

УДК 531.383

DOI: 10.22213/2410-9304-2020-3-20-32

Методики исследования свободного выбега стоячих волн в твердотельном волновом гироскопе

Р. И. Мингазов, аспирант, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова, Ижевск, Россия

Ф. И. Спиридонов, аспирант, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова, Ижевск, Россия

К. В. Шишаков, доктор технических наук, доцент, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова, Ижевск, Россия

Системно описаны методики исследования свободного выбега стоячих волн в резонаторах интегрирующих твердотельных гироскопов по сигналам их измерительных устройств. Для этого подробно рассмотрены процессы формирования рабочей и квадратурной стоячих волн через резонансные моды колебаний, а также раскрыта внутренняя структура измеряемых сигналов. Показаны связи стоячих волн с измерительными сигналами, что принято в качестве математической основы для идентификации медленно изменяемых характеристик волновых процессов в резонаторе.

Проанализированы четыре варианта алгоритмов измерения временного поведения медленных характеристик рабочей и квадратурной стоячих волн, в которых задача идентификации сводится к аналитическим формулам и однопараметрической оптимизации для уточнения частоты. В первом алгоритме производится обработка результатов измерений без учета квадратурной волны. Он предлагается для формирования начального приближения в задаче уточняющей многопараметрической оптимизации функционала идентификации. Во втором алгоритме обработка результатов измерений выполняется с использованием информации о фазовом сдвиге сигналов измерительного устройства. Он позволяет одновременно контролировать моменты времени прохождения стоячими волнами осей измерительного устройства по критерию увеличения фазового сдвига на $\pi/2$. Это может оказаться важным при синтезе контуров активного подавления квадратурной волны через обратную связь по сигналу фазового рассогласования измерительных сигналов. В третьем алгоритме для обработки результатов измерений предложен переход к подвижным осям стоячих волн. Его преимуществом является большая физическая наглядность результатов, а также удобство дополнительного косвенного контроля сохранности масштабирования измерительных сигналов. В четвертом алгоритме идентификации обработка результатов измерений производится с использованием численных процедур цифровой демодуляции.

Дополнительно проанализирована методика исследования свободного выбега стоячих волн с использованием стандартных процедур одновременной многопараметрической численной минимизации функционала ошибки идентификации сразу по всем пяти медленно изменяемым во времени функциям стоячих волн. Выполненные натурные исследования подтвердили ее эффективность.

Ключевые слова: твердотельный волновой гироскоп, резонансные колебания, волновая картина, идентификация, свободный выбег стоячих волн, методики, измерения.

Введение

Широкое применение волновых твердотельных гироскопов (ВТГ) в современных системах навигации привело, начиная с 80-х годов прошлого столетия, к развитию отдельного научного направления, которое в настоящее время системно рассмотрено в большом количестве монографий. Среди относительно недавних изданий можно отметить и другие [1–3].

Несмотря на определенную завершенность фундаментальной теории ВТГ, интерес исследователей, аналитиков и инженеров сместился в сторону теории погрешностей [4–9 и др.] с выходом на технологические операции повышения точности ВТГ [10–11 и др.]. При этом отдельно выделилась задача идентификации параметров ВТГ [12–14 и др.], необходимая для

технологических операций контроля при его изготовлении.

На практике разные производители обычно развивают и используют свои методики проведения такого контроля, адаптированные под специфику технологий и организации собственного производства. При составлении этих методик широко используются перечисленные ранее опубликованные теоретические исследования.

При производстве гироскопов в их маркировке встречаются два варианта аббревиатуры: ВТГ и ТВГ (твердотельный волновой гироскоп). Так как данная статья ориентирована на производство гироскопов с аббревиатурой ТВГ, поэтому в дальнейшем везде будем использовать это сокращение.

В настоящее время производственный цикл изготовления интегрирующих ТВГ (работающих в режиме датчика угла) включает множество технологических операций, в том числе операции контроля балансировки, разностотности, разнородности, калибровки и другие. Эти операции контроля важнейших параметров, влияющих на точностные характеристики выходных сигналов ТВГ, выполняются через измерение динамических характеристик стоячих волн резонатора. Так как эти характеристики оказываются наиболее сильно связанными с механическими параметрами резонатора в режиме его свободных колебаний (режим свободного выбега стоячих волн после отключения системы их активной параметрической подкачки), поэтому такой режим представляет наибольший интерес при настройке и контроле конкретных ТВГ. Это актуально не только для технологических процессов производства, но и для контроля эксплуатационного ухода механических параметров ТВГ (что на практике может иметь место из-за критических изменений напряженно-деформированного и теплового состояний конструкции).

Последний контроль особенно важен при длительной эксплуатации ТВГ, так как от его результатов будет зависеть правомерность применения алгоритмической опции повышения точности выходного сигнала ТВГ. На практике такую опцию вводят для алгоритмической компенсации дрейфа стоячей волны с помощью синтезированной в производственных условиях «функции антидрейфа», оптимизированной под конкретное механическое состояние ТВГ в момент его изготовления.

Заметим, что записанные в производственных условиях временные функции свободного выбега стоячих волн могут рассматриваться как индивидуальный волновой рисунок конкретного ТВГ. И поэтому они могут быть приняты также в качестве цифрового дополнения к паспорту гироскопа, позволяя отличать его от других экземпляров. В этом случае при длительной эксплуатации ТВГ рекомендуется устанавливать периодичность контроля этих функций по сигналам измерительного устройства путем включения режима самоконтроля ТВГ через наблюдение характеристик свободного выбега стоячих волн. Последующая перенастройка системы управления по результатам такого контроля здесь рассматриваться не будет, так как является отдельным направлением теоретических и практических исследований.

Целью данной статьи является разработка и анализ методик для наблюдения режима свободного выбега стоячих волн в резонаторе интегрирующего твердотельного волнового гироскопа по сигналам его измерительного устройства. При этом преимущественно будем использовать формулы и обозначения, приведенные в [15, 16]. Так как они в настоящее время являются общеизвестными, поэтому в дальнейшем отдельных ссылок на первоисточники указывать не будем.

Наблюдение за волновыми процессами в режиме свободного выбега стоячих волн (при выключенной системе параметрической подкачки упругих колебаний полусферического резонатора ТВГ)

Рабочий волновой процесс интегрирующего ТВГ формируется с использованием частотных фильтров, выделяющих собственные моды колебаний резонатора ТВГ на частотах вторых угловых гармоник. При этом деформация кромки полусферического резонатора (на которой производится измерение волновых процессов) в режиме его свободных колебаний описывается линейной суперпозицией этих двух гармоник:

$$\begin{aligned} W(\theta, t) &= p(t) \cdot \cos 2(\theta - \theta_0) + \\ &+ q(t) \cdot \sin 2(\theta - \theta_0); \\ p(t) &= a_p(t) \cdot \cos[\omega_p t - \varphi_{p0}], \\ q(t) &= a_q(t) \cdot \cos[\omega_q t - \varphi_{q0}], \end{aligned} \tag{1}$$

где $\theta_0 = \text{const}$ – угол ориентации одной из резонансных мод относительно осей (x, y) измерительного устройства; $p(t), q(t)$ – резонансные переменные с очень близкими частотами $\omega_p \approx \omega_q$ (постоянными и почти совпадающими); (a_p, a_q) – их медленно изменяющиеся амплитуды в процессе затухающих свободных колебаний; $(\varphi_{p0}, \varphi_{q0})$ – остаточные близкие постоянные фазы на момент отключения системы возбуждения колебаний.

Визуализация и измерения такого колебательного процесса осуществляются в ортогональных во времени и по углу функциях, которые называют рабочей (основной) стоячей волны $A(t)$ и квадратурной стоячей волны $B(t)$:

$$\begin{aligned} W(\theta, t) &= A(t) \cdot \cos 2(\theta - \theta_A(t)) + \\ &+ B(t) \cdot \sin 2(\theta - \theta_A(t)); \\ A(t) &= a_A(t) \cdot \cos[\omega(t) \cdot t - \alpha(t)], \\ B(t) &= \pm a_B(t) \sin[\omega(t) \cdot t - \alpha(t)], \end{aligned} \tag{2}$$

где $\theta_A(t)$ – изменяющееся угловое положение рабочей стоячей волны A в системе координат измерительного устройства; $\alpha(t)$ – медленно изменяемая фаза стоячих волн.

