

УДК 536.46

DOI: 10.22213/2410-9304-2020-2-106-116

Влияние размерности математической модели внутренней баллистики на расчетные параметры выстрела*

И. Г. Русяк, доктор технических наук, профессор, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова, Ижевск, Россия

В. А. Тененев, доктор физико-математических наук, профессор, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова, Ижевск, Россия

Р. Р. Дряхлов, магистрант, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова, Ижевск, Россия

В работе дана постановка основной задачи внутренней баллистики в осредненных параметрах, отличительной особенностью которой является учет в рамках допущений термодинамического подхода распределения давления и скорости газа по заснарядному пространству для канала переменного сечения. При интегрировании уравнений по времени применяется двухшаговая схема Рунге – Кутты со вторым порядком точности. Представлена также постановка основной задачи внутренней баллистики в рамках одномерного газодинамического подхода. Для численного решения системы газодинамических уравнений применяется метод контрольного объема. Параметры газа на границах контрольных объемов определяются с использованием автомоделного решения задачи о распаде произвольного разрыва. Проведено сравнение решений, полученных в рамках термодинамического и газодинамического подходов при различных параметрах заряжания в рамках задачи Лагранжа. Изучено влияние уширения камеры на распределение внутрибаллистических параметров выстрела и противодействия на динамику движения снаряда. Представлено сравнение учета противодействия, как давления за отошедшей ударной волной, полученной из аналитического решения задачи о сверхзвуковом движении поршня в трубе с постоянной скоростью, и давления, действующего на снаряд, определяемого из решения нестационарных одномерных уравнений газовой динамики.

Ключевые слова: артиллерийская система; основная задача внутренней баллистики; противодействие движению снаряда в канале ствола; математическое моделирование; термодинамический подход; газодинамический подход; вычислительный эксперимент; сравнение результатов.

Введение

В практике проектирования артиллерийских систем при решении основной задачи внутренней баллистики (ОЗВБ) до настоящего времени используются термодинамические модели, основанные на следующих основных допущениях:

– горение пороха происходит при среднеобъемном давлении;

– температура продуктов горения, а также суммарная плотность продуктов горения и несгоревших пороховых элементов (газопороховой смеси) в любой точке заснарядного объема в каждый момент одинаковы (зависят только от времени).

Ключевым моментом в понятии «термодинамический подход» является осреднение термодинамических параметров (давление,

плотность, температура) по заснарядному объему. При этом математическая модель выстрела представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений, дополненную начальными условиями.

Для оценки влияния учета пространственного распределения параметров необходимо рассматривать газодинамическую постановку ОЗВБ. В данном случае математическая модель выстрела представляет собой систему дифференциальных уравнений в частных производных, дополненную начальными и граничными условиями.

Целью данного исследования является изучение влияния учета пространственного распределения параметров и противодействия на результаты моделирования баллистики выстрела и динамики движения снаряда.

Дополнительно будем придерживаться следующих допущений, не влияющих на цели данной работы [1]:

- трением снаряда о поверхность ствола пренебрегается;
- потери энергии на теплоотдачу не учитываются;
- орудие считается безоткатным.

Постановка ОЗВБ в осредненных параметрах

Уравнение состояния пороховых газов

При давлениях и температурах, характерных для процесса артиллерийского выстрела, используют уравнение состояния в форме Дюпре:

$$p \left(\frac{1}{\rho} - \alpha \right) = RT, \quad (1)$$

где величина α получила название коволюма пороховых газов; R – удельная газовая постоянная.

Для замкнутого объема W при отсутствии внешних работ и тепловых потерь, при постепенном сжигании пороха массой ω , из уравнения (1) следует

$$p = \frac{\omega \psi RT_v}{W - \alpha \omega \psi - \frac{\omega}{\delta} (1 - \psi)}, \quad (2)$$

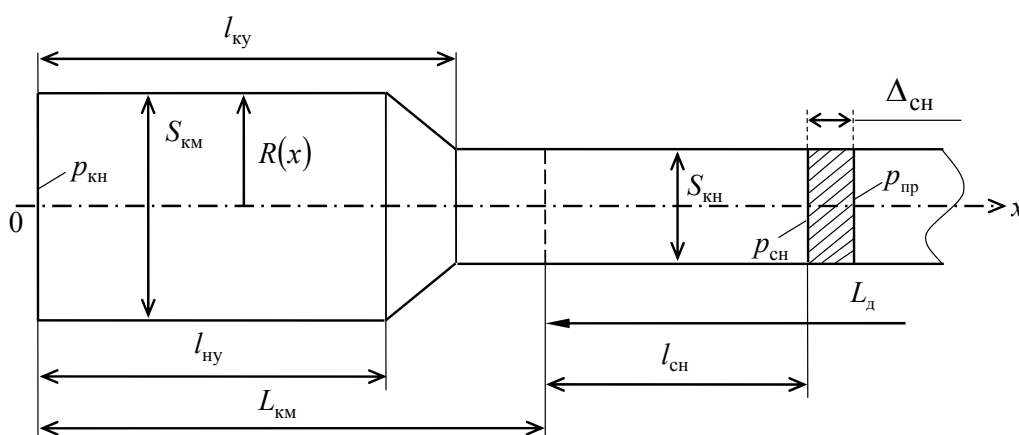


Рис. 1. К постановке задачи

Противодавление $p_{пр}$ приближенно можно определить из решения задачи о движении поршня в трубе с постоянной скоростью, как давление за отошедшей ударной волной [2]:

где T_v – температура пороховых газов при сжигании пороха в постоянном объеме; ψ – относительная доля сгоревшего пороха; δ – плотность материала пороха. После полного сжигания ($\psi = 1$) достигается максимальное давление в объеме W :

$$p_m = \frac{f \Delta}{1 - \alpha \Delta}, \quad (3)$$

где $\Delta = \frac{\omega}{W}$ – плотность заряжания;

$f = RT_v$ – сила пороха.

