

УДК 517.972(045)

DOI: 10.22213/2410-9304-2020-3-64-71

**Численно-аналитическая методика идентификации параметров жесткости пространственных конструкций на основе минимизации различия расчетных (конечноэлементных) и натуральных динамических характеристик**

П. И. Новиков, ООО «Центр СМИС «БАЗИС», Ижевск, Россия

*В статье приводится описание разработанной математически формализованной численно-аналитической методики идентификации параметров жесткости пространственных конструкций на основе минимизации расхождений расчетных и натуральных динамических характеристик. Методика позволяет решать обратные некорректные динамические задачи параметрической идентификации жесткостных характеристик пространственных конструкций на основе инструментально выявленных частот и форм собственных колебаний значимой части спектра с применением современных численных методов моделирования механических систем и процедур нелинейного программирования, реализованных в универсальных программных комплексах ANSYS Mechanical и MATLAB. Методика основана на оригинальной формулировке задачи нелинейного программирования с ограничениями в виде неравенств для расчетных частот собственных колебаний. На начальном этапе, до старта минимизации, предусмотрено выделение приоритетных компонент минимизации, что позволяет решать динамические обратные задачи в условиях «контрастного» изменения значимой части спектра икратно увеличить вычислительную эффективность процесса минимизации. Подход применим для исследования сложных расчетных схем. Методика может применяться как составная часть информационно-аналитико-математических моделей цифровых двойников (digital twins) на этапе валидации, идентификации математических моделей реальных, структурно сложных строительных объектов в составе современных систем динамического мониторинга.*

**Ключевые слова:** обратная задача, выявление повреждений, минимизация, частоты и формы собственных колебаний.

**Актуальность темы исследования**

Технически сложные и уникальные здания (сооружения), для обеспечения механической безопасности оснащенные современными системами мониторинга несущих конструкций, требуют контроля напряженно-деформированного состояния, что предписывается нормативными (Федеральный закон от 30 декабря 2009 г. № 384-ФЗ (ред. От 02 июля 2013 г.) «Технический регламент о безопасности зданий и сооружений»; ГОСТ 22.1.12–2005. Безопасность в чрезвычайных ситуациях. Структурированная система мониторинга и управления инженерными системами зданий и сооружений. Общие требования (с Изменением № 1). М.: Стандартинформ, 2011) и методическими [1] документами. Один из современных перспективных вариантов системы наблюдения за жесткостными и инерционными свойствами несущих конструкций предусматривает возможность детального исследования интегральных общесистемных частот и форм собственных колебаний, где прямая задача модального анализа механической системы является известной, а задача интерпретации наблюдаемых натуральных динамиче-

ских свойств объекта представляет обратную некорректно поставленную задачу определения коэффициентов конечномерного оператора жесткости механической системы. Подобные обратные динамические задачи параметрической идентификации, предусматривающие подтверждение параметров механической безопасности, выявление возможных дефектов, повреждений, проявлений деградации, износа и прочих особенностей, предъявляют повышенные требования и к способам мониторинга, и к методикам расчетов, возможности которых на данный момент ограничены.

**Введение**

Обратные некорректные задачи, к которым сводится большинство проблем интерпретации результатов обследований, наблюдений, задач восстановления структуры и параметров объектов, требуют особых методов решения. Как отмечалось ранее [2], для таких задач возникают проблемы существования решения, его единственности и устойчивости. Возможности методов идентификации, реализующих инструментарий решения обратных некорректных задач и функционального анализа, ограничены относительно

простыми по геометрии телами: неоднородный стержень (балка), труба, неоднородная пластина, слой и пр. [3]. В частности, такие методы позволяют для упругих и вязкоупругих, неоднородных стержней с использованием динамических свойств идентифицировать параметры материала, параметры зоны деструкции (полости, дефекты, надрезы и пр.), кинематические условия. На сегодняшний день такие методы не позволяют рассматривать сложные, неоднородные, многосвязные, многократно статически неопределимые механические системы.

С 90-х годов XX века началось становление практико-ориентированной группы методов идентификации, основанной на сопоставлении полученных численно и найденных экспериментально частот и векторов форм собственных колебаний значимой для задач идентификации жесткостных характеристик части спектра частот с последующим решением задачи минимизации целевой функции по вектору параметров системы. Методы связаны с работами зарубежных исследователей М. I. Friswell [4], J. S. Kang [5], В. Weber [6], В. Chen [7].

