

УДК 62-233.3

DOI: 10.22213/2410-9304-2020-3-77-84

### Программный комплекс для расчета прямозубых конических передач с локализованным контактом

А. Э. Волков, доктор технических наук, профессор, Московский государственный технологический университет «СТАНКИН», Москва, Россия

С. А. Лагутин, кандидат технических наук, ОАО «Электростальский завод тяжелого машиностроения», г. Электросталь, Россия

С. С. Бирюков, аспирант, Московский государственный технологический университет «СТАНКИН», Москва, Россия

*Разработан программный комплекс для проектирования прямозубых конических передач с локализованным контактом. Предложена методика построения 3D-моделей активных поверхностей зубьев, обеспечивающая получение требуемой локализации контакта. Одно из колес передачи выполнено с эвольвентными прямыми зубьями. Выбор боковых поверхностей зубьев сопряженного колеса для реализации локализованного контакта осуществляется на основе решения задачи условной оптимизации. Представлен алгоритм оценки характеристик зацепления и контакта в модифицированной передаче. Целевой функцией, подлежащей минимизации, является максимальное контактное давление в период работы одной пары зубьев. Варьируемыми являются параметры синтеза, определяющие положение центра локализованного пятна контакта и его размеры. Ограничением при решении задачи выступает предотвращение кромочного контакта. Предложен итерационный эвристический алгоритм для решения задачи минимизации целевой функции. В начале работы алгоритма выбирается начальная точка. На каждой итерации с некоторым шагом рассчитываются несколько точек кандидатов для следующего начального приближения. Переход совершается в ту точку с наименьшим значением целевой функции, где отсутствует кромочный контакт. При невозможности перехода уменьшается шаг для расчета точек-кандидатов. Алгоритм завершает работу при невозможности найти подходящую точку или слишком малом шаге. Дан пример расчета.*

**Ключевые слова:** программный комплекс, задача условной оптимизации, контактное давление, прямозубая коническая передача.

#### Введение

Как известно, для реальной зубчатой передачи строгая сопряженность активных поверхностей зубьев является скорее недостатком, чем достоинством. Для того чтобы компенсировать неизбежные погрешности изготовления, а также силовые и температурные деформации звеньев, зацепление нужно проектировать, как приближенное, вводя преднамеренную функцию ошибки передачи [1–3].

Приближенное зацепление автоматически формируется в том случае, когда по технологии нарезания при обработке шестерни и колеса относительные движения между производящим колесом и обрабатываемой деталью различны между собой. Такой случай имеет место, например, в конических и гипоидных передачах с круговыми зубьями. Вопросы анализа и синтеза таких передач подробно исследованы в работах М. Л. Бакстера, Ф. Л. Литвина, М. Г. Сегалья, Г. И. Шевелевой и многих других авторов [4–9].

В цилиндрических зубчатых и червячных передачах, напротив, идентичность рабочего и ста-

ночного зацеплений позволяет теоретически обеспечить строгую сопряженность активных поверхностей. Поэтому приближенность зацепления приходится вводить искусственно, путем модификации одной из активных поверхностей относительно другой [10]. В большинстве таких передач мгновенная линия контакта вытянута вдоль зуба и в процессе зацепления перемещается по профилю. В этом случае продольная модификация поверхности должна предупреждать возможность кромочного контакта для любых допустимых погрешностей изготовления и сборки. Профильная модификация должна компенсировать погрешности шага, сохраняя точность передачи в пределах, допустимых нормами плавности по соответствующему стандарту.

Аналогичным образом обстоит дело и в конических передачах с прямыми зубьями с локализованным контактом, исследованию которых посвящена настоящая статья.

Эвольвентные поверхности обеспечивают кинематически точное зацепление с линейным



С помощью соотношения

$$\psi_i = \varphi_i \sin \delta_{bi}. \quad (3)$$

параметр  $\psi_i$  связан с параметром  $\varphi_i$ .