Уравнение движения снаряда

Поступательное движение снаряда в стволе (рис. 1) описывается уравнением:

$$q \frac{dv_{сн}}{dt} = S_{сн} (p_{сн} - p_{пр}), \quad (4)$$

где t – время процесса; $v_{сн}$ – скорость снаряда; q – масса снаряда; $S_{сн}$ – площадь сечения канала ствола; $p_{сн}$ – давление, действующее на дно снаряда со стороны камеры; $p_{пр}$ – противодавление, действующее на снаряд при его движении по каналу ствола.

$$p_{пр} = p_n \left(1 + \frac{k_B + 1}{4} k_B \frac{v_{сн}^2}{c_B^2} + k_B \frac{v_{сн}}{c_B} \sqrt{1 + \left(\frac{k_B + 1}{4} \right)^2 \frac{v_{сн}^2}{c_B^2}} \right), \quad (5)$$

где p_H – начальное давление воздуха в стволе; $c_B = \sqrt{\frac{k_B p_H}{\rho_B}}$ – скорость звука в воздухе; k_B , ρ_B – показатель адиабаты воздуха и плотность воздуха перед ударной волной соответственно.

Уравнение горения пороха

Процесс горения пороха будем рассматривать в рамках геометрического закона, сформулированного Вьелем [3, 4], положения которого хорошо известны.

Введем относительную поверхность порохового зерна: $\sigma(\psi) = S_T/S_0$ или $\sigma(z) = S_T/S_0$, где S_0 , S_T – первоначальная и текущая поверхность одного порохового зерна соответственно; $z = e/e_1$ – относительная толщина сгоревшего свода; $2e_1, 2e$ – первоначальная и текущая толщина горящего свода порохового зерна соответственно. Тогда скорость газообразования определится из уравнения

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{S_0}{\Lambda_0} \sigma(\psi) u_k, \quad (6)$$

где Λ_0 – первоначальный объем порохового зерна; u_k – скорость горения пороха.

Для большинства пороховых элементов, применяемых в артиллерии, зависимость $\psi(z)$ описывается полиномом третьей степени вида:

$$\psi(z) = \kappa z (1 + \lambda z + \mu z^2), \quad (7)$$

при этом

$$\sigma(z) = 1 + 2\lambda z + 3\mu z^2, \quad (8)$$

где постоянные κ, λ, μ – характеристики формы порохового элемента.

Если в конце горения при $z=1$ $\psi=1$, то формула (7) обращается в равенство $1 = \kappa(1 + \lambda + \mu)$, служащее для проверки правильности расчета, характеристик формы. В противном случае, например, для пороховых элементов с семью каналами имеем: $\psi_p = \kappa(1 + \lambda + \mu) < 1$, где ψ_p – относи-

тельная доля сгоревшего пороха в момент распада зерна при $z=1$. Если применяется зерненный порох, то после распада относительная поверхность горения может быть определена по формуле

$$\sigma(\psi) = (1 + 2\lambda + 3\mu) \sqrt{\frac{1-\psi}{1-\psi_p}}, \quad \psi_p \leq \psi \leq 1. \quad (9)$$

Таким образом, скорость газообразования можно определять из решения следующей системы уравнений, справедливой до распада пороховых элементов:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{S_0}{\Lambda_0} \sigma(z) u_k, \quad \sigma(z) = 1 + 2\lambda z + 3\mu z^2, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{u_k}{e_1}. \quad (10)$$

После распада можно воспользоваться уравнением (6) и зависимостью (9).

Уравнение энергии

Второй закон термодинамики для процесса преобразования энергии при выстреле при принятых допущениях имеет вид

$$\omega \psi \frac{RT}{\theta} = \omega \psi \frac{RT_v}{\theta} - \int_0^{x_{\text{CH}}} \tilde{\rho} \frac{v^2}{2} dx - \int_0^{l_{\text{CH}}} S_{\text{KH}} p_{\text{CH}} dl, \quad (11)$$

где $\tilde{\rho} = \frac{\omega}{W_{\text{KM}} + S_{\text{KH}} l_{\text{CH}}} = \frac{\omega}{W_{\text{CH}}}$ – плотность газопороховой смеси; v – скорость газопороховой смеси; $S = S(x)$ – переменная площадь сечения камеры или ствола; $\theta = c_p/c_v - 1$; c_p, c_v – теплоемкости пороховых газов при постоянном объеме и давлении соответственно; W_{KM} – объем камеры заряжения; $x_{\text{CH}}, l_{\text{CH}}$ – положение снаряда и путь, пройденный снарядом к моменту времени t соответственно.

Используя уравнение состояния в форме $p(W_{\text{CB}} - \alpha \omega \psi) = \omega \psi RT$, где $W_{\text{CB}} = W_{\text{KM}} + S_{\text{KH}} l_{\text{CH}} - \frac{\omega}{\delta}(1 - \psi) = W_{\text{CH}} - \frac{\omega}{\delta}(1 - \psi)$, получим:

$$p \left[W_{\text{CH}} - \frac{\omega}{\delta}(1 - \psi) - \alpha \omega \psi \right] = \omega \psi f - \theta \int_0^{x_{\text{CH}}} \tilde{\rho} \frac{v^2}{2} S dx - \theta \int_0^{l_{\text{CH}}} S_{\text{KH}} p_{\text{CH}} dl. \quad (12)$$

Для дальнейших преобразований уравнения (12) используем одномерные уравнения неразрывности и движения

$$\frac{\partial \tilde{\rho} S}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\rho} v S}{\partial x} = 0, \quad (13)$$

$$\tilde{\rho} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (14)$$

При допущении о равномерном распределении газопороховой смеси по заснарядному объему из уравнения (13) можно найти:

$$v(x, t) = - \frac{W(x)}{S(x)} \frac{d \ln \tilde{\rho}}{dt} = \frac{W(x)}{S(x)} \frac{S_{\text{кн}} v_{\text{чн}}}{W_{\text{чн}}}, \quad (15)$$

где $W(x) = \int_0^x S(\xi) d\xi$ – объем заснарядного

пространства. При этом $W_{\text{чн}} = \int_0^{x_{\text{чн}}} S(\xi) d\xi$.