Частоты $\omega(t)$ этих стоячих волн (A, B) совпадают и располагаются между близкими постоянными резонансными частотами (ω_p, ω_q), в зависимости от приближения угла θ_A к соответствующей оси жесткости (характеризуются углом θ_0). В тех случаях, когда в расчетах желательнее исключить изменчивость частоты ω во времени, можно также условно ввести среднюю частоту $\omega_0 = (\omega_p + \omega_q)/2 = \text{const}$, вводя дополнительную изменчивость фазы:

$$A = a_A \cos[\omega_0 t - \alpha'], \quad B = \pm a_B \sin[\omega_0 t - \alpha(t)],$$

$$\alpha'(t) = \alpha(t) + [\omega_0 - \omega(t)] \cdot t. \quad (3)$$

При работающей системе активного возбуждения колебаний резонатора и в какое-то время после ее отключения близость резонансных частот (ω_p, ω_q) и фаз (φ_p, φ_q) будет обеспечивать сильно выраженную по амплитуде волну $A(t)$ и почти незаметную по амплитуде волну $B(t)$. Однако на длительных интервалах времени свободных колебаний разнофазность мод будет накапливаться, приводя к возрастанию амплитуды квадратурной волны.

Наблюдение такого волнового процесса (2) выполняется в проекциях на оси (x, y) измерительного устройства. В результате формируются два ортогональных по второй угловой гармонике измерительных сигнала $S_C(t)$ и $S_D(t)$ с частотой $\omega(t)$ и с шумами измерений ε_C и ε_D :

$$S_C(t) = C(t) + \varepsilon_C, \quad S_D(t) = D(t) + \varepsilon_D,$$

$$W(\theta, t) = C(t) \cdot \cos 2\theta + D(t) \cdot \sin 2\theta;$$

$$C(t) = a_C(t) \cdot \cos[\omega(t) \cdot t - \varphi_C(t)],$$

$$D(t) = a_D(t) \cdot \cos[\omega(t) \cdot t - \varphi_D(t)], \quad (4)$$

где $a_C(t)$, $a_D(t)$ и $\varphi_C(t)$, $\varphi_D(t)$ – соответственно медленно изменяющиеся амплитуды и фазы непосредственно измеряемых сигналов.

Свойства волновых процессов в резонаторе ТВГ изучают через восстановление волновой картины (2), так как стоячие рабочая и квадратурная волны (A, B) ортогональны по времени (что удобно для демодуляции) и наиболее сильно отличаются по амплитуде. Их связь с измеряемыми проекциями (C, D) находится из сравнения (2) и (4):

$$C(t) \cos 2\theta + D(t) \sin 2\theta =$$

$$= A(t) \cos 2(\theta - \theta_A) + B(t) \sin 2(\theta - \theta_A) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C(t) = A(t) \cos 2\theta_A(t) - B(t) \sin 2\theta_A(t), \quad (5)$$

$$D(t) = A(t) \sin 2\theta_A(t) + B(t) \cos 2\theta_A(t);$$

$$C^2 + D^2 = A^2 + B^2;$$

или в развернутом виде:

$$C(t) = a_C \cos \tau_C =$$

$$= a_A \cos \tau \cos 2\theta_A - \tilde{a}_B \sin \tau \sin 2\theta_A, \quad (6)$$

$$D(t) = a_D \cos \tau_D =$$

$$= a_A \cos \tau \sin 2\theta_A + \tilde{a}_B \sin \tau \cos 2\theta_A;$$

где обозначены: $\tau \equiv \omega t - \alpha$, $\tau_C \equiv \omega t - \varphi_C$, $\tau_D \equiv \omega t - \varphi_D$; $\tilde{a}_B(t) := \pm a_B(t)$, считается, что знак у амплитуды квадратурной волны может быть как положительным, так и отрицательным (в последнем случае для перехода к положительной амплитуде потребуется к фазе волны B добавить величину π).

При наблюдении за волновыми процессами в осях (x, y) емкостного измерительного устройства получившаяся четко определенная структура связи (6) стоячих волн с измеряемыми сигналами является основой в формулировке задачи идентификации медленно изменяющихся во времени функций $\{a_A, a_B, \theta_A, \alpha, \omega\}$ по измеряемым в режиме «свободного выбега» более высокочастотным сигналам $S_C(t)$, $S_D(t)$.

В математической постановке такая задача идентификации сводится с учетом (6) к минимизации функционала ошибки по ансамблю измерений:

$$J = \langle \{[S_C(t) - C(t)]^2 + [S_D(t) - D(t)]^2\} \rangle \Rightarrow \min, \quad (7)$$

где (и везде в дальнейшем) усреднение во времени для краткости обозначено:

$$\langle f \rangle = (1/T) \int_0^T f(t) dt \approx \sum_i^n f/n,$$

причем ограниченный интервал усреднения T выбирается из условия:

$$\langle \cos(\omega t + \alpha) \cdot \sin(\omega t + \alpha) \rangle =$$

$$= 0, \quad \langle \sin 2(\omega t + \alpha) \rangle = 0.$$

Если последнее условие не учитывать, то интервал усреднения должен быть выбран как можно более длинным. Однако в нашем случае усреднение обычно требуется выполнять на ограниченных интервалах T «быстрого времени», на которых «медленные» функции

$\{a_A, a_B, \theta_A, \alpha, \omega\}$ еще не успевают заметно измениться, а «быстрые» функции $(\sin \omega_0 t, \cos \omega_0 t; \omega_0 \equiv (\omega_p + \omega_q)/2)$ включают достаточно большое число периодов колебаний.

Поэтому для высокоточного сохранения в расчетах временной ортогональности «быстрых» гармонических функций $(\sin \omega t, \cos \omega t)$ интервал усреднения T желательно выбирать равным целому числу их полупериодов колебаний $(\omega T / \pi = \text{целое число})$. При программировании и проведении вычислений (при замене интегралов суммами) последнее требование придется дополнительно контролировать через проверку выполнимости условия: $\langle \sin 2\omega t \rangle = 0$ и соответственно подстраивать в вычислительных схемах.

Точность описываемых в следующем пункте четырех алгоритмов для идентификации медленно изменяемых характеристик $\{a_A, a_B, \theta_A, \alpha, \omega\}$ волновых процессов будет зависеть от меры выполнения данного условия. А значит, его выполнение будет считаться обязательным при проведении операций временного усреднения в (7).

Предварительно, перед формулировками таких алгоритмов идентификации, рассмотрим более глубоко свойства волновых процессов в резонаторе ТВГ. Для этого выполним ряд вспомогательных преобразований. Так, сначала перепишем (6) в обратной форме:

$$\begin{aligned} A(t) &= a_A \cos \tau = \\ &= a_C \cos \tau_C \cos 2\theta_A + a_D \cos \tau_D \sin 2\theta_A, \\ B(t) &= \tilde{a}_B \cos \tau = \\ &= -a_C \cos \tau_C \sin 2\theta_A + a_D \cos \tau_D \cos 2\theta_A. \end{aligned} \quad (8)$$

Тогда из условия временной ортогональности стоячих волн находим:

$$\begin{aligned} 0 = 4 \langle A(t) B(t) \rangle &= -(a_C^2 - a_D^2) \sin 4\theta_A + \\ &+ 2 a_C a_D \cos \Delta\varphi_{CD} \cos 4\theta_A, \end{aligned} \quad (9)$$

где учтено:

$$\begin{aligned} 2 \langle \cos^2 \tau_{C,D} \rangle &= 1; \\ 2 \langle \cos \tau_C \cos \tau_D \rangle &= \cos(\tau_C - \tau_D); \\ \Delta\varphi_{CD} &\equiv \varphi_C - \varphi_D. \end{aligned}$$

Также вычислим разности и суммы квадратов их амплитуд:

$$\begin{aligned} 2 \langle A^2(t) - B^2(t) \rangle &= a_A^2 - a_B^2 = \\ &= (a_C^2 - a_D^2) \cos 4\theta_A + \\ &+ 2 a_C a_D \cos \Delta\varphi_{CD} \sin 4\theta_A; \end{aligned} \quad (10)$$

$$2 \langle A^2(t) + B^2(t) \rangle = a_A^2 + a_B^2 = a_C^2 + a_D^2.$$

При этом условии временной ортогональности (9) будет соответствовать условию максимизации разности квадратов амплитуд стоячих волн:

$$\begin{aligned} a_A^2 - a_B^2 \rightarrow \max(\theta_A) &\Rightarrow \partial(a_A^2 - a_B^2) / \partial \theta_A \Rightarrow \\ \Rightarrow (a_C^2 - a_D^2) \sin 4\theta_A - 2 a_C a_D \cos \Delta\varphi_{CD} \cos 4\theta_A &= 0. \end{aligned}$$

Найдем еще одну полезную зависимость, возводя (9) и первое уравнение (10) в квадраты и складывая:

$$a_A \tilde{a}_B = a_D a_C \sin \Delta\varphi_{CD}, \quad (11)$$

причем здесь знак $\Delta\varphi_{CD}$ будет определять знак в $\tilde{a}_B \equiv \pm a_B$.