### Модифицированная коническая эвольвентная поверхность

Поверхности, определенные соотношениями (1)–(3), обеспечивают постоянное передаточное отношение в процессе зацепления, однако они не дают локализованного контакта. Без локализации пятна контакта может при наличии неизбежных погрешностей выходить на кромки зубьев, что будет приводить к резкой концентрации контактных давлений на кромках и способствовать быстрому износу и поломке зубьев. Для локализации контакта введем профильный и продольный отводы поверхности зубьев шестерни внутрь зуба от поверхности, задаваемой с помощью (1)–(3) при  $i = 1$ .

В работе [13] введены следующие параметры синтеза модифицированной активной поверхности зуба шестерни (рис. 2):

$L_c$  – радиус сферы, на которой расположен центр пятна контакта;

$d$  – расстояние от центра пятна контакта до образующей делительного конуса;

$a_0$  – половина ширины зоны касания;

$C$  – коэффициент профильной модификации.

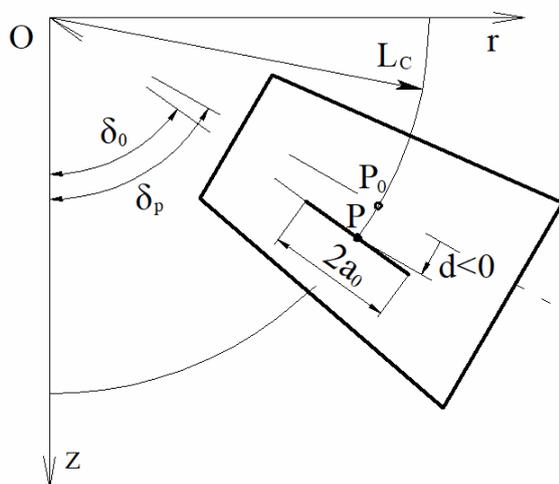


Рис. 2. Параметры синтеза

В соотношениях, описывающих модифицированную активную поверхность зуба шестерни, временно опустим нижний индекс  $i = 1$ .

Модифицированная активная поверхность зуба шестерни формируется следующим образом. Радиус-вектор каждой точки модифицированной боковой поверхности зуба шестерни получается в результате поворота радиус-вектора

соответствующей точки эвольвентной боковой поверхности зуба вокруг оси вращения шестерни на угол

$$\Delta\theta_m = \Delta\theta_L + \Delta\theta_1.$$

Здесь  $\Delta\theta_L$  – угол поворота, соответствующий продольной модификации активной боковой поверхности зуба;  $\Delta\theta_1$  – угол поворота радиуса-вектора точки, соответствующий профильной модификации. Оба поворота осуществляются вокруг оси вращения шестерни и вычисляются так:

$$\Delta\theta_L = -\varepsilon/r[(L - L_c)/a_0]^2; \quad (4)$$

$$\Delta\theta_1 = -C(\varphi - \varphi_0)^2. \quad (5)$$

В (4) и (5) использованы следующие обозначения:  $\varphi_0$  – значение параметра  $\varphi$ , соответствующее центру пятна контакта;  $r$  – расстояние от текущей точки поверхности до оси вращения шестерни. Значение  $\varphi_0$  может быть рассчитано по заданному значению  $d$ .

Выбор значений параметров синтеза – это важная технологическая задача, решение которой невозможно без моделирования работы зубчатой пары. В предлагаемом программном комплексе моделирование осуществляется с помощью одного из двух алгоритмов: алгоритма геометро-кинематического анализа [14] или алгоритма имитации работы пары под заданной нагрузкой [15].

Модифицированная активная поверхность зуба шестерни определяется соотношениями

$$\begin{aligned} x_1^* &= x_1 \cos \Delta\theta_m - y_1 \sin \Delta\theta_m; \\ y_1^* &= x_1 \sin \Delta\theta_m + y_1 \cos \Delta\theta_m; \\ z_1^* &= z_1. \end{aligned} \quad (6)$$

Поверхность зуба сателлита не модифицируется, поэтому

$$x_2^* = x_2; \quad y_2^* = y_2; \quad z_2^* = z_2. \quad (7)$$

Уравнения (6), (7) определяют активные боковые поверхности зубьев колес, подлежащие изготовлению.