Вернемся к уравнению (12). Учитывая выражение (15), получаем

$$\theta \int_0^{x_{\text{чн}}} \tilde{\rho} \frac{v^2}{2} S dx = \theta \omega J_0 \frac{v_{\text{чн}}^2}{2}, \quad \text{где обозначено}$$

$$J_0 = \frac{S_{\text{кн}}^2}{W_{\text{чн}}^3} \int_0^{x_{\text{чн}}} \frac{W^2(x)}{S(x)} dx. \quad \text{Воспользовавшись}$$

уравнением движения снаряда (4) без учета

противодавления, имеем $\theta \int_0^{l_{\text{чн}}} S_{\text{кн}} p_{\text{чн}} dl = \theta q \frac{v_{\text{чн}}^2}{2}$.

Таким образом, уравнение (12) преобразуется к виду:

$$p \left[W_{\text{чн}} - \frac{\omega}{\delta} (1 - \psi) - \alpha \omega \psi \right] = \omega \psi f - \theta \omega J_0 \frac{v_{\text{чн}}^2}{2} J_0 - \theta q \frac{v_{\text{чн}}^2}{2}. \quad (16)$$

Для камеры без уширения $S_{\text{км}} = S_{\text{кн}}$, и

тогда $J_0 = \frac{S_{\text{кн}}^2}{W_{\text{чн}}^3} \int_0^{x_{\text{чн}}} \frac{W^2(x)}{S(x)} dx = \frac{1}{3}$. Уравнение

энергии в таком случае приобретает вид

$$p \left[W_{\text{чн}} - \frac{\omega}{\delta} (1 - \psi) - \alpha \omega \psi \right] = \omega \psi f - \theta \left(1 + \frac{1}{3} \frac{\omega}{q} \right) q \frac{v_{\text{чн}}^2}{2}. \quad (17)$$

Распределение давления по заснарядному пространству

Будем исходить из уравнения движения (14). После интегрирования получим

$$p(x, t) = p_{\text{кн}}(t) - \tilde{\rho} \int_0^x \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) d\xi - \tilde{\rho} \int_0^x \left(v \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) d\xi,$$

где $p_{\text{кн}}(t)$ – текущее давление на дно канала орудия. Используя выражение (15), после несложных, но громоздких преобразований приходим к уравнению:

$$p(x, t) = p_{\text{кн}}(t) - \left(\frac{\omega p_{\text{чн}}(t)}{q} - \omega \frac{v_{\text{чн}}^2}{W_{\text{чн}}} \right) J_1(x) - \frac{1}{2} \omega \frac{S_{\text{кн}}^2 v_{\text{чн}}^2}{W_{\text{чн}}^3} \frac{W^2(x)}{S^2(x)}, \quad (18)$$

где $J_1(x) = \frac{S_{\text{кн}}^2}{W_{\text{чн}}^2} \int_0^x \frac{W(\xi)}{S(\xi)} d\xi$. Учитывая

$p(x_{\text{чн}}, t) = p_{\text{чн}}(t)$, из последнего уравнения получим

$$p_{\text{чн}}(t) = p_{\text{кн}}(t) - \left(\frac{\omega}{q} p_{\text{чн}}(t) - \omega \frac{v_{\text{чн}}^2}{W_{\text{чн}}} \right) J_1(x_{\text{чн}}) - \frac{1}{2} \omega \frac{v_{\text{чн}}^2}{W_{\text{чн}}}, \quad (19)$$

где $J_1(x_{\text{чн}}) = \frac{S_{\text{кн}}^2}{W_{\text{чн}}^2} \int_0^{x_{\text{чн}}} \frac{W(x)}{S(x)} dx$.

Свяжем среднее давление в системе $p(t)$ с давлением на снаряд $p_{\text{чн}}(t)$. Очевидно

$$p(t) = \frac{1}{W_{\text{чн}}} \int_0^{x_{\text{чн}}} p(x, t) S(x) dx. \quad (20)$$

После подстановки выражения для $p(x, t)$ согласно (18) из (20) получим:

$$p(t) = p_{\text{кн}}(t) - \left(\frac{\omega p_{\text{чн}}(t)}{q} - \omega \frac{v_{\text{чн}}^2}{W_{\text{чн}}} \right) J_2 - \frac{1}{2} \omega \frac{v_{\text{чн}}^2}{W_{\text{чн}}} J_0,$$

где $J_2 = \frac{S_{\text{кн}}^2}{W_{\text{чн}}^3} \int_0^{x_{\text{чн}}} \left(\int_0^x \frac{W(\xi)}{S(\xi)} d\xi \right) S(x) dx$. Откуда,

воспользовавшись уравнением (19), находим

$$\begin{aligned}
 p(t) = & \\
 = p_{\text{ch}}(t) + & \left(\frac{\omega p_{\text{ch}}(t)}{q} - \omega \frac{v_{\text{ch}}^2}{W_{\text{ch}}} \right) (J_1(x_{\text{ch}}) - J_2) + \\
 & + \frac{1}{2} \omega \frac{v_{\text{ch}}^2}{W_{\text{ch}}} (1 - J_0). \quad (21)
 \end{aligned}$$