В случаях малой квадратурной волны $(a_B/a_A \rightarrow 0)$ из (6) приближенно имеем: $a_C \approx a_A \cos 2\theta_A$, $a_D \approx a_A \sin 2\theta_A$. А после их подстановки в (11) увидим переменность связи разнофазности $\Delta\varphi_{CD}$ от угла θ_A :

$$\sin \Delta\varphi_{CD} \approx \tilde{a}_B / [0.5 \cdot a_A \sin 4\theta_A]. \quad (12)$$

В целом, угловое положение стоячих волн θ_A в своем движении обычно характеризуется высокой фазовой синхронизацией резонансных колебаний. Это выражается в малости по амплитуде квадратурной волны a_B и, соответственно, малости измеряемой разнофазности (12): $\Delta\varphi_{CD} \rightarrow 0$.

Однако в общем случае могут встретиться следующие «особые» угловые положения:

- 1) $\theta_A = 0, \pm \pi/4, \pm \pi/2, \pm 3\pi/4, \pm \pi$;
- 2) $\theta_A = \theta_0, \theta_0 \pm \pi/4, \theta_0 \pm \pi/2, \theta_0 \pm 3\pi/4, \theta_0 \pm \pi$.

Первый случай соответствует ситуациям, когда стоячие волны совмещаются с осями измерительного устройства. При этом будет измерена временная ортогональность стоячих волн, то есть $\Delta\varphi_{CD} \rightarrow \pm \pi/2$.

Второй же случай соответствует ситуациям, когда стоячие волны совмещаются с осями жесткости резонатора ТВГ. При этом для малой квадратурной волны будет сохраняться малая разнофазность измерительных сигналов ($\Delta\varphi_{CD} \rightarrow 0$), но появившаяся независимость мод колебаний приведет к нарушению частотной синхронизации рабочей и квадратурной стоячих волн. Следовательно, их одинаковая частота ω начнет перестраиваться на отличающиеся резонансные частоты $(\omega_p \neq \omega_q)$, что од-

новременно приведет к росту разнофазности в (1). В результате, резонансные колебания создадут новые ортогональные во времени стоячие волны. А это означает, что в режиме свободных колебаний стоячие волны будут уходить из осей жесткости, долго не задерживаясь в них (по времени это будет зависеть от меры разночастотности резонансных колебаний).

Контролировать величину разнофазности измерительных сигналов можно через ее непосредственное измерение или же через численную обработку измерительных сигналов. В последнем случае с учетом (6) имеем:

$$\begin{aligned} 2 < C(t) \cdot D(t) > &= a_C a_D \cos \Delta \varphi_{CD}, \\ 2 < C(t) \cdot D(t-t_3) > &= a_C a_D \sin \Delta \varphi_{CD}, (\omega t_3 = \pi/2). \end{aligned} \quad (13)$$

Данные зависимости удобнее использовать для определения знаков ($\cos \Delta \varphi_{CD}$, $\sin \Delta \varphi_{CD}$), а саму величину разнофазности лучше вычислять независимо от произведения амплитуд ($a_C a_D$):

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \Delta \varphi_{CD} &= < C(t) \cdot D(t-t_3) > / < C(t) \cdot D(t) > \approx \\ &\approx < S_C(t) \cdot S_D(t-t_3) > / < S_C(t) \cdot S_D(t) >. \end{aligned} \quad (14)$$

И, наконец, для общего случая важно отметить некоторую периодичность характеристик волновых процессов в режиме свободных колебаний. Так, если уравнения модальных колебаний (1) записать в виде:

$$\begin{aligned} p(t) &= a_p(t) \cos[\omega_p t - \varphi_{p0}], q(t) = \\ &= a_q(t) \cos[(\omega_p t - \varphi_{p0}) + \Delta \varphi_{CD}]; \\ \Delta \varphi_{pq}(t) &= (\varphi_{p0} - \varphi_{q0}) + (\omega_p - \omega_q) \cdot t, \end{aligned}$$

то линейно изменяемый во времени фазовый сдвиг $\Delta \varphi_{pq}(t)$ приведет к периодичности в относительном изменении резонансных переменных. А это, в свою очередь, будет отражаться в такой же периодичности изменения характеристик волновых процессов.

Алгоритмы измерения временного поведения рабочей и квадратурной стоячих волн (A, B) (с контролем указанной временной ортогональности быстрых гармонических функций)

Здесь ограничимся рассмотрением наиболее простого, поинтервального решения поставленной задачи идентификации (7), что представляет собой дискретную идентификацию медленно изменяющихся функций. При этом весь временной промежуток наблюдения за волновой картиной разбивается на отдельные интервалы, на каждом из которых идентифицируемые пара-

метры считаются условно постоянными величинами. Заметим, что такая идентификация может выполняться и по скользящему расширенному окну.

При необходимости в дальнейшем на основе полученных результатов можно перейти к следующему этапу – к параметрической идентификации медленно изменяющихся функций. В этом случае сначала по результатам предыдущего этапа подбираются наиболее подходящие функционально-параметрические зависимости для таких функций $\{a_A, a_B, \theta_A, \alpha, \omega\}$, а затем их параметры идентифицируются уже на всем временном промежутке.

Для обоих подходов теоретические основы разных вариантов алгоритмов идентификации будут почти совпадать. Так как на этапе дискретной идентификации их математическое описание получается проще, ограничимся только его рассмотрением. Далее приведем несколько вариантов таких алгоритмов – по мере их усложнения и уточнения.

Алгоритм 1 – обработка результатов измерений без учета квадратурной волны. Он характеризуется пониженной точностью, так как здесь пренебрегают квадратурной волной, полагая $B=0$ в (2). Как уже отмечалось ранее, такие случаи характерны для начальных интервалов свободного выбега стоячих волн, характеризующихся относительным сохранением высокой синхронизации резонансных колебаний (когда амплитуда квадратурной волны еще остается малой: $(a_B / a_A \rightarrow 0)$). Здесь из (4)–(6) приближенно имеем:

$$\begin{aligned} C(t) &= a_C \cos[\omega t - \varphi_C] \approx A \cos 2\theta_A = \\ &= a_A \cos[\omega t - \alpha] \cos 2\theta_A, \\ D(t) &= a_D \cos[\omega t - \varphi_D] \approx A \sin 2\theta_A = \\ &= a_A \cos[\omega t - \alpha] \sin 2\theta_A; \end{aligned}$$

то есть $a_C \approx a_A \cos 2\theta_A$, $a_D \approx a_A \sin 2\theta_A$, $\varphi_C \approx \varphi_D \approx \alpha$.

Отсюда вычисляются:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\theta_A &\approx D / C \approx a_D / a_C \approx \sqrt{< S_D^2 > / < S_C^2 >}; \\ a_A &\approx \sqrt{(a_C^2 + a_D^2)} \approx \sqrt{2 < S_C^2 > + 2 < S_D^2 >}. \end{aligned} \quad (15)$$

Далее можно найти частоту ω и фазу α из решения задачи минимизации ошибки:

$$\begin{aligned} J &= < \{ [S_C(t) - a_A \cos(\omega t - \alpha) \cos 2\theta_A]^2 + \\ &+ [S_D(t) - a_A \cos(\omega t - \alpha) \sin 2\theta_A]^2 \} > \Rightarrow \\ &\Rightarrow \min(\omega, \alpha). \end{aligned} \quad (16)$$

После взятия производной от J по фазе α будем иметь:

$$\langle [S_C(t) + S_D(t)] \sin(\omega t - \alpha) \rangle \rightarrow 0. \quad (17)$$

Откуда получим с учетом разложения: $\sin(\omega t - \alpha) = \sin \omega t \cos \alpha - \cos \omega t \sin \alpha$:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha = & \langle [S_C(t) + S_D(t)] \cos \omega t \rangle / \\ & / \langle [S_C(t) + S_D(t)] \sin \omega t \rangle. \end{aligned} \quad (18)$$

При такой известной фазе α измеряемая частота ω может быть уточнена путем численной оптимизации (16) только по одному параметру – по ω (в простейшем варианте это может быть выполнено обычным перебором).