В России проблеме математического моделирования и применения КЭ-моделей в основе исследования и мониторинга реальных объектов строительства посвящены работы А. М. Белостоцкого [8–10], Ю. И. Кудишина, Н. К. Капустяна [11], Д. К. Каличавы [12], М. А. Коргиной [13]. На данный момент в отечественной практике получили широкое распространение «интуитивно-инженерные» подходы, предполагающие попытки интерпретации инструментальных динамических характеристик с применением параметрических КЭ-моделей. Такие подходы могут включать дополнение модели, выборочную вариацию локальных и глобальных параметров жесткости. Дальнейшим совершенствованием процедур исследования реальных объектов является разработка математически формализованных методик идентификации повреждений. Цель данной статьи – разработать и представить математически формализованную численно-аналитическую методику, позволяющую решать обратные динамические задачи параметров жесткости и учитывающую важные для практики особенности сравнения значимых динамических характеристик. К особенностям следует отнести относительно высокий реальный уровень зашумления оцифрованных натуральных данных, их ограниченный объем, критическую зависимость предложенных ранее экспериментальных методик от количества и строгой

упорядоченности собственных векторов исследуемой части спектра.

Интерес ведущих коллективов отечественного строительного сообщества к динамическим практико-ориентированным методам связан с развитием перспективного инструментального метода стоячих волн [14, 15]. Метод позволяет формулировать практически значимые обратные задачи идентификации механических свойств. Основа метода – восстановление когерентных составляющих естественных микросейсмических колебаний строительных и геологических объектов. Метод позволяет для значимого частотного диапазона детально исследовать формы собственных колебаний зданий (сооружений), в том числе уникальных высотных и большепролетных. Исследование проводится на подробной регулярной сети точек измерений с применением малокалорийной аппаратуры.

#### Основы численно-аналитической методики

Численно-аналитическая методика представляет совокупность трех блоков, кратко представленных на рис. 1.

К первому блоку относятся постановка и решение частной (частичной) проблемы собственных колебаний модели линейной механической системы без демпфирования.

$$\begin{aligned} [K][\Phi] &= [\Omega^2][M][\Phi], \\ [\Omega^2] &= \text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_m^2), \\ [\Phi] &= [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m], \quad i = 1, \dots, m, \\ \omega_i^2 &\in [\omega_{\min}^2, \omega_{\max}^2], \\ 0 &\leq \omega_{\min}^2 \leq \omega_1^2 \leq \omega_2^2 \leq \dots \leq \omega_m^2 \leq \omega_{\max}^2, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $[K], [M]$  – глобальные матрицы жесткости и масс;  $\omega_i, \phi_i$  –  $i$ -я угловая частота (рад/с) и вектор формы собственных колебаний, собственная пара;  $\lambda_i = \omega_i^2$ ,  $\lambda_i$  –  $i$ -е собственное значение;  $\omega_i = 2\pi f_i$ ,  $f_i$  –  $i$ -я частота собственных колебаний, Гц;  $[\Phi]$  – матрица векторов форм, удовлетворяющая условиям ортогональности

$$[\Phi]^T [K][\Phi] = [\Omega^2], \quad [\Phi]^T [M][\Phi] = [E].$$

Второй блок методики предусматривает формирование частот / форм собственных колебаний реального объекта  $(\hat{\omega}_j, \hat{\phi}_j)$ ,  $j = 1, \dots, \hat{m}$ , по результатам натуральных исследований механической системы с неизвестными жесткостными

$[\hat{K}]$  и инерционными  $[\hat{M}]$  характеристиками. Используя оцифрованные данные выявленных частот  $\{\hat{\omega}_1, \dots, \hat{\omega}_{\hat{m}}\}$  и соответствующие им наборы (векторы) амплитуд ускорений  $\hat{A}_j^{(a)} \in [\hat{A}_1^{(a)}, \dots, \hat{A}_{\hat{m}}^{(a)}]$  и начальных фаз  $\hat{\Psi}_j \in [\hat{\Psi}_1, \dots, \hat{\Psi}_{\hat{m}}]$ , искомый набор векторов  $\hat{\phi}_j$

составляется с учетом структуры механической системы по гармоническому закону

$$\hat{\phi}_j = \hat{A}_j^{(a)} \cos(\hat{\omega}_j t_0 + \hat{\Psi}_j) = \frac{\hat{A}_j^{(a)}}{-\hat{\omega}_j^2} \cos(\hat{\omega}_j t_0 + \hat{\Psi}_j), \quad (2)$$

где  $t_0$  – заданный момент времени, с;  $u$  – перемещение, м;  $a$  – ускорение, м/с<sup>2</sup>.