Для камеры без уширения $S_{\text{км}} = S_{\text{кн}}$

$$\begin{aligned}
 \text{и } J_0 = & \frac{S_{\text{кн}}^2}{W_{\text{ch}}^3} \int_0^{x_{\text{ch}}} \frac{W^2(x)}{S(x)} dx = \frac{1}{3}, \\
 J_1(x_{\text{ch}}) = & \frac{S_{\text{кн}}^2}{W_{\text{ch}}^2} \int_0^{x_{\text{ch}}} \frac{W(x)}{S(x)} dx = \frac{1}{2}, \\
 J_2 = & \frac{S_{\text{кн}}^2}{W_{\text{ch}}^3} \int_0^{x_{\text{ch}}} \left(\int_0^x \frac{W(\xi)}{S(\xi)} d\xi \right) S(x) dx = \frac{1}{6}. \text{ В этом}
 \end{aligned}$$

случае имеем: $p(t) = \left(1 + \frac{1}{3} \frac{\omega}{q} \right) p_{\text{ch}}(t)$.

Система уравнений ОЗВБ

Постановка ОЗВБ (без учета противодействия) имеет вид:

1. Уравнение горения

– до фазы распада пороховых элементов $z \leq 1$ или $\psi \leq \psi_p = \kappa(1 + \lambda + \mu)$:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{S_0}{\Lambda_0} \sigma(z) u_k, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{u_k}{e_1}, \quad \sigma(z) = 1 + 2\lambda z + 3\mu z^2; \quad (22)$$

– после распада пороховых элементов $\psi > \psi_p = \kappa(1 + \lambda + \mu)$:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\psi}{dt} = & \frac{S_0}{\Lambda_0} \sigma(\psi) u_k, \quad \sigma(\psi) = \sigma(\psi_p) \sqrt{\frac{1-\psi}{1-\psi_p}}, \\
 \psi_p \leq & \psi \leq 1, \quad \sigma(\psi_p) = 1 + 2\lambda + 3\mu. \quad (23)
 \end{aligned}$$

2. Уравнение движения

$$q \frac{dv_{\text{ch}}}{dt} = S_{\text{кн}} p_{\text{ch}}, \quad \frac{dl_{\text{ch}}}{dt} = v_{\text{ch}}. \quad (24)$$

3. Уравнение энергии

$$\begin{aligned}
 p \left[W_{\text{ch}} - \frac{\omega}{\delta} (1 - \psi) - \alpha \omega \psi \right] = & \\
 = \omega \psi f - \left(1 + \frac{\omega}{q} J_0 \right) \theta q \frac{v_{\text{ch}}^2}{2}. \quad (25)
 \end{aligned}$$

4. Уравнение состояния

$$p \left[W_{\text{ch}} - \alpha \omega \psi - \frac{\omega}{\delta} (1 - \psi) \right] = \omega \psi RT,$$

$$W_{\text{ch}} = W_{\text{км}} + S_{\text{ch}} l_{\text{ch}}. \quad (26)$$

5. Дополнительное соотношение:

$$p_{\text{ch}}(t) = \frac{p(t) + \omega \frac{v_{\text{ch}}^2}{W_{\text{ch}}} \left(\frac{1}{2} J_0 + J_1(x_{\text{ch}}) - J_2 - \frac{1}{2} \right)}{1 + \frac{\omega}{q} (J_1(x_{\text{ch}}) - J_2)}. \quad (27)$$

6. Начальные условия:

при $t = 0, 0 \leq x \leq L_{\text{км}}: p = p_{\phi}, T = T_v, v_{\text{ch}} = 0,$

$$l_{\text{ch}} = 0, \psi = \frac{p_{\phi} \left(\frac{\delta}{\Delta} - 1 \right)}{f\delta + p_{\phi}(\alpha\delta - 1)}, \Delta = \frac{\omega}{W_{\text{км}}}. \quad (28)$$

Задача Лагранжа в термодинамической постановке

Исследование влияния размерности задачи на результаты решения ОЗВБ проведем в рамках задачи Лагранжа, которая отличается от задачи внутренней баллистики дополнительным допущением о мгновенном сгорании пороха в начальный момент времени: при $t \geq 0, \psi = 1$. В данном случае имеем:

1. Уравнение движения

$$q \frac{dv_{\text{ch}}}{dt} = S_{\text{кн}} p_{\text{ch}}, \quad \frac{dl_{\text{ch}}}{dt} = v_{\text{ch}}. \quad (29)$$

2. Уравнение энергии

$$p(W_{\text{ch}} - \alpha\omega) = \omega f - \left(1 + \frac{\omega}{q} J_0 \right) \theta q \frac{v_{\text{ch}}^2}{2}. \quad (30)$$

3. Уравнение состояния

$$p(W_{\text{ch}} - \alpha\omega) = \omega RT. \quad (31)$$

4. Дополнительное соотношение – имеет вид (27).

5. Начальные условия:

при $t = 0, 0 \leq x \leq L_{\text{км}}: p = p_m, T = T_v, v_{\text{ch}} = 0,$

$$l_{\text{ch}} = 0, p_m = \frac{f\Delta}{1 - \alpha\Delta}, \Delta = \frac{\omega}{W_{\text{км}}}. \quad (32)$$

Задача Лагранжа в газодинамической постановке

Решение задачи будем рассматривать в приближении совершенного газа, течение которого подчиняется уравнениям Эйлера. В одномерном случае соответствующая система уравнений имеет вид [5]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho S}{\partial t} + \frac{\partial \rho v S}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \rho v S}{\partial t} + \frac{\partial (p + \rho v^2) S}{\partial x} &= -p \frac{\partial S}{\partial x}, \\ \frac{\partial e S}{\partial t} + \frac{\partial (e + p) v S}{\partial x} &= 0, e = \rho \left(\varepsilon + \frac{v^2}{2} \right), \varepsilon = c_v T, \\ p(1 - \alpha \rho) &= \rho R T. \end{aligned} \quad (33)$$

Здесь ρ – плотность пороховых газов.

