Nelinejnaja dinamika vzaimodejstvujushhih populjacij* [Nonlinear dynamics of the interacting populations]. Moscow, Izhevsk: Institute of Computer Research, 2003, 368 p. (in Russ.).

2. Vozmishcheva T.G. [Trajectory equivalence of the two-center problem in the flat space, in the Lobachevsky space and on a sphere: the limit passage (part 1)]. *Vestnik IzhGTU imeni M.T. Kalashnikova*. 2015. Vol. 18. No. 2. Pp. 112-116.

3. Vozmishcheva T.G., Rudina Yu.I. *Issledovanie modificirovannoj modeli vojny ili srazhenija na osnove modeli Lotki – Vol'terra, kachestvennyj i chislennyj analiz* [The study of the modified model of war or buttle on the base of the Lotka – Volterra model, the qualitative and numerical analysis]. *Priborostroenie v XXI veke – 2019. Integracija nauki, obrazovanija i proizvodstva. Sbornik materialov XV Vserossijskoj nauchno-tehnicheskoj konferencii* [Proc. Instrumentation Engineering in the XXI Century**.** Integration of Science**,** Education and Production**]**. Izhevsk, 2019. Pp. 314-322 (in Russ.).

4. Vol'terra V. *Matematicheskaja teorija bor'by za sushchestvovanie* [The mathematical theory of struggle for existence]. Moscow, Nauka Publ., 1976. 286 p. (in Russ.).

5. Demidova A.V. *Deterministicheskie modeli «hishchnik-zhertva»* [The deterministic predator-prey models] (in Russ.). Available at: http://nanomod.sci.pfu.edu.ru/webfm_send/14 (accessed 24.02.2020).

6. *Vzaimodejstvie v sisteme hishchnik-zhertva* [Interaction in the predator-prey system] (in Russ.). Available at: https://works.doklad.ru/view/z8dRLicSzno/all.html (accessed 24.02.2020).

7. Jedvards Ch.G. *Differencial'nye uravnenija i kraevye zadachi: modelirovanie i vychislenie s pomoshch'ju Mathematica, Maple i MATLAB. 3-e izdanie* [Differential equations and boundary problems: modeling and calculation by means of Mathematica, Maple and MATLAB]. Moscow, Publishing House Vil'jams, 2008, 1094 p.

8. Brodskij Ju.I. Lekcii po matematicheskomu i imitacionnomu modelirovaniju [Lectures on mathematical modeling and simulation]. Moscow, Berlin: Direct media, 2015, 240 p. (in Russ.).

9. Arnol'd V.I. *«Zhestkie» i «mjagkie» matematicheskie modeli* [«Hard» and «Soft» mathematical models]. Moscow, Center for Continuous Mathematical Education, 2004. 32 p. (in Russ.).

10. *Vozmishcheva T.G.* The limit passage of space curvature in problems of celestial mechanics. In Astrophysics and Space Science. 2016. Vol. 361 (9). Pp. 1-7.

* * *

The Study of the Modification of the Lotka - Volterra Model: Influence of External Factors on the Evolution of the System of Competing Processes

T. G. Vozmishcheva, PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Kalashnikov ISTU, Izhevsk, Russia

In the article the modified Lotka - Volterra model - it is called the «predator-prey» model as well - is studied. Solutions of the system of differential equations which simulate the nonlinear influence of both external and internal factors on an ecosystem are obtained. The choice of the additional terms in this work is caused by the following reasons:

1) *the nonlinear character of the reproduction rate of the prey;*
2) *the existence of competition between the prey for food;*
3) *the nonlinear mortality rate of the prey due to the ecological catastrophes;*
4) *the nonlinear character of the rate of eating the prey by predators;*
5) *the existence of the competition between predators for eating the prey;*
6) *the nonlinear character of the reproduction rate of predators.*

Various parameters of the system of differential equations which cover practically the whole set of possible beneficial and adverse effect on evolutionary trajectories are considered.

In this article we study the model of the competing populations with the amendments p_1x^2 *and* p_2y^2 *both for the prey and predators respectively, and the following global cases: the model of equal ratio of the prey and predators due to reproduction of the prey and death of predators (k = l), and due to eating the prey by predators (a = b); the model of the fast decrease of the prey abundance with respect to the increase of predator abundance due to eating the prey by predators.*

Let us draw the conclusions on the basis of the carried out numerical calculations and the analysis of results of the solution of the modified Lotka – Volterra system with various parameters. The following conditions are necessary for survival of an ecosystem: enough high the reproduction rate of the prey; the reproduction rate of the prey must be greater than the mortality rate of predators; the existence of positive nonlinear character of reproduction rate of the prey. Only in this case, we observe the oscillatory nature of evolution of a biocenosis.

In the case of ecological catastrophes the biocenosis inevitably perishes. For its restoration the reproduction rate of the prey needs to be significantly increased. Then the ecosystem restoration is still possible even at insignificant negative nonlinear terms.

Keywords: Lotka - Volterra model, biological population, mathematical modeling, non-linear influence.

Получено: 05.06.2020