*Блок / Стадия*

1. Расчетные исследования значимой части спектра собственных частот модели механической системы

*Формулировка*

$$[K][\Phi] = [\Omega^2][M][\Phi], \quad (1)$$

$$[\Omega^2] = \text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_m^2),$$

$$[\Phi] = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m].$$

*Результат*

Параметризуемая конечноэлементная модель механической системы

2. Инструментальные исследования значимой части спектра реального объекта

$$(\hat{\omega}_j, \hat{\phi}_j), \quad j = 1, \dots, \hat{m},$$

$$\hat{\phi}_j = \hat{A}_j^{(a)} / (-\hat{\omega}_j^2) \cos(\hat{\omega}_j t_0 + \hat{\Psi}_j) \quad (2)$$

Набор частот / форм собственных колебаний значимой части спектра реального объекта

3. Исследование набора (ов) гипотез изменения жесткости. Математически формализованная процедура минимизации невязки частот / форм собственных колебаний

$$\min_{\bar{x} \in \mathbb{R}^l} f(\bar{x}) = \frac{1}{2 \left\| \left[ \hat{F} \right] \right\|_{Fr}^2} \left\| \left[ F(\bar{x}) \right] - \left[ \hat{F} \right] \right\|_{Fr}^2 \quad (3)$$

$$\text{subject to } 1 \leq x_k \leq x_{0k}, \quad k = 1, \dots, l,$$

$$\omega_j(\bar{x}) \geq \hat{\omega}_j, \quad \text{if } \hat{\omega}_j < \omega_j(\bar{x}_0), \\ j = 1, \dots, \hat{m},$$

$$\omega_j(\bar{x}) \geq \alpha \omega_j(\bar{x}_0), \quad \text{if } \hat{\omega}_j \geq \omega_j(\bar{x}_0).$$

Вектор оптимального состояния модели  $\bar{x}^* \in \mathbb{R}^l$ . Оценка достоверности полученного решения  $\Delta f = f(\bar{x}_0) - f(\bar{x}^*)$  и  $\Delta MAC = MAC(\bar{x}_0) - MAC(\bar{x}^*)$

Рис. 1. Структурная схема разработанной методики идентификации

Третий блок методики включает формулировку и решение задачи минимизации скалярной непрерывной целевой функции  $f(\bar{x})$  векторного аргумента  $\bar{x}$

$$\min_{\bar{x} \in \mathbb{R}^l} f(\bar{x}) = \frac{1}{2 \left\| \left[ \hat{F} \right] \right\|_{Fr}^2} \left\| \left[ F(\bar{x}) \right] - \left[ \hat{F} \right] \right\|_{Fr}^2, \quad (3)$$

$$\text{subject to } 1 \leq x_k \leq x_{0k}, \quad k = 1, \dots, l, \quad l < p,$$

$$\omega_j(\bar{x}) \geq \hat{\omega}_j, \quad \text{if } \hat{\omega}_j < \omega_j(\bar{x}_0), \quad j = 1, \dots, \hat{m},$$

$$\omega_j(\bar{x}) \geq \alpha \omega_j(\bar{x}_0), \quad \text{if } \hat{\omega}_j \geq \omega_j(\bar{x}_0), \quad j = 1, \dots, \hat{m},$$

$$\left[ F(\bar{x}) \right] = \sum_{i=1}^m \phi_i(\bar{x}) \phi_i(\bar{x})^T, \quad \left[ \hat{F} \right] = \sum_{j=1}^{\hat{m}} \hat{\phi}_j \hat{\phi}_j^T,$$

$$\left\| \left[ \hat{F} \right] \right\|_{Fr} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^N \hat{F}_{ij}^2},$$

где  $\bar{x}$  – вектор параметров состояния системы,  $x_k \in \bar{x}$ ,  $\bar{x} \in \mathbb{R}^l$ ;  $x_{0k}$  – априорно заданное (стартовое, проектное) значение параметра системы,  $x_{0k} \in \bar{x}_0$ ;  $\omega_i(\bar{x})$ ,  $\phi_i(\bar{x})$  – расчетная  $i$ -я круговая частота и собственный вектор КЭМ;  $l$  – количество выделенных (приоритетных) компонент минимизации,  $l < p$ ;  $F(\bar{x})$ ,  $[\hat{F}]$  – матрицы сочетания векторов форм;  $\hat{m}$  – количество пар, выявленных инструментально,  $m \geq \hat{m}$ ;  $\alpha$  – понижающий коэффициент,  $\alpha = 0,9$ ;  $\|\dots\|_{Fr}$  – матричная норма Фробениуса.