Начальные и граничные условия:

при $t = 0, 0 \leq x \leq L_{\text{км}}$:

$$v = 0, \rho = \Delta, p = p_m, T = T_v, v_{\text{сн}} = 0, l_{\text{сн}} = 0,$$

$$p_m = \frac{f \Delta}{1 - \alpha \Delta}, \Delta = \frac{\omega}{W_{\text{км}}}; \quad (34)$$

при $t > 0, x = 0$:

$$v = 0; \quad (35)$$

при $t > 0, x = x_{\text{сн}}$:

$$q \frac{dv_{\text{сн}}}{dt} = S_{\text{кн}} p_{\text{сн}}, v = v_{\text{сн}}, \frac{dl_{\text{сн}}}{dt} = v_{\text{сн}}. \quad (36)$$

Постановка задачи о противодавлении

При решении ОЗВБ чаще всего полагают, что противодавление, формирующееся бегущей впереди снаряда волной сжатия и ударной волной, пренебрежимо мало, либо определяют его по формуле (5), полученной из решения задачи о движении плоского поршня с постоянной сверхзвуковой скоростью в трубе. Для выяснения вопроса ее применимости рассмотрим течение газа (воздуха) впереди снаряда. Будем предполагать, что снаряд выполнен в виде эквивалентного по массе цилиндра с диаметром, равным диаметру канала ствола.

Система газодинамических уравнений, описывающая одномерное течение воздуха впереди снаряда в канале постоянного сечения, имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial (p + \rho v^2)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial (e + p) v}{\partial x} &= 0, e = \varepsilon + \frac{v^2}{2}, \varepsilon = c_{\text{вб}} T, \\ p &= \rho R_b T^1. \end{aligned} \quad (37)$$

Здесь ρ – плотность воздуха.

Начальные и граничные условия:

при $t = 0, x \geq L_{\text{км}} + \Delta_{\text{сн}}: v = 0, v_{\text{сн}} = 0, l_{\text{сн}} = 0,$

$$\rho = \rho_{\text{н}}, p_{\text{н}} = 0,981 \cdot 10^5 \text{ Па}, T = T_{\text{н}}, \rho_{\text{н}} = \frac{p_{\text{н}}}{R_b T_{\text{н}}}, \quad (38)$$

где $\Delta_{\text{сн}}$ – длина эквивалентного цилиндра; R_b – газовая постоянная воздуха; $T_{\text{н}}$ – начальная температура воздуха;

при $t \geq 0, x = L_{\text{км}} + \Delta_{\text{сн}} + l_{\text{сн}}: q \frac{dv_{\text{сн}}}{dt} =$

$$= S_{\text{кн}} (p_{\text{сн}} - p_{\text{пр}}), v = v_{\text{сн}}, \frac{dl_{\text{сн}}}{dt} = v_{\text{сн}}; \quad (39)$$

при $t \geq 0, x = D \gg L_{\text{км}} + L_{\text{д}}: v = 0. \quad (40)$

Вычислительные алгоритмы решения задач

Численное решение задачи Лагранжа в термодинамической постановке реализовано с использованием метода Рунге – Кутты

2-го порядка [6]. Для исследования сходимости численного решения использовали аналитическое решение задачи Лагранжа, справедливое для камеры без уширения $S_{\text{км}} = S_{\text{кн}}:$

$$v_{\text{сн}} = \sqrt{\frac{2f\omega}{\theta \left(1 + \frac{1}{3} \frac{\omega}{q} \right) q} \left[1 - \left(\frac{W_{\text{км}} - \alpha\omega}{l_{\text{сн}} S_{\text{кн}} + W_{\text{км}} - \alpha\omega} \right)^\theta \right]}. \quad (41)$$

¹ В данном случае предполагаемый уровень давления впереди снаряда таков, что можно воспользоваться уравнением состояния Клапейрона – Менделеева.

При решении задачи Лагранжа в газодинамической постановке использовали метод Годунова, имеющий второй порядок точности по пространственным координатам и времени [7–12]. Проведено исследование сеточной сходимости метода. Выбор шагов численного интегрирования, обеспечивающих в евклидовой норме точность расчета 0,1 %, осуществлялся путем последовательного удвоения делений сетки и сравнением результатов в соответствии с принципом Рунге [13]. Для одномерного приближения количество ячеек сетки в области интегрирования, обеспечивающих заданную точность, равнялось $N = 100$.

Анализ численных результатов

Численные исследования проводились для артиллерийской системы со следующими характеристиками: $d_{\text{кн}} = 0,1 \text{ м}$; $L_{\text{км}} = 1 \text{ м}$; $L_{\text{д}} = 5 \text{ м}$; $l_{\text{ну}} = 0,5 \text{ м}$; $l_{\text{ку}} = 0,8 \text{ м}$.

Теплофизические характеристики прдуктов горения принимали значения:

$$f = 1 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}; \quad c_v = 1200 \text{ Дж/кг}^\circ\text{K};$$

$$k = \frac{c_p}{c_v} = 1,25; \quad \alpha = 0,001 \text{ м}^3/\text{кг}.$$

Теплофизические параметры воздуха принимали значения, соответствующие температуре $T_{\text{н}} = 273^\circ\text{K}$: $k_{\text{в}} = 1,4$; $c_{\text{вв}} = 720 \text{ Дж/кг}^\circ\text{K}$; $R_{\text{в}} = 290 \text{ Дж/кг}^\circ\text{K}$.

Вес заряда ω задавался из условия, чтобы начальное давление в камере при любых геометрических размерах было равно

$$p_{\text{н}} = p_{\text{м}} = \frac{f\Delta}{1 - \alpha\Delta} = 25000 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Термодинамические и газодинамические решения сравнивались при $q = (45; 30; 15; 5; 2,5) \text{ кг}$ и $d_{\text{км}} = (0,1; 0,3; 0,5) \text{ м}$.