### Анализ зацепления и контакта в зубчатой передаче

Проверка работоспособности передачи осуществляется путем расчета характеристик зацепления и контакта зубьев.

Для моделирования проверки зубчатой пары на контрольно-обкатном станке в программном комплексе реализован алгоритм геометро-кинематического анализа. Заданными считаются бо-

ковые поверхности зубьев, положение осей вращения колес и толщина слоя краски. При этом вычисляется форма и положение зоны касания и кривая неравномерности передачи вращения (кривая Бакстера) при легком нагружении.

Анализ контакта зубьев также реализован в программном комплексе и проводится с помощью решения задачи Герца о контакте упругих тел, ограниченных поверхностями второго порядка [16]. Рассчитываются: пятно контакта под нагрузкой (на рис. 3), кривая Бакстера, зависимость максимальных контактных давлений от фазы зацепления (рис. 4).

Максимальное контактное давление на рассматриваемой фазе  $\varphi$  зацепления в решении Герца определяется по формуле

$$\sigma_H(\varphi) = \sigma_H(L_c, d, a_0, C, \varphi) = \frac{3P}{2S}.$$

Нормальная сила  $P$  взаимодействия между зубьями зависит от величины передаваемого момента и вычисляется для каждой фазы зацепления. Площадь  $S$  мгновенного контактного эллипса также зависит от фазы зацепления и значений кривизны контактирующих в данный момент боковых поверхностей зубьев. Поскольку форма боковой поверхности зуба одного из колес определяется параметрами синтеза, то и максимальное контактное давление зависит от параметров синтеза.

Решая контактную задачу на каждой фазе зацепления, определяем наибольшее значение из максимальных контактных давлений

$$\sigma_{H\max} = \max_{\varphi} \sigma_H(\varphi).$$

Также в программном комплексе рассчитывается местоположение на боковой поверхности зуба точки, в которой контактное давление равно  $\sigma_{H\max}$  (точка на рис. 3 на верхней границе пятна контакта). На рис. 3 показан контур боковой поверхности зуба в виде трапеции, а внутри трапеции – пятно контакта. Точка в середине пятна контакта – единственная точка, в которой эвольвентная и модифицированная поверхности зуба шестерни совпадают.

#### Подбор значений параметров синтеза

В статье поставлена задача минимизации значения  $\sigma_{H\max}$  за счет подбора значений параметров синтеза при условии отсутствия кромочного контакта.

Значения параметров синтеза определяются в результате решения задачи условной оптимизации. Целевая функция – зависимость наи-

большого контактного давления от параметров синтеза. Ограничением является отсутствие кромочного контакта. Для этого расстояния от пятна контакта до кромок зуба должны быть положительными.