Цель минимизации – найти конфигурацию глобальной матрицы  $[K(\bar{x}^*)] \approx [\hat{K}]$ , удовлетворяющую условиям (3) с учетом выявленной по результатам динамических измерений порции  $(\hat{\omega}_j, \hat{\phi}_j)$ ,  $j = 1, \dots, \hat{m}$ , порции соответствующих собственных пар значимой части спектра

КЭМ  $(\omega_i, \phi_i), i=1, \dots, m$ , и априорных матриц  $[K_0], [M_0]$ . Инерционные характеристики предполагаются известными  $[\hat{M}] \approx [M_0]$ . Вектор параметров состояния механической системы  $\bar{x}$  реализует изменения параметров жесткости локальной области в рамках выбранного для исследования набора гипотез

$$\begin{aligned} \vec{E}_i &= \{E_1, E_2, \dots, E_k, \dots, E_p\}^T, \\ E_k &= 2,0 \cdot 10^{3k} \text{ Па}, \\ E_{0k} &= 2,0 \cdot 10^{11} \text{ Па}, \\ \bar{x}_i &= \{x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_p\}^T, \\ x_k &= \lg \frac{E_k}{E_{0k}} + x_{0k}, \quad x_{0k} = 11, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $E_k$  –  $k$ -й параметр системы, значение модуля Юнга выбранного в рамках рассматриваемой гипотезы КЭ;  $x_k$  –  $k$ -й параметр системы, показатель по основанию 10 («порядок») значения модуля Юнга выбранного КЭ. Приведенные в формулах (4) значения  $E_{0k}$  и  $x_{0k}$  характерны для стальных конструкций. Изменение жесткости  $k$ -го конструктивного элемента  $x_k \in \bar{x}$  увязано с изменением значения модуля Юнга характерного КЭ (или группы КЭ), составляющего конструкцию. Выбор конкретного КЭ зависит от специфики исследования, выполняется на этапе формирования набора гипотез изменения жесткости.

Для применения эффективных методов нелинейного программирования для решения задачи (3) требуется вычисление первых производных  $f'_{x_k}, k=1, \dots, p$  для формирования градиента целевой функции  $\nabla f(\bar{x})$  и градиента ограничений.

$$\begin{aligned} \nabla f(\bar{x}) &= \left\{ \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_k}, \dots, \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_p} \right\}, \\ f'_{x_k} &= \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_k} = \frac{1}{\|[\hat{F}]\|_{Fr}^2} \left[ \sum_{i,j=1}^n (F(\bar{x}) - \hat{F})_{ij} \left( \frac{\partial F(\bar{x})}{\partial x_k} \right)_{ij} \right], \\ \frac{\partial [F(\bar{x})]}{\partial x_k} &= \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{i=1}^m \phi_i(\bar{x}) \phi_i^T(\bar{x}) = \\ &= \sum_{i=1}^m \left[ \frac{\partial \phi_i(\bar{x})}{\partial x_k} \phi_i^T(\bar{x}) + \phi_i(\bar{x}) \frac{\partial \phi_i^T(\bar{x})}{\partial x_k} \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Существует семейство различных аналитических методов вычисления производных собственных векторов  $\phi'_{i,x_k}, i=1, \dots, m$ , для выражения (5). На практике частот используют метод Нельсона [16], модальный метод Фокса [17] и его современные модификации [18, 19]. Для вычисления  $\omega'_{i,x_k}, i=1, \dots, m$ , и формирования градиента нелинейных ограничений  $\nabla g(\bar{x})$  использована формула аналитической производной собственного значения  $\lambda_i$  по параметру системы  $x_k$

$$\begin{aligned} (\omega_i^2)'_{x_k} &= \lambda'_{i,x_k} = \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_k} = \phi_i^T \left( [K]'_{x_k} - \lambda_i [M]'_{x_k} \right) \phi_i, \\ \frac{\partial \omega_i}{\partial x_k} &= \frac{\partial \omega_i}{\partial \lambda_i} \cdot \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_k} = \frac{1}{2\omega_i} \phi_i^T \left( [K]'_{x_k} - \omega_i^2 [M]'_{x_k} \right) \phi_i = \\ &= \frac{1}{2} \phi_i^T \left( \frac{1}{\omega_i} [K]'_{x_k} - \omega_i [M]'_{x_k} \right) \phi_i, \\ \nabla g(\bar{x}) &= \left\{ \frac{\partial \omega(\bar{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial \omega(\bar{x})}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \omega(\bar{x})}{\partial x_k}, \dots, \frac{\partial \omega(\bar{x})}{\partial x_p} \right\}. \end{aligned}$$