Результаты расчета ОЗВБ по термодинамической и газодинамической моделям представлены в табл. 1, где приведены значения внутрибаллистических параметров в дульный момент времени.

Таблица 1. Сравнение термодинамического и газодинамического решений ОЗВБ при различных параметрах заряжания

Параметры заряжания		Термодинамический подход			Газодинамический подход			Расхождение
q , кг	$d_{\text{км}}$, м	$v_{\text{д}}$, м/с	$(p_{\text{кн}})_{\text{д}}$, МПа	$(p_{\text{сн}})_{\text{д}}$, МПа	$v_{\text{д}}$, м/с	$(p_{\text{кн}})_{\text{д}}$, МПа	$(p_{\text{сн}})_{\text{д}}$, МПа	$\tilde{\delta}(v_{\text{д}})$, %
45	0,1	704,24	66,40	62,51	674,65	68,79	57,97	4,4
	0,3	1193,53	509,49	341,75	1040,71	605,60	229,52	14,7
	0,5	1392,15	1087,37	553,2	1162,38	1232,76	343,85	19,8
30	0,1	853,98	67,05	61,32	800,43	70,87	54,17	6,7
	0,3	1401,16	529,67	303,04	1189,44	641,67	192,27	17,8
	0,5	1597,89	1116,91	441,89	1307,19	1281,02	271,86	22,3
15	0,1	1173,77	68,75	57,92	1058,14	80,21	45,09	10,9
	0,3	1776,88	572,41	224,07	1447,17	715,65	128,03	22,8
	0,5	1934,33	1168,69	261,26	1549,58	1361,10	176,30	24,8
5	0,1	1839,36	73,99	47,40	1501,90	81,33	35,45	22,4
	0,3	2304,56	642,70	105,79	1870,95	821,53	57,65	23,2
	0,5	2329,17	1231,27	83,48	1935,43	1486,18	73,53	20,4
2,5	0,1	2306,32	79,06	37,25	1719,23	87,825	29,61	34,1
	0,3	2530,46	674,96	57,65	2111,65	897,33	43,91	19,8
	0,5	2472,53	1252,88	37,12	2160,71-	1545,41	45,97	14,4

Как следует из табл. 1, с ростом уширения камеры $S_{\text{км}}/S_{\text{кн}}$ при больших отношениях ω/q наблюдается существенное отклонение контрольных параметров. При этом термодинамический подход дает систематическое завышение дульной скорости

снаряда во всем исследованном диапазоне изменения параметров.

Расчеты показывают, что газодинамическое решение задачи существенно изменяет временные зависимости параметров выстрела (рис. 2) и распределения параметров тече-

ния по координате, что необходимо учитывать при решении сопряженных задач баллистики, например, задачи теплообмена.

При расчете баллистики с учетом противодействия показано, что расчет по формуле (5) приводит к занижению противодействия, действующего на снаряд, по сравнению с расчетами по модели (37)–(40), которое возрастает с увеличением скорости снаряда. Текущие расхождения могут достигать до 15 %

(рис. 3). Однако это оказывает незначительное влияние на контрольные интегральные параметры выстрела.

Данные, представленные в табл. 2, показывают, что аналитическая формула (5) вполне пригодна для учета противодействия в баллистических расчетах. Погрешность ее применения в исследованном диапазоне изменения параметров составила менее 0,1 % по параметру v_d .

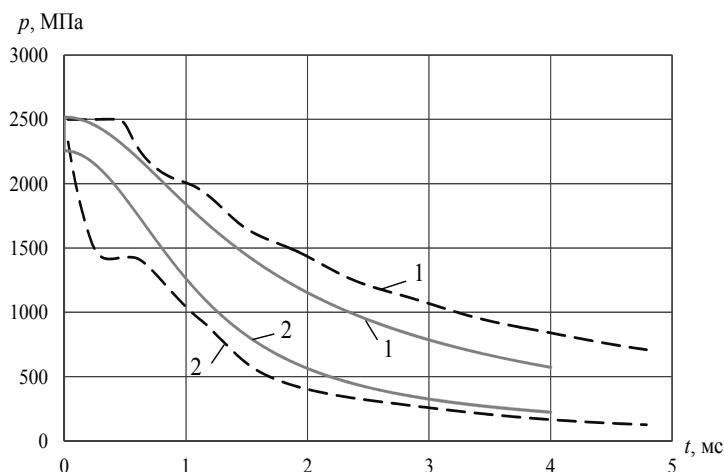


Рис. 2. Сравнение зависимостей давления на дно канала $p_{\text{кн}}$ (1) и дно снаряда $p_{\text{сн}}$ (2) от времени для различных подходов к решению задачи Лагранжа при $q = 15 \text{ кг}$, $d_{\text{км}} = 0,3 \text{ м}$: — — — расчет в термодинамической постановке; — — — — расчет в газодинамической постановке

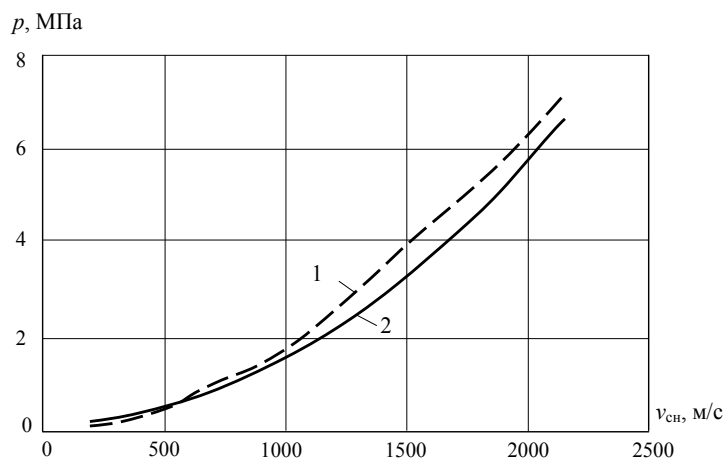


Рис. 3. Сравнение противодействий, действующих на снаряд, при $q = 2,5 \text{ кг}$, $d_{\text{км}} = 0,3 \text{ м}$: 1 — расчет; 2 — аналитическое решение