Рассмотренный вариант алгоритма идентификации может рассматриваться как начальное приближение для следующих, более точных нелинейных алгоритмов, а также применим для случаев очень малой квадратурной волны, сравнимой с шумами измерений.

Алгоритм 2 – обработка результатов измерений с учетом квадратурной волны через фазовый сдвиг сигналов измерительного устройства.

В нем используются ранее выписанные зависимости (8)–(11). Тогда, оценивая амплитуды и разнофазность (14) измеряемых сигналов:

$$\begin{aligned} a_C \approx \sqrt{2 \langle S_C^2 \rangle}, \quad a_D \approx \sqrt{2 \langle S_D^2 \rangle}, \\ \Delta \varphi_{CD} = \varphi_C - \varphi_D, \end{aligned} \quad (19)$$

из (9), (13) находим более точно по сравнению с (15) значение угла θ_A :

$$\begin{aligned} E^2 \equiv (a_A + \tilde{a}_B)^2 &= a_C^2 + a_D^2 + 2a_D a_C \sin \Delta \varphi_{CD} \approx 2 [\langle S_C^2 \rangle + \langle S_D^2 \rangle] + 4 \langle S_C(t) \cdot S_D(t - t_3) \rangle, (\omega t_3 = \pi / 2); \\ F^2 \equiv (a_A - \tilde{a}_B)^2 &= a_C^2 + a_D^2 - 2a_D a_C \sin \Delta \varphi_{CD} \approx 2 [\langle S_C^2 \rangle + \langle S_D^2 \rangle] - 4 \langle S_C(t) \cdot S_D(t - t_3) \rangle \Rightarrow \\ a_A &= (E + F) / 2, \quad \tilde{a}_B = (E - F) / 2. \end{aligned} \quad (23)$$

Заметим, что в случаях малых амплитуд квадратурной волны ($a_B / a_A \rightarrow 0$) можно также использовать приближенный расчет на основе (10), (11):

$$\begin{aligned} a_A &\approx \sqrt{a_C^2 + a_D^2} \approx \\ &\approx \sqrt{2 \langle S_C^2 \rangle + 2 \langle S_D^2 \rangle}; \\ \tilde{a}_B &= a_D a_C \sin \Delta \varphi_{CD} / a_A \approx \\ &\approx 2 \langle S_C(t) \cdot S_D(t - t_3) \rangle / a_A. \end{aligned} \quad (24)$$

Для нахождения фазы α и уточнения измеряемой частоты ω можно использовать подход, аналогичный (16)–(18). В соответствии с (6) и (7) имеем:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 4\theta_A &= 2 a_C a_D \cos \Delta \varphi_{CD} / (a_C^2 - a_D^2) \approx \\ &\approx 4 \langle S_C \cdot S_D \rangle / [\langle S_C^2 \rangle - \langle S_D^2 \rangle]. \end{aligned} \quad (20)$$

При этом для уточнения четверти нахождения угла θ_A потребуются знаки $\sin 4\theta_A$, $\cos 4\theta_A$, которые можно оценить из преобразований:

$$\begin{aligned} (10) \cdot \cos 4\theta_A - (9) \cdot \sin 4\theta_A &\Rightarrow \\ \Rightarrow a_C^2 - a_D^2 &= (a_A^2 - a_B^2) \cos 4\theta_A; \\ (10) \cdot \sin 4\theta_A + (9) \cdot \cos 4\theta_A &\Rightarrow \\ \Rightarrow 2a_D a_C \cos(\varphi_C - \varphi_D) &= (a_A^2 - a_B^2) \sin 4\theta_A. \end{aligned} \quad (21)$$

Далее, при известном угле θ_A нетрудно вычислить квадраты амплитуд стоячих волн. Так, складывая и вычитая (10), найдем:

$$\begin{aligned} a_A^2 &= a_C^2 \cos^2 2\theta_A + a_D^2 \sin^2 2\theta_A + \\ &+ a_C a_D \cos \Delta \varphi_{CD} \sin 4\theta_A, \\ a_B^2 &= a_C^2 \sin^2 2\theta_A + a_D^2 \cos^2 2\theta_A - \\ &- a_C a_D \cos \Delta \varphi_{CD} \sin 4\theta_A. \end{aligned} \quad (22)$$

Таким образом, здесь сначала по формуле (20) с учетом знаков (21) находится угол θ_A , а потом по формулам (22) можно вычислить амплитуды стоячих волн.

Однако для исключения зависимости расчета амплитуд стоячих волн от ошибок вычисления угла θ_A лучше с учетом (10), (11) и (13) вычислять:

$$\begin{aligned} J = & \langle \{ [S_C(t) - \\ & - (a_A \cos \tau \cos 2\theta_A - \tilde{a}_B \sin \tau \sin 2\theta_A)]^2 + [S_D(t) - \\ & - (a_A \cos \tau \sin 2\theta_A + \tilde{a}_B \sin \tau \cos 2\theta_A)]^2 \} \rangle \Rightarrow \\ & \Rightarrow \min(\omega, \alpha), \end{aligned} \quad (25)$$

Видно, что после взятия производной от J по фазе α ($\tau \equiv \omega t - \alpha$) будем иметь прежние зависимости (17) и (18) для нахождения α . После этого можно уточнить частоту ω путем численной оптимизации (25) только по одному параметру – по ω (например, методом градиентного перебора).

Таким образом, данный алгоритм ориентирован на проведение расчетов с дополнительным

наблюдением за фазовым рассогласованием измерительных сигналов ($S_C(t), S_D(t)$), что позволяет одновременно контролировать моменты времени прохождения стоячими волнами осей измерительного устройства по критерию:

$$\Delta\varphi_{CD} \rightarrow \pm\pi/2 \Leftrightarrow \langle S_C(t) \cdot S_D(t) \rangle \rightarrow 0.$$

Это может оказаться важным для алгоритмов активного подавления квадратурной волны, синтез которых выполняется через организацию обратной связи по сигналу фазового рассогласования $\Delta\varphi_{CD}$ измерительных сигналов в соответствии с ранее приведенной зависимостью (11).

Алгоритм 3 – обработка результатов измерений с переходом к подвижным осям стоячих волн (A, B).

В нем сначала требуется рассчитать угол θ_A по формуле (20) (или по приближенной формуле (15)). Далее, уже при известном θ_A , виртуально строится следящая за рабочей стоячей волной A система координат. В ней по аналогии с (5), (8) условно измеряемыми сигналами будут:

$$a_A \approx \sqrt{2 \langle S_A^2 \rangle}, \quad a_B \approx \sqrt{2 \langle S_B^2 \rangle}; \quad J_{A,B} = \langle [S_{A,B} - a_{A,B} \cos(\omega_{A,B}t - \varphi_{A,B})]^2 \rangle \Rightarrow \min(\omega_{A,B}, \varphi_{A,B}) \Rightarrow \langle S_{A,B}(t) \sin(\omega_{A,B}t - \varphi_{A,B}) \rangle \rightarrow 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi_{A,B} = \langle S_{A,B}(t) \cos \omega_{A,B}t \rangle / \langle S_{A,B}(t) \sin \omega_{A,B}t \rangle. \quad (28)$$

Если в расчетах частоты ω_A и ω_B получатся отличающимися, тогда лучше частоту $\omega = \omega_A = \omega_B$ выбирать из минимизации общего критерия:

$$J = \langle \{ [S_A - a_A \cos(\omega t - \varphi_A)]^2 + [S_B - a_B \cos(\omega t - \varphi_B)]^2 \} \rangle. \quad (29)$$

Преимуществом такого алгоритма является большая физическая наглядность промежуточных и итоговых результатов. Его основной недостаток – это необходимость автономного нахождения угла θ_A стоячей волны.