Проверка параметров жесткости сложной механической системы приводит к исследованию большого набора параметров состояния системы  $\bar{x}$ . Для повышения вычислительной эффективности методики на старте процедуры предлагается выделить приоритетные для задачи идентификации компоненты из вектора параметров  $x_k \in \bar{x}$ . Алгоритм выделения основан на сопоставлении компонент градиента  $\nabla f(\bar{x}_0)$  и градиента дополнительной функции  $\Pi(\bar{x})$ . В качестве приоритетных рассматриваются компоненты  $x_j \in \bar{x}_0$ , значения которых в  $\nabla \Pi(\bar{x}_0)$  максимальны, в  $\nabla f(\bar{x}_0)$  – неотрицательны.

$$\begin{aligned} \Pi(\bar{x}) &= \frac{1}{\beta} \sum_{j=1}^{\hat{m}} \hat{\phi}_j^T [K(\bar{x})] \hat{\phi}_j, \\ \nabla \Pi(\bar{x}) &= \left\{ \frac{\partial \Pi(\bar{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial \Pi(\bar{x})}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \Pi(\bar{x})}{\partial x_k}, \dots, \frac{\partial \Pi(\bar{x})}{\partial x_p} \right\}, \\ \Pi'_{x_k} &= \frac{\partial \Pi(\bar{x})}{\partial x_k} = \frac{1}{\beta} \sum_{j=1}^{\hat{m}} \hat{\phi}_j^T \frac{\partial [K(\bar{x})]}{\partial x_k} \hat{\phi}_j, \\ [K(\bar{x})]'_{x_k} &= \frac{\partial [K(\bar{x})]}{\partial x_k} = \frac{\partial [K(\bar{x})]}{\partial E_k} \cdot \frac{\partial E_k}{\partial x_k}, \end{aligned}$$

где  $\beta$  – коэффициент масштаба.

### Обзор результатов применения методики

Для реализации методики использован пакет *MATLAB* (в части эффективного метода нелинейного программирования SQP), *ANSYS Mechanical* (в части методов решения проблемы (1) и создания ансамблей  $[K], [M]$ ) и специализированный авторский модуль.

Методика успешно апробирована [20] для двух рассмотренных ранее пространственных стенов «Конструктор» (высота 1,5 м) и «Этажерка» (размеры 1,6×0,8×2,0 м) и их конечно-элементных моделей, которые представляют собой пространственные симметричные в плане стальные рамы различной конфигурации. Всего рассмотрено пять контролируемых состояний. Для исследования динамических характеристик нижней части спектра использованы результаты метода стоячих волн в оцифрованном варианте.

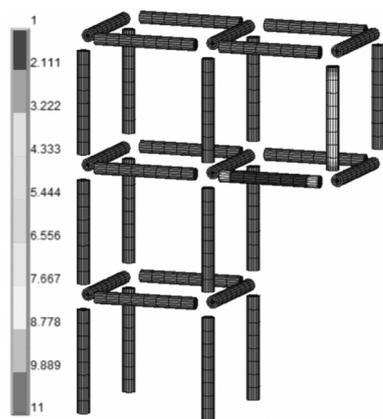
Для идентификации вносимых повреждений использован следующий критерий: достоверные значительные изменения жесткости системы порождают значительные изменения зависимых параметров – целевой функции  $f(\bar{x})$ , набора частот значимой части спектра. Кроме того, для

отображения меры соответствия векторов форм собственных колебаний  $\phi_i(\bar{x})$  и  $\hat{\phi}_j$ , а также для предварительной селекции векторов использован критерий  $MAC_{ij} \in [0, 1]$ :

$$MAC_{ij} = \cos^2(\phi_i(\bar{x}), \hat{\phi}_j) = \frac{(\phi_i \cdot \hat{\phi}_j)^2}{\phi_i^T \cdot \phi_i \cdot \hat{\phi}_j^T \cdot \hat{\phi}_j}.$$

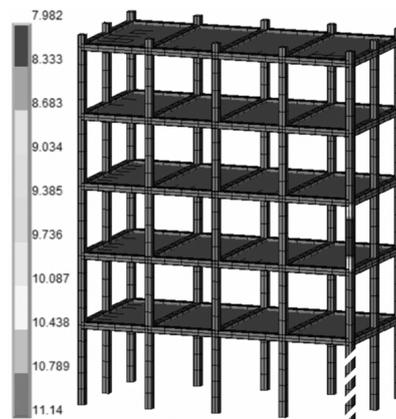
Два проектных состояния стенов идентифицированы корректно. Результаты минимизации вызывают незначительные изменения перечисленных выше зависимых параметров.