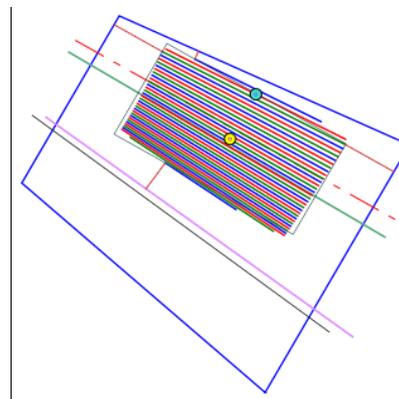


Рис. 3. Пятно контакта под нагрузкой на боковой поверхности зуба шестерни

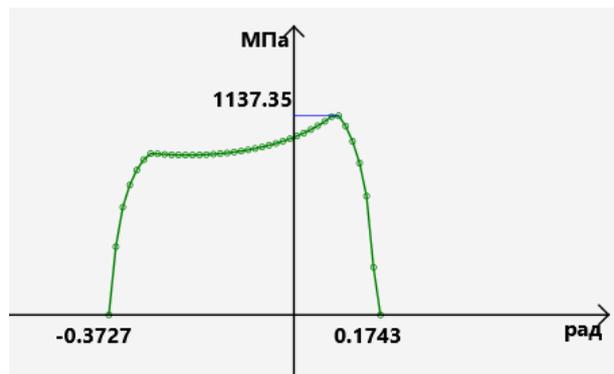


Рис. 4. Зависимость максимального контактного давления от фазы зацепления

Наибольшее контактное давление зависит от четырех параметров синтеза:  $L_c$ ,  $d$ ,  $a_0$ ,  $C$ . Исследование характера влияния параметров синтеза на целевую функцию показало, что два параметра –  $L_c$  и  $a_0$  – при увеличении монотонно снижают значение целевой функции. Поэтому их значения выбираются на основании ограничений на пятно контакта, установленное в ГОСТ 1758–81 «Основные нормы взаимозаменяемости. Передачи зубчатые конические и гипоидные. Допуски», а за счет варьирования двух оставшихся параметров –  $d$  и  $C$  – проводится минимизация контактных давлений в передаче.

Для решения задачи оптимизации используется эвристический алгоритм, суть которого состоит в следующем.

#### Алгоритм условной оптимизации

Пусть требуется найти минимум функции

$$f(d, C) = \sigma_{H\max}$$

с ограничениями вида

$$g_i(d, C) \geq 0, \quad i = 1 \dots n, \quad (8)$$

где  $n$  – число ограничений. В качестве начального приближения выбирается точка  $(d', C')$ , для которой выполняются ограничения (8).

На каждой итерации рассматривается 12 кандидатов на продолжение поиска решения. Для этого рассчитываются значения функции  $f(d_k, C_k)$  в точках:

$$\begin{cases} d_k = d' + \Delta d * \cos \phi_k, \\ C_k = C' + \Delta C * \sin \phi_k, \end{cases} \quad (9)$$

где  $\Delta d$  – шаг по координате  $d$ ;  $\Delta C$  – шаг по координате  $C$ ;  $\phi_k$  – угол, определяемый на текущей итерации по формуле

$$\phi_k = \frac{\pi}{6} * (k - 1), \quad k = 1 \dots 12.$$

Среди рассчитанных по формуле (9) точек выбираются удовлетворяющие ограничениям (8). Для них вычисляется значение целевой функции  $f(d_k, C_k)$  и сравнивается со значением в точке начального приближения  $f(d', C')$ . Окончательно выбирается точка с наименьшим на данной итерации значением  $f(d_k, C_k)$ , для которой выполняется условие

$$f(d_k, C_k) < f(d', C'). \quad (10)$$

Она становится начальным приближением на следующей итерации:

$$d' = d_k, \quad C' = C_k.$$

В случае если на итерации не удалось найти точку, удовлетворяющую ограничениям (8) и условию (10), то шаги  $\Delta d$  и  $\Delta C$  уменьшаются вдвое, и итерация повторяется. Поиск прекращается при выполнении хотя бы одного из условий  $\Delta d < \varepsilon$  либо  $\Delta C < \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – некоторая заданная величина.

Таким образом, точка  $(d', C')$  является решением задачи условной оптимизации, т. к. каждое изменение параметра синтеза приводит либо к росту контактного давления, либо к кромочному контакту.

В результате итерационного подбора значений параметров синтеза получается передача с локализованным контактом. Форма боковых поверхностей зубьев определяется с помощью уравнений (1), (6), (7). Эта форма используется при построении 3D-моделей зубчатых колес, которые необходимо изготовить (рис. 5).



Рис. 5. 3D-модели прямозубых конических колес передачи 8:14

### Пример расчета

Рассмотрим ортогональную прямозубую коническую передачу с числами зубьев  $z_1 = 8$ ;  $z_2 = 14$ ; внешний окружной модуль 10 мм; ширина зубчатого венца 24 мм; угол профиля  $22,5^\circ$ . Передаваемый момент на валу ведомого колеса 100 Нм. Прочностные характеристики материала зубчатых колес таковы  $E = 210\,000$  МПа;  $\nu = 0,3$ .

В соответствии с требованиями норм контакта ГОСТ 1758–81 выбраны следующие начальные значения параметров для синтеза:  $L_0 = 68,67$  мм;  $d = -1,3$  мм;  $a_0 = 6,135$  мм;  $C = 0,011$ . В этом случае пятно контакта занимает примерно 65 % по длине зуба (рис. 3). При начальных значениях параметров синтеза целевая функция принимает значение  $f(d, C) = 1284$  МПа.