В то же время правильность нахождения θ_A здесь удобно дополнительно контролировать через проверку условия ортогональности во времени стоячих волн:

$$\langle S_A(t) S_B(t) \rangle = 0 \text{ или}$$

$$\langle S_A^2(t) \rangle - \langle S_B^2(t) \rangle \rightarrow \max(\theta_A),$$

которая проводится расчетами (26) для близлежащих к θ_A углов:

$$\begin{aligned} S_A &= S_C \cos 2\theta_A + S_D \sin 2\theta_A = \\ &= A(t) + \varepsilon_A(t); \\ S_B &= -S_C \sin 2\theta_A + S_D \cos 2\theta_A = \\ &= B(t) + \varepsilon_B(t), \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_A &= \varepsilon_C \cos 2\theta_A + \varepsilon_D \sin 2\theta_A; \\ \varepsilon_B &= -\varepsilon_C \sin 2\theta_A + \varepsilon_D \cos 2\theta_A. \end{aligned}$$

Далее из таких рассчитанных сигналов S_A и S_B можно выделить их амплитуды, частоту, фазы:

$$\begin{aligned} A(t) &= a_A(t) \cos[\omega(t) \cdot t - \varphi_A(t)] = \\ &= a_A \cos \tau, \\ B(t) &= a_B(t) \cos[\omega(t) \cdot t - \varphi_B(t)] = \\ &= a_B \sin(\tau + \Delta\alpha), \end{aligned} \quad (27)$$

где $\varphi_A(t) = \alpha(t)$, $\varphi_B(t) \approx \alpha(t) \pm \pi/2$, $\tau \equiv \omega t - \alpha$, $\Delta\alpha \rightarrow 0$.

Так, для основной и квадратурной стоячих волны имеем:

$$\begin{aligned} 2 \langle S_A(t) S_B(t) \rangle &= [\langle S_D^2 \rangle - \langle S_C^2 \rangle] \sin 4\theta_A + \\ &+ 2 \langle S_C \cdot S_D \rangle \cos 4\theta_A \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Проверка этих свойств также будет полезна и для дополнительного контроля правильности масштабирования коэффициентов усиления при формировании сигналов (4), когда вместо них фактически будем иметь:

$$\begin{aligned} S_C(t) &= C(t) + \varepsilon_C, \\ S_D(t) &= D(t) / \kappa + \varepsilon_D, \end{aligned}$$

где коэффициент масштабирования по каналу C условно принят равным единице, а по каналу D – отличающимся на коэффициент κ , близкий к единице.

Так, например, если в процессе продолжительной эксплуатации ТВГ начнет нарушаться условие (30) и не получается его восстановить ни при каких других значениях угла θ_A в расчетах, то это будет указывать, в том числе, на возможное нарушения масштабированности измерительных сигналов.

Заметим, что более точный метод выявления и последующей корректировки размасштабиро-

ванности основывается на использовании дополнительной технологической операции медленного вращения ТВГ вокруг своей оси, когда роли измерительных каналов (C, D) будут чередоваться.

Таким образом, рассмотренный алгоритм позволяет расширить перечень наблюдаемых параметров волновых процессов, дополняя их косвенным контролем сохранности масштабирования измерительных сигналов.

Алгоритм 4 – обработка результатов измерений с использованием цифровой демодуляции. Здесь для выполнения цифровой демодуляции умножим измерительные сигналы на гармонические сигналы с некоторой выбранной начальной фазой $\varphi_0 = \text{const}$ (обычно это $\varphi_0 = 0$, но может быть $\varphi_0 = \alpha(t_0)$ или выбраны другие значения):

$$\begin{aligned} \cos(\omega t - \varphi_0) &= \cos(\tau + \Phi), \\ \sin(\omega t - \varphi_0) &= \sin(\tau + \Phi), \quad \Phi \equiv \alpha - \varphi_0, \end{aligned}$$

и выполним усреднение по времени в виде (8) с учетом отмеченной специфики разделения быстрых и медленных переменных.

Для дальнейших выкладок воспользуемся представлением измеряемых сигналов в виде (4), (6):

$$\begin{aligned} S_C(t) &= a_A \cos \tau \cos 2\theta_A - \tilde{a}_B \sin \tau \sin 2\theta_A + \varepsilon_C, \\ S_D(t) &= a_A \cos \tau \sin 2\theta_A + \tilde{a}_B \sin \tau \cos 2\theta_A + \varepsilon_D, \\ (\tau &\equiv \omega t - \alpha). \end{aligned}$$

Тогда их демодулированные компоненты будут иметь следующую внутреннюю структуру:

$$\begin{aligned} C_x &= 2 \langle S_C(\tau) \cos(\tau + \Phi) \rangle = \\ &= a_A \cos 2\theta_A \cos \Phi + \tilde{a}_B \sin 2\theta_A \sin \Phi; \\ C_y &= 2 \langle S_D(\tau) \cos(\tau + \Phi) \rangle = \\ &= a_A \sin 2\theta_A \cos \Phi - \tilde{a}_B \cos 2\theta_A \sin \Phi; \\ S_x &= 2 \langle S_C(\tau) \sin(\tau + \Phi) \rangle = \\ &= a_A \cos 2\theta_A \sin \Phi - \tilde{a}_B \sin 2\theta_A \cos \Phi; \\ S_y &= 2 \langle S_D(\tau) \sin(\tau + \Phi) \rangle = \\ &= a_A \sin 2\theta_A \sin \Phi + \tilde{a}_B \cos 2\theta_A \cos \Phi. \end{aligned} \quad (31)$$

И из них сформируем следующие вспомогательные комбинации:

$$\begin{aligned} E &\equiv S_x^2 + C_x^2 + S_y^2 + C_y^2 = a_A^2 + a_B^2; \\ Q &\equiv 2(S_y C_x - S_x C_y) = 2 a_A \tilde{a}_B; \\ R &\equiv S_x^2 + C_x^2 - S_y^2 - C_y^2 = (a_A^2 - a_B^2) \cos 4\theta_A; \end{aligned}$$

$$S \equiv 2(S_x S_y + C_x C_y) = (a_A^2 - a_B^2) \sin 4\theta_A;$$

$$L \equiv 2(S_x C_x + S_y C_y) = (a_A^2 - a_B^2) \sin 2\Phi.$$

Отсюда сразу находятся угол θ_A , фаза α и амплитуды стоячих волн:

$$\begin{aligned} \text{tg } 4\theta_A &= S / R; \quad a_A^2 - a_B^2 = \text{sqrt}(S^2 + R^2); \\ \sin 4\theta_A &= S / (a_A^2 - a_B^2), \\ \cos 4\theta_A &= R / (a_A^2 - a_B^2); \\ \sin 2\Phi &= L / (a_A^2 - a_B^2) \Rightarrow \alpha = \Phi + \varphi_0. \end{aligned} \quad (32)$$

$$a_A + \tilde{a}_B = \text{sqrt}(E + Q), \quad a_A - \tilde{a}_B = \text{sqrt}(E - Q),$$

где знак \tilde{a}_B выбирается с учетом зависимости: $Q \equiv 2a_A \tilde{a}_B$.

Для уточнения измеряемой частоты ω можно, как и ранее, использовать минимизацию функционала (25).

Заметим, что данный алгоритм фактически является решением задачи минимизации функционала (7), в котором медленные и быстрые переменные в измерительных сигналах предварительно разделены следующим образом:

$$\begin{aligned} C(t) &= C_x \cdot \cos(\tau + \Phi) + S_x \cdot \sin(\tau + \Phi), \\ D(t) &= C_y \cdot \cos(\tau + \Phi) + S_y \cdot \sin(\tau + \Phi); \\ \tau + \Phi &= \omega t - \varphi_0; \quad \Phi \equiv \alpha - \varphi_0. \end{aligned} \quad (33)$$

Тогда после взятия частных производных от функционала (7) по условно постоянным параметрам C_x, C_y, S_x, S_y с учетом представлений (33) получим прежние зависимости (31). Легко показать, что при правильном выборе частоты демодуляции будет иметь место $\partial J / \partial \omega = 0$, то есть будет одновременно выполняться и минимизация функционала (7) по частоте. Если же это условие нарушается, значит, в (31) выбрана неверная частота $\omega' \neq \omega$.