Для задания намеренно поврежденных состояний стенов использовался разрыв (отказ) одного из стальных стержней стенда. Получен корректный результат идентификации намеренно поврежденного состояния стенда «Конструктор». Внесенные изменения определены и в части локализации дефекта, и в части глубины дефекта. Для стенда «Этажерка» наблюдается ошибка локализации повреждения по высоте (уровню) стенда. Выявлена поврежденная «колонна» стенда, неверно определена высота внесенного повреждения.



а

Выделены 2 приоритетные компоненты, идентифицирован заданный разрыв стержня, проектное значение модуля Юнга,  $E: 200$  ГПа, оценка  $E$  для выявленного повреждения: 0 ГПа



б

Выделены 3 приоритетные компоненты, идентифицирован разрыв стержня выше внесенного дефекта при опорной стойке, проектное значение модуля Юнга,  $E: 200$  ГПа, оценка  $E$  для выявленного повреждения: 0,2 ГПа

Рис. 2. Результаты идентификации контролируемых состояний стенов «Конструктор» и «Этажерка»: а – стенд «Конструктор»; б – стенд «Этажерка»

### Заключение

Разработана востребованная практикой численно-аналитическая методика идентификации жесткостных свойств пространственных конструкций. Методика включает оригинальную формулировку эквивалентной задачи минимизации, применение универсальных многодисциплинарных программных средств (*ANSYS Mechanical*, *MATLAB*) и всесторонний анализ результатов идентификации. Ее основа – совместный анализ (с учетом значимых критериев сравнения), минимизация различий частот / форм собственных колебаний подробных адаптивных КЭ-моделей и детальных оцифрованных

плинарных программных средств (*ANSYS Mechanical*, *MATLAB*) и всесторонний анализ результатов идентификации. Ее основа – совместный анализ (с учетом значимых критериев сравнения), минимизация различий частот / форм собственных колебаний подробных адаптивных КЭ-моделей и детальных оцифрованных

результатов инструментального исследования в значимом частотном диапазоне.

Методика апробирована для стержневых элементов и естественным образом распространяется на идентификацию характеристик других типов конструкций (оболочечных, объемных и пр.).

В части инструментальных исследований динамических характеристик наиболее перспективным (на сегодня – практически безальтернативным) представляется использование метода стоячих волн.

### Библиографические ссылки

1. Методика мониторинга состояния несущих конструкций зданий и сооружений. Общие положения / МЧС России. М., 2008. 36 с.

2. Белостоцкий А. М., Новиков П. И. Идентификация действительных инерционно-жесткостных свойств конструктивных элементов адаптируемых конечно-элементных моделей зданий и сооружений. Состояние проблемы и пути решения // *Int. Jour. for Computational Civil and Structural Engineering*. 2013. № 9. Is. 4. Pp. 107–118.

3. Ватульян А. О. Коэффициентные обратные задачи механики. М.: Физматлит, 2018. 272 с. ISBN: 978-5-9221-1826-2.

4. Friswell M.I., Mottershead J.E. Finite element model updating in structural dynamics. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1995. 304 p.

5. Kang J.S., Yeo I.H., Lee H.S., Shin S.B. Structural damage detection using modal data with regularization technique // 15th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology Post-Conference (Post-SMiRT15). – Cheju, South Korea: 1999.

6. Weber B., Paultre P., Proulx J. Damage Detection of an Aluminum Truss Using Tikhonov Regularization // Conference & Exposition on Structural Dynamics (IMAC-XXIV). St. Louis, Missouri, United States: 2006.

7. Chen B., Nagarajaiah S. Flexibility-based structural damage identification using Gauss–Newton method // *Sadhana*. 2013. Vol. 38, № 4. Pp. 557–569.

8. Белостоцкий А. М., Каличава Д. К. Адаптируемые конечноэлементные модели в основе динамического мониторинга несущих конструкций высотных зданий. Часть 1. Основы разработанной расчетно-экспериментальной методики // *Int. Jour. for Computational Civil and Structural Engineering*. 2012. Vol. 8, Iss. 4. Pp. 19–27.

9. Адаптируемые конечноэлементные модели в основе динамического мониторинга несущих конструкций высотных зданий. Часть 2. Верификация методики на стендовых моделях / А. М. Белостоцкий, Д. К. Каличава, А. И. Нагибович, Н. О. Петряшев, С. О. Петряшев // *Int. Jour. for Computational Civil and Structural Engineering*. 2012. Vol. 8, Iss. 4. Pp. 28–42.

10. Адаптируемые конечноэлементные модели в основе динамического мониторинга несущих кон-

струкций высотных зданий. Часть 3. Апробация методики на высотном комплексе, возведенном с выявленными отступлениями от проекта / А. М. Белостоцкий, Д. К. Каличава, А. А. Аул, А. И. Нагибович // *Int. Jour. for Computational Civil and Structural Engineering*. 2012. Vol. 8, Iss. 4. Pp. 43–52.