В заключение отметим, что теплофизические параметры воздуха слабо зависят от температуры в диапазоне климатических температур $T = 223 \div 323 \text{ K}$, поэтому изменение противодействия в данном диапазоне температур, согласно (5), будет определять-

ся изменением плотности воздуха, которая в этом диапазоне температур изменяется в 1,5 раза. Расчеты показали, что в данном диапазоне влияние температуры воздуха на величину v_d составляет менее 0,3 %.

Таблица 2. Влияние противодействия на параметры ОЗВБ при различных параметрах заряжания

Параметры заряжания		Условия расчета	Расчетные значения			Расхождение $\tilde{\delta}(v_d), \%$
$q, \text{ кг}$	$d_{\text{км}}, \text{ м}$		$v_d, \text{ м/с}$	$(p_{\text{кн}})_d, \text{ МПа}$	$(p_{\text{сн}})_d, \text{ МПа}$	
45	0,3	$p_{\text{пр}} = 0$	1040,71	605,60	229,52	–
		$p_{\text{пр}}$ по модели (37)–(40)	1039,83	605,43	229,94	0,08
		$p_{\text{пр}}$ по формуле (5)	1039,91	605,44	229,91	0,08
30	0,3	$p_{\text{пр}} = 0$	1189,44	641,67	192,27	–
		$p_{\text{пр}}$ по модели (37)–(40)	1188,02	641,42	192,86	0,12
		$p_{\text{пр}}$ по формуле (5)	1188,14	641,44	192,81	0,11
15	0,3	$p_{\text{пр}} = 0$	1447,17	715,65	128,03	–
		$p_{\text{пр}}$ по модели (37)–(40)	1443,97	715,12	128,99	0,22
		$p_{\text{пр}}$ по формуле (5)	1444,25	715,17	128,91	0,20
5	0,3	$p_{\text{пр}} = 0$	1870,95	821,53	57,65	–
		$p_{\text{пр}}$ по модели (37)–(40)	1859,54	819,89	59,40	0,61
		$p_{\text{пр}}$ по формуле (5)	1860,48	820,06	59,26	0,56
2,5	0,3	$p_{\text{пр}} = 0$	2111,65	897,33	43,91	–
		$p_{\text{пр}}$ по модели (37)–(40)	2090,50	894,28	46,33	1,00
		$p_{\text{пр}}$ по формуле (5)	2092,34	894,62	46,13	0,91

На основе полученных результатов можно сделать следующие выводы:

1. Термодинамический подход приводит к систематическому завышению дульной скорости снаряда во всем исследуемом диапазоне изменения параметров.

2. При малых ω/q и небольших уширениях камеры $S_{\text{км}}/S_{\text{кн}}$ погрешность термодинамического приближения составляет (5–7) %; при больших ω/q погрешность разнонаправленно зависит от уширения камеры и составляет (15–35) %.

3. Считается, что термодинамический подход с уменьшением ω/q дает лучшее приближение к газодинамическому подходу, однако, как показывают расчеты, это справедливо только при малых уширениях камеры.

4. Учет противодействия воздуха ускоренному движению снаряда в стволе приводит к снижению его дульной скорости не более чем на 1 %. При этом использование

приближенной аналитической формулы дает погрешность менее 0,1 % по сравнению с численным решением задачи.

Библиографические ссылки

1. Русяк И. Г., Липанов А. М., Ушаков В. М. Физические основы и газовая динамика горения порохов в артиллерийских системах: монография. М. ; Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2016. 456 с.
2. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. М. : Наука, 1971. 854 с.
3. Vieille P. Mémoires des poudres et salpêtres. Paris. 1890. Vol. 3, 6. Вьель М. Мемуары по порохам и селитрам. Русский перевод А.А. Нилуса // Арт. журнал. 1894. № 10–12 и 1895. № 2.
4. Серебряков М. Е. Внутренняя баллистика. М. : Оборонгиз, 1949. 670 с.
5. Соркин Р. Е. Газотермодинамика ракетных двигателей на твердом топливе. М. : Наука, 1967. 368 с.

6. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. М. : Бином. Лаборатория знаний, 2011. 640 с.

7. Численное решение многомерных задач газовой динамики / С. К. Годунов, А. В. Забродин, М. Я. Иванов и др. М. : Наука, 1976. 400 с.

8. Тенев В. А., Русак И. Г. Численное решение задачи гидродинамики и теплообмена в областях сложной формы : учеб.-метод. пособие. Ижевск, 1996.

9. Редер Т., Тенев В. А., Паклина Н. В. Исследование влияния величины начального зазора на динамику открывания предохранительного клапана // Интеллектуальные системы в производстве. 2018. Т. 16. № 2. С. 28–40. DOI 10.22213/2410-9304-2018-2-28-40.

10. Сафронов А. В., Фомин Ю. В. Метод численного решения уравнений газодинамики с помощью соотношения на разрывах // Труды МФТИ. 2010. Т. 2. № 2. С. 137–148.

11. van Albada G. D., van Leer B., Roberts W. W. Jr. A comparative study of computational methods in cosmic gas dynamics. *Astronomy and Astrophysics*, vol. 108, no. 1, Apr. 1982, p. 76-84.