Таким образом, рассмотренные четыре алгоритма идентификации медленно изменяемых характеристик $\{a_A, a_B, \theta_A, \alpha, \omega\}$ волновых процессов позволяют аналитически рассчитать параметры $\{a_A, a_B, \theta_A, \alpha\}$ при известной частоте ω . При этом точность расчетов будет зависеть от точности правильного выбора времени усреднения T , что, в свою очередь, требует введения в расчетные схемы дополнительного контроля и подстройки интервала усреднения T из условия: $\langle \sin 2\omega t \rangle \approx 0$. Не менее важно правильно выбрать в расчетах частоту ω , что сводится к решению задачи однопараметрической оптимизации функционала (7) только по ω .

Альтернативным подходом является проведение одновременной многопараметрической численной минимизации функционала ошибки (7), (25) сразу по всем пяти медленно изменяемым во времени функциям $\{a_A, a_B, \theta_A, a, \omega\}$, что в настоящее время несложно выполнить стандартными численными подпрограммами. Такой подход, во-первых, не накладывает ограничения на выбор величины интервала усреднения T . Во-вторых, он позволит решать задачу идентификации даже для малых интервалов T , соизмеримых с одним периодом колебаний по частоте ω .

Конечно, и предыдущие четыре алгоритма могут быть расширены на класс задач с произвольным выбором интервала усреднения T . Однако в этом случае придется в алгоритмах учитывать остаточные ошибки временной ортогонализации периодических функций, что сильно повысит громоздкость алгоритмов.

Поэтому в следующем пункте для задач с произвольным выбором T рассмотрим матема-

$$F(a_A, a_B, \theta_A, \alpha, \omega) = (1/n) \sum_{i=1}^n \{ [S_C - (a_A \cos \tau \cos 2\theta_A - \tilde{a}_B \sin \tau \sin 2\theta_A)]^2 + [S_D - (a_A \cos \tau \sin 2\theta_A - \tilde{a}_B \sin \tau \cos 2\theta_A)]^2 \},$$

где $\tau \equiv \omega t - \alpha = f \cdot i - \alpha$; суммирование выполняется по тактам АЦП.

Качественно проанализируем ее свойства и внутреннюю структуру.

Периодические зависимости внутри функции F указывают на наличие у нее множества локальных экстремумов. Чтобы их избежать, требуется правильный выбор начального приближения. В качестве такого приближения наиболее просто взять решения (15) в ранее приведенном алгоритме 1.

Кроме этого, из общего вида функции F следует, что она квадратично зависит от амплитуд (a_A, a_B) и будет выпукло зависеть от угла θ_A в малой области от его начального приближения. Поэтому F имеет достаточно сильную чувствительность к изменению $\{a_A, a_B, \theta_A\}$, чтобы обеспечить хорошую работу алгоритма численной оптимизации по этим трем параметрам. На практике обычно вполне устраивает точность их расчетов на уровне $\sim 1\%$.

Оставшиеся параметры $\{a, \omega\}$ входят в функцию F через комбинацию $\tau = \omega t - \alpha$. Поэтому погрешность $\delta\omega$ в определении частоты будет «переноситься» в погрешность восстановления фазы: $\tau = (\omega + \delta\omega)t - (\alpha + \delta\omega \cdot t)$. При оценке среднего значения частоты ω_{cp} также обычно вполне достаточно точности идентификации на

тически универсальный алгоритм многопараметрической численной оптимизации и проанализируем особенности его работы.

Применение метода сопряженного градиента для измерения временного поведения рабочей и квадратурной стоячих волн (A, B)

Расширение возможностей разделения «медленного времени» (для функций $\{a_A, a_B, \theta_A, a, \omega\}$ с характерной единицей изменения T и «быстрого времени» (для функций $\{\sin \omega t, \cos \omega t\}$) внутри интервалов T на практике может потребовать снятия ограничений на выбор T , кроме рекомендуемого условия превышения им одного периода колебаний.

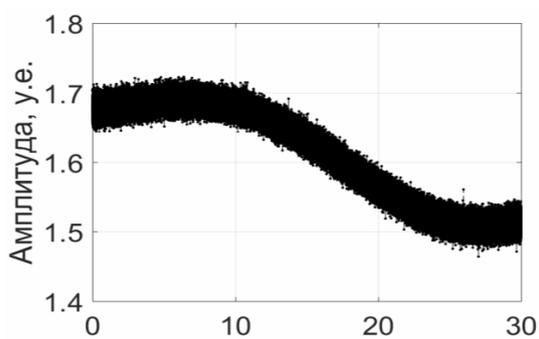
При численной реализации задача минимизации функционала ошибки (7), (25) при внутренней структуре измерительных сигналов (6) сводится к типовой задаче многопараметрической оптимизации для функции:

уровне $\sim 1\%$. Если же встает задача исследования временного изменения $\omega(t)$ между своими крайними значениями, которые равны резонансным частотам (ω_p, ω_q), то требуемая на практике точность идентификации ω возрастает до $\sim 10^{-7} \div 10^{-8}\%$ (так как разночастотность в современных конструкциях ТВГ может быть уменьшена до 10–6 Гц при средних частотах в 5 кГц). Это потребует работы с длительными интервалами усреднения и дополнительных усилий при многопараметрической численной оптимизации функции F . При этом столь высокая точность может оказаться недостижимой при значительных шумах измерений с одновременным выбором малых интервалов усреднения T .

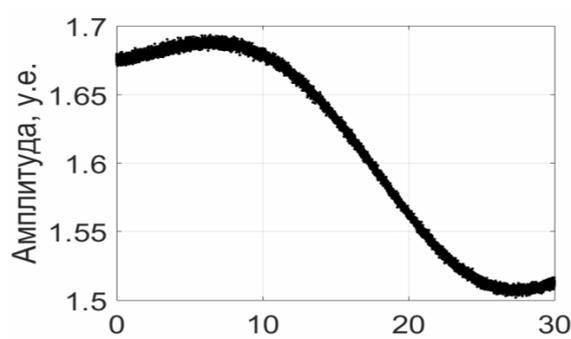
Также отметим, что использование стандартных процедур численной оптимизации функций для рассматриваемой задачи особых сложностей не представляет, так как простой плавный вид функции F позволяет легко аналитически вычислить ее первые и вторые частные производные по идентифицируемым параметрам $\{a_A, a_B, \theta_A, a, \omega\}$. Поэтому в качестве алгоритма численной оптимизации был выбран стандартный алгоритм сопряженного градиента, в котором при расчете градиентного шага применялась аналитически найденная матрица Гессе из вторых частных смешанных производных.

В качестве примера на рисунке приведены графики изменения во времени переменных $\{a_A, a_B, \theta_A\}$ и среднего значения частоты ω_{cp} ,

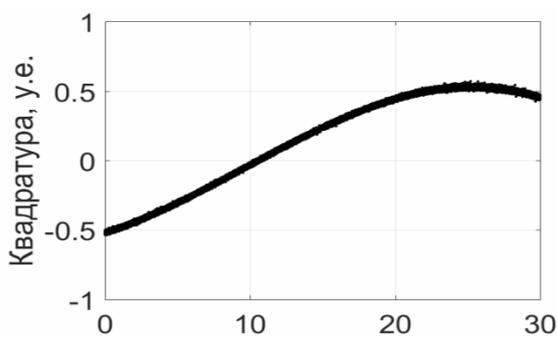
полученные при исследовании одного из технологических образцов резонатора ТВГ.