В процессе работы эвристического алгоритма одновременно изменяются параметры  $d$  и  $C$ , траектория изменения которых показана в рис. 6. Подписи – это значения целевой функции для данной совокупности значений параметров.

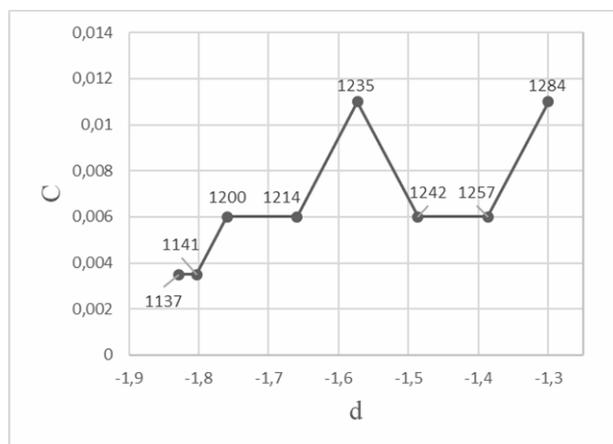


Рис. 6. Траектория значений параметров  $d$  и  $C$  в процессе решения задачи условной оптимизации

В результате решения оптимизационной задачи получены значения параметров  $d = -1,8281$  мм и  $C = 0,0035$ , для которых значение целевой функции составило  $f(d, C) = 1137$  МПа. Таким образом, в результате использования эвристического алгоритма давление в передаче уменьшилось на 11,5 %.

На рис. 7 показано оптимальное пятно контакта, полученное в результате решения задачи условной оптимизации. Из рисунка видно, что кромочный контакт отсутствует. Коэффициент перекрытия в передаче составил 1,2. Максимальное контактное давление равно 1137 МПа. Зависимость максимального контактного давления от фазы зацепления представлена на рис. 4.

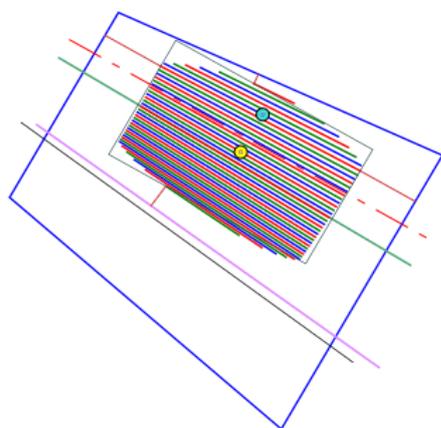


Рис. 7. Расположения оптимального пятна контакта на зубе шестерни

### Выводы

Для успешной работы прямозубых конических передач локализация контакта так же необходима, как и для передач с круговыми зубьями. Однако в этом случае она достигается принципиально иными методами. Эти методы включают в себя построение 3D-моделей колес с взаимогнбаемыми поверхностями зубьев, последующий продольный и профильный отвод одной из поверхностей от теоретической огибающей, а затем моделирование контакта зубьев на контрольно-обкатном станке с определением контактных давлений в процессе зацепления одной пары зубьев. Параметры отводов, определяющие положение центра локализованного пятна контакта и его размеры, находятся на основе решения задачи условной оптимизации, целевой функцией которой является максимальное контактное давление, полученное с помощью решения Герца. Ограничением при решении задачи выступает предотвращение кромочного контакта зубьев. Реализация в металле

предложенного метода локализации контакта требует обработки, по крайней мере, одного из колес передачи на многокоординатном станке с ЧПУ.