12. Wesseling, Pieter, Dr. Principles of computational fluid dynamics / Pieter Wesseling. p. cm. (Springer series in computational mathematics, ISSN 0179-3632; 29) Mathematics Subject Classification (1991): 76M, 65M, XII, 644 p.

13. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы математической физики. М. : Научный мир, 2003. 316 с.

References

1. Ruyak I.G., Lipanov A.M., Ushakov V.M. *Fizicheskie osnovy i gazovaya dinamika goreniya porohov v artillerijskikh sistemah: monografiya* [Physical basis and gas dynamics of combustion of gunpowders in artillery systems]. Moscow; Izhevsk: Institute of Computer Sciences, 2016. 456 p. (in Russ.).

2. Stanyukovich K. P. *Neustanovivshiesya dvizheniya sploshnoj sredy* [Unsteady motion of a continuous medium]. Moscow: Nauka Publ., 1971. 854 p. (in Russ.).

3. Vieille P. *Mémoires des poudres et salpêtres*. Paris. 1890. Vol. 3, 6. V'el' M. *Memuary po porokham i selitram. Russkii perevod A.A. Nilusa* [Memoirs on gunpowder and saltpeter. Russian translation

A.A. Nilus]. *Art. zhurnal*. 1894. No. 10-12. 1895. No. 2.

4. Serebryakov M. E. *Vnutrennyaya ballistika* [Internal ballistics]. Moscow: Oborongiz Publ., 1949. 670 p. (in Russ.).

5. Sorokin R.E. *Gazotermodynamika raketnykh dvigatelej na tverdom toplive* [Gas thermodynamics of solid propellant rocket engines]. Moscow: Nauka Publ., 1967. 368 p. (in Russ.).

6. Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobelkov G.M. *Chislennyye metody* [Numerical methods]. Moscow: Binom. Laboratory of Knowledge, 2011. 640 p. (in Russian).

7. Godunov S.K., Zabrodin A.V., Ivanov M. YA., Kraiko A.N., Prokopov G.P. *Chislennoe reshenie mnogomernykh zadach gazovoy dinamiki* [Numerical solution of multidimensional problems of gas dynamics]. Moscow: Nauka Publ., 1976. 400 p. (in Russ.).

8. Tenenev V.A., Ruyak I.G. *Chislennoe reshenie zadachi gidrodinamiki i teploobmena v oblastyah slozhnoy formy: uchebno-metodicheskoe posobie* [Numerical solution of the problem of hydrodynamics and heat transfer in areas of complex form: a training manual]. Izhevsk, 1996. (in Russ.).

9. Reder T., Tenenev V.A., Paklina N.V. [Investigation of the influence of the initial clearance on the dynamics of the safety valve opening]. *Intellectual'nye sistemy v proizvodstve*. 2018. Vol. 16. No. 2. Pp. 28-40. DOI 10.22213 / 2410-9304-2018-2-28-40. (in Russ.).

10. Safronov A.V., Fomin Yu.V. *Metod chislennogo resheniya uravnenij gazodinamiki s pomoshch'yu sootnosheniya na razryvah* [A method for the numerical solution of gas dynamics equations using a discontinuity relation]. *Trudy MFTI* [Proceedings of MIPT]. 2010. Vol. 2. No. 2. Pp. 137-148. (in Russ.).

11. van Albada G. D., van Leer B., Roberts W. W. Jr. A comparative study of computational methods in cosmic gas dynamics. *Astronomy and Astrophysics*, vol. 108, no. 1, Apr. 1982, p. 76-84.

12. Wesseling, Pieter, Dr. Principles of computational fluid dynamics / Pieter Wesseling. p. cm. (Springer series in computational mathematics, ISSN 0179-3632; 29) Mathematics Subject Classification (1991): 76M,65M, XII, 644 p.

13. Samarskij A.A., Gulin A.V. *Chislennyye metody matematicheskoy fiziki* [Numerical methods of mathematical physics]. Moscow: Nauchnyj mir Publ., 2003. 316 p. (in Russ.).

* * *

Influence of the Bimention of the Mathematical Model of Internal Ballistics and Back Pressure on the Calculated Parameters of the Shot

I. G. Rusyak, DSc in Engineering, Professor, Kalashnikov ISTU, Izhevsk, Russia

V. A. Tenenev, DSc (Physics and Mathematics), Professor, Kalashnikov ISTU, Izhevsk, Russia

R. R. Dryakhlov, Master's degree student, Kalashnikov ISTU, Izhevsk, Russia

The paper presents the main problem of internal ballistics in averaged parameters. A distinctive feature of the given problem post-new from existing statements is the consideration of the distribution of pressure and gas velocity behind the shot for a channel of variable cross-section within the framework of the thermodynamic approach assumptions. When integrating equations in time, a two-step Runge-Kutta SEMA with the second-order of accuracy is used. The paper also presents the formulation of the RSA in the framework of a one-dimensional gas-dynamic approach. The control volume method is used for the numerical solution of a system of gas-dynamic equations. Gas parameters at the boundaries of the control volumes are determined using a self-similar solution to the problem of the decay of an arbitrary gap. A comparison of solutions obtained in the framework of thermodynamic and gas-dynamic approaches for different charging parameters in the Lagrange problem's framework is made. The effect of camera widening on the distribution of intra-ballistic parameters of the shot and counter-pressure on the dynamics of the projectile movement is studied. The backpressure as the pressure of the detached shock wave derived from the analytical solution of the problem of supersonic movement of the piston in the pipe with constant velocity is compared with the pressure acting on the shell, determined from the solution of unsteady one-dimensional gas dynamics equations.

Keywords: artillery system; the main task of internal ballistics; counter-pressure to the movement of the projectile in the barrel channel; mathematical modeling; thermodynamic approach; gas-dynamic approach; computational experiment; comparison of results.

Получено: 12.05.2020