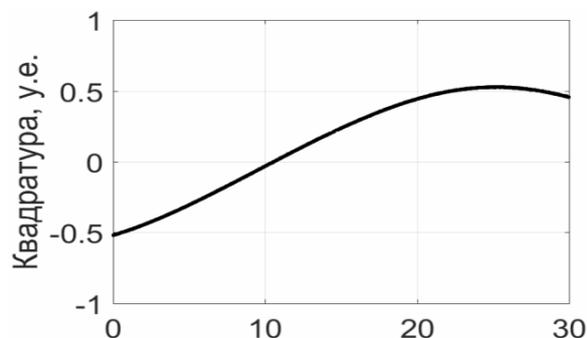
a



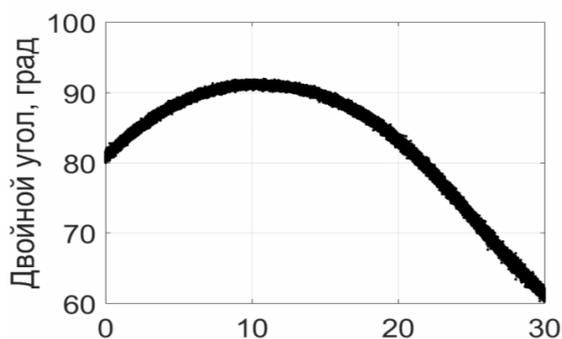
b



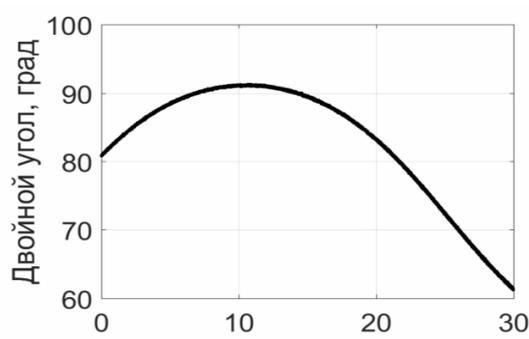
c



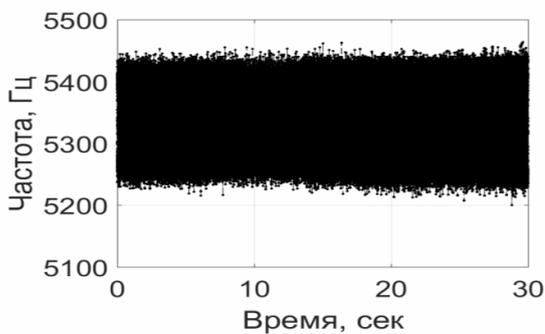
d



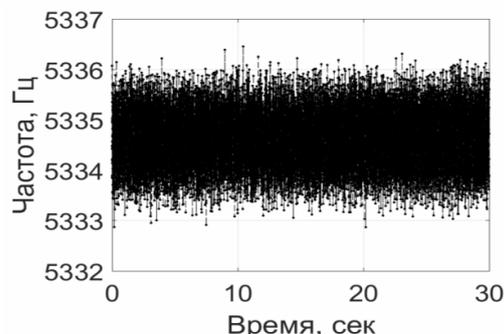
e



f



g



h

Временное поведение амплитуды aA рабочей стоячей волны (*a*, *b*), амплитуды aB квадратурной стоячей волны (*c*, *d*), угла $2\theta A$ (*e*, *f*) и средней частоты ω_{cp} (*g*, *h*) на интервале времени 28 секунд; при этом левый ряд рисунков соответствует выбору 6 точек усреднения; правый ряд – 60

Измерения проводились на резонаторе со средней частотой колебаний ≈ 5300 Гц. Частота дискретизации была выбрана 33333 Гц, то есть примерно 6 точек измерения на один период колебаний. Графики изменения «медленных» переменных строились с отсчетом угла выбега стоячей волны, начиная от первого электрода возбуждения. Ошибка аппроксимации вычислялась в виде среднеквадратического отклонения, представляющего собой квадратный корень от функции F . В задаче оптимизации функции F период усреднения T поочередно увеличивался от 1 до 10 периодов колебаний резонатора, где значениям $T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \cdot (2\pi/\omega)$ соответствовали количества точек усреднения:

$$n = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60\}.$$

Такого количества точек оказалось достаточно только для анализа поведения непосредственных характеристик $\{a_A, a_B, \theta_A\}$ волновых процессов и среднего значения частоты ω_{cp} . В то же время точность восстановления временного изменения частоты и фазы $\{\omega, \alpha\}$ оказалась хуже величины разночастотности резонансных колебаний, причем наклон временного изменения фазы $(\alpha + \delta\omega \cdot t)$ был нестабильным. В качестве примера результаты идентификации $\{a_A, a_B, \theta_A, \omega_{cp}\}$ для $n = 6$ и 60 приведены на рис. 1, в зависимости от времени. На всех графиках по горизонтали отложены интервалы времени от 1 до 30 секунд.

Таким образом, точность полученных результатов отвечает задаче идентификации временного поведения основной и квадратурной стоячих волн $\{a_A, a_B, \theta_A\}$, которое косвенно характеризует величину дрейфа выходного сигнала интегрирующего ТВГ. Для таких задач оставшиеся параметры $\{\omega, \alpha\}$ правильнее считать условно постоянными и находить их с вполне устраиваемой невысокой точностью ($\sim 1\%$).

В свою очередь, для задачи углубленного исследования влияния на волновые процессы разночастотности резонансных мод колебаний может потребоваться выявление очень слабого временного изменения функций $\{\omega, \alpha\}$ со сверхвысокими точностями (не хуже $\sim 10^{-7} \dots 10^{-8}\%$; $\alpha = \omega t - \tau$). На практике их достижение будет связано в первую очередь с увеличением числа точек усреднения (иначе шумы измерений не позволят этого достичь).

Заметим, что рассматриваемое усреднение на последовательных удлиненных временных ин-

тервалах будет приводить к замедлению временного такта идентифицируемых функций. Чтобы этого не происходило, можно попробовать применить «скользящее усреднение» – на расширенных, перекрывающихся временных интервалах. При этом точность расчета $\{\omega, \alpha\}$ должна повыситься с небольшим сглаживанием функций $\{a_A, a_B, \theta_A\}$.

Заключение

Таким образом, в статье предложено и проанализировано несколько методик для контроля динамических свойств стоячих волн в резонаторе ТВГ, характерное поведение которых может рассматриваться как основа диагностики сохранения высокой точности работы ТВГ в процессе его длительной эксплуатации. При этом приведенные методики могут входить составной частью в интеллектуальную систему сопровождения ТВГ на длительных сроках их использования. Так, они могут оказаться полезными в сопровождающих процессах непрерывного наблюдения, контроля, диагностики, а также давать рекомендации для перенастройки измерительной системы ТВГ с улучшением ее точности.

Выписанные алгоритмы могут также пригодиться для совершенствования измерительного устройства ТВГ и для активных рабочих режимов возбуждения и поддержания вынужденных колебаний его резонатора. Направленность же статьи на режим свободных колебаний резонатора объясняется двумя основными причинами. Во-первых, на результаты измерений не будут влиять контуры управления волновыми процессами ТВГ. Во-вторых, такой режим позволяет проводить диагностику на эксплуатируемых ТВГ без необходимости дополнительного использования специального лабораторного измерительного оборудования.

При этом поведение волновых процессов в резонаторе ТВГ в режиме свободных колебаний может существенно отличаться от их поведения в рабочем режиме активного поддержания основной стоячей волны. Так, если в первом случае модальные колебания резонатора происходят на своих чуть отличающихся частотах, то во втором – реализуются вынужденные синфазные колебания на частоте активного возбуждения.

Дальнейшее развитие приведенных методик в направлении измерения неравномерности распределения по углу свойств жесткости и вязкости резонатора ТВГ является темами следующих статей.

Библиографические ссылки

1. Климов Д. М., Журавлев В. Ф., Жбанов Ю. К. Кварцевый полусферический резонатор (Волновой твердотельный гироскоп). М. : Ким Л.А., 2017. 194 с.
2. Лунин Б. С., Матвеев В. А., Басараб М. А. Волновой твердотельный гироскоп. Теория и технология. М. : Радиотехника, 2014. 176 с.
3. Меркурьев И. В., Подалков В. В. Динамика микромеханического и волнового твердотельного гироскопа. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2009. 228 с.
4. Журавлев В. Ф. Задача идентификации погрешностей обобщенного маятника Фуко // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 5. С. 5–9.
5. Жбанов Ю. К., Каленова Н. В. Поверхностный дисбаланс волнового твердотельного гироскопа // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2001. № 3. С. 11–18.
6. Журавлев В. Ф. Дрейф несовершенного ВТГ // Изв. РАН. МТТ. 2004. № 4. С. 19–23.
7. Козубняк С. А. Расщепление собственных частот колебаний цилиндрического резонатора волнового твердотельного гироскопа, вызванное возмущением формы // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Серия «Приборостроение». 2015. № 3. С. 39–49.
8. Серёгин С. В. Влияние асимметричных начальных несовершенств формы на свободные колебания тонких оболочек // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2016. Т. 15. № 3. С. 209–222.
9. Серёгин С. В. О возможности возникновения радиальных форм колебаний кольцевых элементов // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2018. Т. 4. № 1. С. 132–143.
10. Статическая балансировка цилиндрических резонаторов волновых твердотельных гироскопов / М. А. Басараб, Б. С. Лунин, В. А. Матвеев, Е. А. Чуманкин // Гироскопия и навигация. 2014. Т. 85. № 2. С. 43–51.
11. Басараб М. А., Матвеев В. А., Лунин В. С. Аппроксимация распределения плотности резонатора волнового твердотельного гироскопа по измеренным параметрам дебаланса // Приборы и системы: управление, контроль, диагностика. 2015. № 10. С. 9–16.
12. Гавриленко А. Б., Меркурьев И. В., Подалков В. В. Экспериментальные методы определения параметров вязкоупругой анизотропии резонатора волнового твердотельного гироскопа // Вестник МЭИ. 2010. № 5. С. 13–19.
13. Маслов А. А., Маслов Д. А., Меркурьев И. В. Идентификация параметров волнового твердотельного гироскопа с учетом нелинейности колебаний резонатора // Приборы и системы: управление, контроль, диагностика. 2014. № 5. С. 18–23.
14. Маслов Д. А. Идентификация параметров гироскопа с цилиндрическим резонатором при учете влияния нелинейности на амплитуду возбуждающего воздействия // Машиностроение и инженерное образование. 2017. № 1 (50). С. 24–31.
15. Шишаков К. В. Повышение помехоустойчивости алгоритма обработки измерительных сигналов твердотельного волнового гироскопа // Вестник ИжГТУ имени М. Т. Калашникова. 2012. № 1. С. 76–79.
16. Шишаков К. В. Твердотельные волновые гироскопы: волновые процессы, управление, системная интеграция. Ижевск : Изд-во ИжГТУ, 2018. 264 с.