11. Капустян Н. К., Климов А. Н., Антоновская Г. Н. Высотные здания: опыт мониторинга и пути его использования при проектировании // *Жилищное строительство*. 2013. №11. С. 6–12.

12. Каличава Д. К. Адаптивные динамические конечноэлементные модели в основе мониторинга несущих конструкций высотных зданий: дис. ... канд. техн. наук: 05.13.18. М., 2012. 149 с.

13. Коргина М. А. Оценка напряженно-деформированного состояния несущих конструкций зданий и сооружений в ходе мониторинга их технического состояния: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.01. М., 2008. 225 с.

14. Еманов А. Ф. Восстановление когерентных составляющих волновых полей в сейсмике: дис. ... д-ра техн. наук: 25.00.10. Новосибирск, 2004. 279 с.

15. Бах А. А., Красников А. А. Использование метода стоячих волн для анализа динамических характеристик высотных зданий на примере 40-этажного комплекса «Дирижабль», г. Москва // *Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений*. 2014. № 1. С. 26–30.

16. Nelson R.B. Simplified calculation of eigenvector derivatives // *AIAA Journal*. 1976. Vol. 14, No. 9. Pp. 1201–1205.

17. Fox R.L., Kapoor M.P. Rates of change of eigenvalues and eigenvectors // *AIAA Journal*. 1968. Vol. 6, № 12. Pp. 2426–2429.

18. Wang B.P. Improved Approximate Methods for Computing Eigenvector Derivatives in Structural Dynamics // *AIAA Journal*. 1991. Vol. 29, № 6. Pp. 1018–1020.

19. Zhang O., Zerva A. Iterative Method for Calculating Derivatives of Eigenvectors // *AIAA Journal*. 1996. Vol. 34, № 5. Pp. 1088–1090.

20. Белостоцкий А. М., Новиков П. И., Бах А. А., Красников А. А. Апробация методики идентификации параметров жесткости пространственных конструкций на экспериментальных стендах // *Интеллектуальные системы в производстве*. 2020. Т. 19, № 2. С. 44–60.

### References

1. Kletsin V.I., Volkov O.S., Kudishin Yu.I., Pavlov E.I., Grudev I.D., Nigmatov G.M., Idiatullin D.R., Sotin V.N., Novak Yu.V., Akbiev R.T., Bakhmat D.V., Volkov A.V. [Methodology of monitoring the condition of structures of buildings and structures. General provisions]. Moscow, EMERCOM of Russia, 2008, 36 p. (in Russ.)

2. Belostotsky A.M., Novikov P.I. [Identification the real inertia and inertial-rigid properties for structural element of adaptive finite element models. State of problems and solutions]. *Int. Jour. for Computational Civil and Structural Engineering*, 2013, vol. 9, issue 4, pp. 107–118 (in Russ.).