### Библиографические ссылки

1. Сегаль М. Г. Влияние погрешностей на условия контакта пространственной зубчатой передачи // *Машиноведение*. 1975. № 5. С. 49–54.
2. Litvin F.L. Development of Gear Technology and Theory of Gearing. NASA Reference Publication 1406, ARL-TR-1500, 1998, 124 p.
3. Лагутин С. А., Долотов С. В. Технологический синтез червячных передач с локализованным контактом // *Вестник машиностроения*. 2005. № 4. С. 10–14.
4. Baxter M.L. Basic Geometry and Tooth Contact of Hypoid Gears // *Industrial Mathematics*, 1961. Vol. 11. Part 2. Pp.19-42.
5. Литвин Ф. Л. Теория зубчатых зацеплений. М. : Наука, 1968. 584 с.
6. Лопато Г. А., Кабатов Н. Ф., Сегаль М. Г. Конические и гипоидные передачи с круговыми зубьями. М. : Машиностроение, 1977. 423 с.
7. Шевелева Г. И. Теория формообразования и контакта движущихся тел : монография. М. : Станкин, 1999. 494 с.
8. Сызранцев В. Н., Ратманов Э. В., Котликова В. Я. Оценка возможности изготовления конических и гипоидных пар в условиях жестких технологических ограничений // *Техника машиностроения*. 2001. № 2. С. 52–56.
9. Medvedev V.I., Volkov A.E. Synthesis of Spiral Bevel Gear Transmissions with a Small Shaft Angle // *Journal of Mechanical Design*, 2007. Vol. 129, no. 9. Pp. 949-959.
10. Lagutin S.A. Predesigned Function of Transmission Errors for Double Modified Helical Gearing // *Proc. 9-th Nat. Congr. Theor. Appl. Mech.* Vol. 1, Varna, Bulgaria, 2001. Pp. 253-261.
11. Колчин Н. И. Аналитический расчет плоских и пространственных зацеплений (с приложением к профилированию режущего инструмента и расчету погрешностей в зацеплениях). М. ; Л. : Машгиз, 1949. С. 19–95.
12. Волков А. Э., Медведев В. И., Бирюков С. С. Построение поверхности отштампованного прямого зуба конического колеса с учетом припуска под финишную обработку // *Научно-технические технологии в машиностроении*. 2019. № 10. С. 25–31.
13. Волков А. Э., Медведев В. И., Бирюков С. С. Алгоритмы синтеза и анализа зацепления эвольвентных прямозубых конических колес с локализованным контактом // *Вестник МГТУ «Станкин»*. 2019. № 1 (48). С. 98–105.
14. Шевелева Г. И., Волков А. Э., Медведев В. И. Алгоритм геометро-кинематического анализа зацепления зубчатых колес // *Вестник машиностроения*. 2004. № 8.
15. Волков А. Э., Медведев В. И. Прочностной расчет спирально-конических зубчатых передач // *Про-*

блемы машиностроения и надежности машин. 2006. № 3. С. 44–50.

16. Medvedev V. I., Matveenkov D. S., Volkov A. E. Reduction of Contact and Bending Stresses in the Bevel Gear Teeth While Maintaining the Same Overall Dimensions // «Advanced in Mechanical Engineering», Lecture Notes in Mechanical Engineering 51, Springer Nature Switzerland AG, 2019, pp. 35-52.

### References

1. Segal' M.G. [Errors impact on contact conditions of spatial gear]. *Mashinovedenie*. 1975. No. 5. Pp. 49-54 (in Russ.).

2. Litvin F.L. (1997). Development of Gear Technology and Theory of Gearing. *NASA Reference Publication 1406 ARL-TR-150:124*.

3. Lagutin S.A., Dolotov S.V. [Technological synthesis of worm gears with localized contact]. *Vestnik Mashinostroeniya*. 2005. No. 4. Pp. 10-14 (in Russ.).

4. Baxter M.L. (1961). Basic Geometry and Tooth Contact of Hypoid Gears. *Industrial Mathematics* 11(2).

5. Litvin F. L. *Teoriya Zubchatykh Zatsepleniy*. [Theory of Gearing]. Moscow, Nauka Publ. 1968 (in Russ.).

6. Lopato G.A., Kabatov N.F., Segal' M.G. *Konicheskie i Gipoidnye Peredachi s Krugovymi Zub'yami*. [Spiral Bevel and Hypoid gears]. *Mashinostroenie*, 1977. 423 p. (in Russ.).

7. Sheveleva G.I. *Teoriya Formoobrazovaniya i Kontakta Dvizhushchikhsya Tel*. [Theory of Generation and Contact of Moving Bodies]. Moscow, Stankin Publ., 1999. 494 p. (in Russ.).