References

1. Klimov D.M., Juravlev V.F., Jbanov Y.K. *Kvartsevyyi polusfericheskiy resonator (Volnovoi tverdotel'nyi giroskop)* [Quartz hemispherical resonator (Hemispherical resonator gyroscope)]. Moscow: FGBUN IPMehim. A. Y. Ishlinskogo. 2017. (in Russ.).
2. Lunin B.S., Matveev V.A., Basarab M.A. *Volnovoij tverdotel'nyj giroskop. Teorija i tehnologii* [Hemispherical resonator gyro. Theory and technology]. Moscow: Radiotekhnika Publ. 2014. (in Russ.).
3. Merkur'ev I.V., Podalkov V.V. *Dinamika mikro-mehaničeskogo i volnovogo tverdotel'nogo giroskopa* [Dynamics of micromechanical and hemispherical resonator gyro]. Moscow: FIZMATLIT Publ. 2009 (in Russ.).
4. Zhuravlev V.F. [The problem of identification of errors of the generalized Foucault pendulum], *Izv. RAN. MTT*. 2000, no. 5, pp. 5-9 (in Russ.).
5. Zhbanov Ju.K., Kalenova N.V. [Surface imbalance of a wave solid-state gyroscope]. *Izv. RAN. MTT*. 2001, no. 3, pp. 11-18 (in Russ.).
6. Zhuravlev V.F. [Drift of imperfect HTG], *Izv. RAN. MTT*. 2004, no. 4, pp. 19-23 (in Russ.).
7. Kozubnjak S.A. [Herald of the baumanmoscow state technical university. Series instrument engineering], *Vestnik MGTU im. N.Je. Baumana. Serija Priborostroenie*. 2015, no. 3, pp. 39-49 (in Russ.).
8. Seregin S.V. [Influence of asymmetric initial shape imperfections on free vibrations of thin shells] *Vestnik Samarskogo universiteta. Ajerokosmicheseskaja tehnika, tehnologii imashinostroenie* [Vestnik of Samara University. Aerospace and Mechanical Engineering]. 2016. Vol. 15, no. 3, pp. 209-222 (in Russ.).
9. Seregin S.V. [On the possibility of radial vibration modes of ring elements]. *Vestnik Tjumenskogo gosudarstvennogo universiteta. Fiziko-matematičeskoe modelirovanie. Neft', gaz, jenergetika* [Tyumen state university herald. Physical and mathematical modeling. Oil, gas, energy], 2018. Vol. 4, no. 1, pp. 132-133 (in Russ.).
10. Basarab M.A., Lunin B.S., Matveev V.A., Chumankin E.A. [Static balancing of cylindrical resonators of wave solid-state gyros]. *Giroskopija i navigacija* [Gyroscope and Navigation]. 2014, vol. 85, no. 2, pp.43-51 (in Russ.).
11. Basarab M.A., Matveev V.A., Lunin V.S. [Approximation of the density distribution of the resonator of a solid-state wave gyroscope by the measured unbalance parameters]. *Pribory i sistemy: upravlenie, kontrol', diagnostika* [Instruments and Systems: Monitoring, Control, and Diagnostics], 2015. No. 10, pp. 9-16 (in Russ.).

12. Gavrilenko A.B., Merkur'ev I.V., Podalkov V.V. [Experimental methods for determining the parameters of viscoelastic anisotropy of the resonator of a wave solid-state gyroscope]. *VestnikMJeI* [Bulletin of Moscow power engineering institute], 2010, no. 5, pp. 13-19 (in Russ.).

13. Maslov A.A., Maslov D.A., Merkur'ev I.V. [Identification of parameters of a solid-state wave gyroscope taking into account the nonlinearity of resonator oscillations]. *Priboryisistemy: upravlenie, kontrol', diagnostika* [Instruments and Systems: Monitoring, Control, and Diagnostics]. 2014. No. 5, pp. 18-23 (in Russ.).

14. Maslov D.A. [Identification of the parameters of a gyroscope with a cylindrical resonator, taking into ac-

count the effect of nonlinearity on the amplitude of the exciting action]. *Mashinostroenie i inzhenerное obrazovanie* [Mechanical engineering and engineering education]. 2017, no. 1, pp. 24-31 (in Russ.).

15. Shishakov K.V. [Improving the noise immunity of the algorithm for processing measuring signals of a solid-state wave gyroscope]. *Vestnik IzhGTU imeni M. T. Kalashnikova*. 2012. No. 1, pp. 76-79 (in Russ.).

16. Shishakov K.V. *Tverdotel'nye volnovye giroscopy: volnovyeprocessy, upravlenie, sistemnaja integracija* [Solid-state wave gyroscopes: wave processes, control, system integration]. Izhevsk: Izd-vo IzhGTU. 2018. (in Russ.).

Research Methods of Coasting Standing Waves in a Solid Wave Gyroscope

R.I. Mingazov, Post-graduate, Kalashnikov ISTU, Izhevsk, Russia

F.I. Spiridonov, Post-graduate, Kalashnikov ISTU, Izhevsk, Russia

K.V. Shishakov, DSc in Engineering, Associate Professor, Kalashnikov ISTU, Izhevsk, Russia

The methods for researching the standing wave coasting in resonators of integrating solid-state gyroscopes using the signals of their measuring devices are systematically described. For this, the processes of the formation of the working and quadrature standing waves through resonance modes of vibration are examined in detail. The internal structure of the measured signals is also disclosed. The relationships of standing waves with measuring signals are shown, which is accepted as a mathematical basis for identifying slowly changing characteristics of wave processes in a resonator.

Four variants of the algorithm for measuring the temporal characteristics of the working and square standing waves are analyzed, in which the problem is reduced to an analytical form and one-parameter methods for refining the frequency. In the first algorithm, the measurement results are processed without taking into account the quadrature wave. It is proposed for forming the initial approximation in the problem of the refinement of the multi-parameter optimization of the identification functional. In the second algorithm, the processing of measurement results is performed using information about the phase shift of the measuring device's signals. It allows us to simultaneously control the time moments of the standing waves of the axes of the measuring device according to the criterion of increasing the phase shift by $\pi/2$. It may turn out to be important in the synthesis of circuits for active suppression of a quadrature wave through feedback on the phase-mismatch signal of the measurement signals. In the third algorithm, for processing the measurement results, a transition to the moving axes of standing waves is proposed. Its advantage is the excellent physical visibility of the results, as well as the convenience of additional indirect control of the preservation of the scaling of the measuring signals. In the fourth identification algorithm, the measurement results are processed using numerical digital demodulation procedures.

Also, the methodology for researching of coasting standing waves is analyzed using standard procedures for simultaneous multi-parameter numerical minimization of the identification error functional immediately for all five standing wave functions slowly varying in time. Performed field studies have confirmed its effectiveness.

Keywords: solid-state wave gyroscope, resonance oscillation, wave pattern, identification, coasting standing wave, procedures, measurements.

Получено: 08.06.2020