3. Vatulyan A.O. *Koeffitsientnye obratnye zadachi mekhaniki* [Coefficient inverse problems of mechanics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2019, 272 p. (in Russ.).
4. Friswell M.I., Mottershead J.E. [Finite element model updating in structural dynamics]. Netherlands, Kluwer Academic Publishers, 1995, 304 p.
5. Kang J.S., Yeo I.H., Lee H.S., Shin S.B. [Structural damage detection using modal data with regularization technique]. *15th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology Post-Conference (Post-SMiRT15)*. Cheju, South Korea, 1999.
6. Weber B., Paultre P., Proulx J. [Damage Detection of an Aluminum Truss Using Tikhonov Regularization]. *Conference & Exposition on Structural Dynamics (IMAC-XXIV)*. St. Louis, Missouri, United States, 2006.
7. Chen B., Nagarajaiah S. [Flexibility-based structural damage identification using Gauss–Newton method]. *Sadhana*, 2013, vol. 38, pp. 557-569. DOI <https://doi.org/10.1007/s12046-013-0151-3>.
8. Belostotsky A.M., Kalichava D.K. [Adaptive finite element models as the base of dynamic monitoring of tall buildings. Part 1: Theoretical basis of the developed technique]. *Int. Jour. for Computational Civil and Structural Engineering*, 2012, vol. 8, issue 4, pp. 19-27 (in Russ.).
9. Belostotsky A.M., Kalichava D.K., Nagibovich A.I., Petryashev N.O., Petryashev S.O. [Adaptive finite element models as the base of dynamic monitoring of tall buildings. Part 2. Verification procedures for experimental models]. *Int. Jour. for Computational Civil and Structural Engineering*, 2012, vol. 8, issue 4, pp. 28-42 (in Russ.).
10. Belostotsky A.M., Kalichava D.K., Aul A.A., Nagibovich A.I. [Adaptive finite element models as the base of dynamic monitoring of tall buildings. Part 3. Approbation for high-rise building with identified deviations from the project]. *Int. Jour. for Computational Civil and Structural Engineering*, 2012, vol. 8, issue 4, pp. 43-52 (in Russ.).
11. Kapustyan N.K., Klimov A.N., Antonovskaya G.N. *Vysotnye zdaniya: opyt monitoringa i puti ego ispolzovaniya pri proektirovanii* [Tall buildings. Experience of monitoring and ways to use it in design]. Moscow, *Zhilishchnoe stroitelstvo* [Housing construction], 2013, vol. 8, pp. 6-12 (in Russ.).
12. Kalichava D.K. *Adaptivnye dinamicheskie konechnoelementnye modeli v osnove monitoringa nesushchikh konstruksii vysotnykh zdanii* [Adaptive finite element models as the base of dynamic monitoring of tall buildings]: PhD thesis. Moscow, 2012, 149 p. (in Russ.).
13. Korgina M.A. *Otsenka napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya nesushchikh konstruksii zdanii i sooruzhenii v khode monitoringa ikh tekhnicheskogo sostoyaniya* [Evaluation of stress-strain condition of construction of buildings and structures during monitoring of their technical condition]: PhD thesis. Moscow, 2008, 225 p. (in Russ.).
14. Emanov A.F. *Vosstanovlenie kogerentnykh sostavlyayushchikh volnovykh polei v seismike* [Reconstruction of coherent components of wave fields in seismics]: PhD thesis. Novosibirsk, 2004, 279 p. (in Russ.).
15. Bakh A.A., Krasnikov A.A. [Standing wave method usage for analysis of dynamic characteristics of high-rise buildings by example of 40-storey complex “Dirigible”, Moscow]. Moscow, *Seismostoikoe stroitel'stvo. Bezopasnost' sooruzhenii* [Seismic-resistant construction. Safety of buildings], 2014, vol. 1, pp. 26-30 (in Russ.).
16. Nelson R.B. Simplified calculation of eigenvector derivatives. *AIAA Journal*, 1976, vol. 14, no. 9, pp. 1201-1205.
17. Fox R.L., Kapoor M.P. Rates of change of eigenvalues and eigenvectors. *AIAA Journal*, 1968, vol. 6, no. 12, pp. 2426-2429.
18. Wang B.P. Improved Approximate Methods for Computing Eigenvector Derivatives in Structural Dynamics. *AIAA Journal*, 1991, vol. 29, no. 6, pp. 1018-1020.
19. Zhang O., Zerva A. Iterative Method for Calculating Derivatives of Eigenvectors. *AIAA Journal*, 1996, volume 34, no. 5, pp. 1088-1090.
20. Belostotsky A.M., Novikov P.I., Bakh A.A., Krasnikov A.A. [Approbation of the technique for stiffness parameters identification of spatial structures on experimental stands]. Izhevsk, *Intellektual'nye sistemy v proizvodstve*, 2020, vol. 18, no. 2, pp. 44-60 (in Russ.). DOI 10.22213/2410-9304-2020-2-44-60.

\*\*\*

### Numerical Analysis Technique for Stiffness Parameters Identification of Spatial Structures by Minimizing the Difference between the Calculated (Finite Element) and Natural Dynamic Characteristics

P.I. Novikov, “Center SMIS “BASIS” Ltd., Izhevsk, Russia

*The paper contains a description of the developed numerical analysis technique for stiffness parameters identification of spatial structures by minimizing the difference between the calculated (finite element) and natural dynamic characteristics. The technique allows us to solve inverse ill-posed dynamic problems of parametrical identification of structures stiffness characteristics. The technique uses the capabilities of software solution ANSYS Mechanical and MATLAB. The method is based on the original formulation of the nonlinear programming (NLP) with the limitations in the form of ine-qualities for the calculated eigenvalues. Before the start of minimization, it is planned to select priority minimization components. The selection of components allows us to solve the dynamic inverse problem under conditions of “contrast” change of significant spectrum part. Also, it increases the computational efficiency of the minimization process. The technique is applicable to a detailed study of spatial structural schemes. The technique can*

---

*be applied as a component of information, analytical and mathematical models of digital twins at the stage of validation, identification of mathematical models of real construction objects, which are equipped with modern systems of dynamic monitoring.*

**Keywords:** inverse ill-posed problem, damage detection, minimization, natural frequencies and mode shapes.

Получено 16.06.2020