8. Syzrantsev V.N., Ratmanov E.V., Kotlikova V.Ya. [Evaluation of the possibility of bevel and hypoid pairs manufacturing under severe technological constraints]. *Tekhnika Mashinostroeniya*. 2001. No. 2. Pp. 52-56 (in Russ.).

9. Medvedev V.I., Volkov A.E. Synthesis of Spiral Bevel Gear Transmissions with a Small Shaft Angle. *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*. 2007. 129(9):949–59.

10. Lagutin S.A. Predesigned Function of Transmission Errors for Double Modified Helical Gearing. *Proc. 9-th Nat. Congr. Theor. Appl. Mech*. 2001. 1:253–61.

11. Kolchin N.I. *Analiticheskiy Raschet Ploskikh i Prostranstvennykh Zatsepleniy (s Prilozheniem k Profilirovaniyu Rezhushchego Instrumenta i Raschetu Pogreshnostey v Zatseplenyakh)* [Analytical calculation of planar and spatial gearings (with attachment to cutting tool profiling and calculation of meshing errors)]. Moscow, Leningrad, Mashgiz Publ., 1949. Pp. 19-95 (in Russ.).

12. Volkov A.E., Medvedev V.I., Biryukov S.S. [Surface formation of forged straight tooth of bevel gear taking into account stock for finishing]. *Naukoemkie Tekhnologii v Mashinostroeni*. 2019. No. 10. Pp. 25-31 (in Russ.).

13. Volkov A.E., Medvedev V.I., Biryukov S.S. [Algorithms for the synthesis and analysis of the meshing of involute straight bevel gears with localized contact]. *Vestnik MGTU "Stankin"*. 2019. No. 1. Pp. 98-105 (in Russ.).

14. Sheveleva G.I., Volkov A.E., Medvedev V.I. [Algorithms for analysis of meshing and contact of gears]. *Vestnik Mashinostroeniya*. 2004. No. 8 (in Russ.).

15. Volkov A.E., Medvedev V.I. [Strength calculation of spiral bevel gears]. *Problemy Mashinostroeniya i Nadezhnosti Mashin*. 2006. No. 3. Pp. 44-50 (in Russ.).

16. Medvedev V.I., Matveenkov D.S., Volkov A.E. Reduction of Contact and Bending Stresses in the Bevel Gear Teeth While Maintaining the Same Overall Dimensions. Pp. 35–52 in *Lecture Notes in Mechanical Engineering*. 2019.

\*\*\*

### Software Application for Design of Straight Bevel Gear with Localization of Bearing Contact

A.E. Volkov, DSc in Engineering, Professor, Moscow State University of Technology "STANKIN", Moscow, Russia

S.A. Lagutin, PhD in Engineering, "Electrostal Heavy Engineering Works JSC", Electrostal, Russia

S.S. Biryukov, Post-graduate, Moscow State University of Technology "STANKIN", Moscow, Russia

*A software package has been developed for the design of straight bevel gears with the localized contact. The methods of 3D modeling of the active surfaces of teeth are presented, that allow obtaining the required contact localization in gears. One of the gears is made with involute straight teeth. Selection of flanks of the mating gear for the localized contact realization is carried out based on the solution of the constrained optimization problem. The software application for estimation of meshing and contact characteristics in the modified gear is presented. The target function to be minimized is the maximum contact pressure during the operation of one pair of teeth. The synthesis parameters are varied, that determine the position of the center of the bearing contact and its size. The constraint in problem solving is to prevent the edge contact. An iterative heuristic algorithm is proposed for solving the problem of minimizing the target function. At the beginning of the algorithm, the initial point is selected. At each iteration, several candidate points are calculated with some step for the next approximation. The transition is made to that point with the lowest*

*value of the target function, where there is no edge contact. If the transition is not possible, the step for calculating candidate points is reduced. The algorithm is terminated when it is impossible to find a suitable point or the step is too small. An example of calculation is given.*

**Keywords:** software application, constrained optimization problem, contact pressure, straight bevel gear.

Получено 27.07.2020