УДК 621.391
DOI: 10.22213/2410-9304-2020-4-89-97

Проблема перехода от финитного дискретного сигнала к финитному континуальному сигналу

О. В. Пономарева, доктор технических наук, профессор, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова, Ижевск, Россия

С целью повышения точности определения искомой величины в теории косвенных измерений широкое применение нашла операция интерполяции – операция определения (вычисления) промежуточных значений исходной величины между заданными (известными) ее значениями. Арсенал численных методов, применяемых при интерполяции значений величин, полученных прямыми измерениями, достаточно широк – это линейная и квадратичная интерполяции, применение различных интерполяционных многочленов, а также сплайн-интерполяции. Однако выбор методов интерполяции в общей теории измерений проводится субъективно, без анализа характеристик исходного непрерывного сигнала, а также применения теоретических основ цифровой обработки сигналов. Целью работы является анализ проблемы достоверности перехода от финитного дискретного сигнала к финитному континуальному (аналоговому, непрерывному) сигналу в различных предметных областях, выявление основных факторов, которые необходимо учитывать при этом переходе. Проведенный системный анализ проблемы перехода от финитного дискретного сигнала к финитному континуальному сигналу показал, что переход от финитного дискретного сигнала к континуальному дискретному сигналу, без учета свойств исходного сигнала, приводит к субъективности оценки результатов интерполяции финитного дискретного сигнала, к ошибкам и некорректным выводам. Показано, что объективным и оптимальным методом интерполяции финитного дискретного сигнала при выполнении условий теоремы Котельникова является метод, основанный на применении дискретных преобразований Фурье.

Ключевые слова: дискретный сигнал, аналоговый сигнал, интерполяционный многочлен, бин, дискретное косвенное измерение, спектр.

Введение

Результатом равномерной дискретизации с частотой f_s аналогового сигнала $x(t)$, заданного на конечном интервале T: $x(t);\ 0 \le t \le T$, является финитный дискретный сигнал[1] в N отсчетов $x(n);\ n = \overline{0, N-1}$. Финитный дискретный сигнал $x(n);\ n = \overline{0, N-1}$, с математической точки зрения, может рассматриваться как *дискретный временной спектр*, полученный разложением аналогового сигнала $x(t);\ 0 \le t \le T$ по системе единичных импульсов[2]

$$u_0(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \ne 0. \end{cases}; \qquad u_0(n-m) = \begin{cases} 1, & n = m, \\ 0, & n \ne m. \end{cases}. \qquad (1)$$

Согласно рекомендациям по межгосударственной стандартизации – РМГ 29-2013, косвенное измерение[3] (*англ. – Indirect measurement*) интерпретируется как вычисление функционала, который определяет ту или иную искомую величину.

В теории косвенных измерений с целью повышения точности определения искомой величины широкое применение нашла операция определения (вычисления) промежуточных значений исходной величины между заданными (известными) ее значениями. Эта операция называется интерполяцией финитного дискретного сигнала $x(n);\ n = \overline{0, N-1}$. Арсенал численных методов определения промежуточных значений величин, полученных прямыми измерениями, достаточно широк – это линейная и квадратичная интерполяции, применение различных интерполяционных многочленов, а также сплайн-интерполяции. Существенным недостатком такого подхода к повышению точности косвенных измерений является его субъективность, поскольку выбор метода интерполяции величин, полученных прямыми измерениями, субъективен по определению [1].

Как показал системный анализ области косвенных измерений [2–15], она состоит из двух непересекающихся частей (подобластей): *дискретные косвенные измерения* (ДКИ) и *непрерывные косвенные измерения в дискретной форме* (НКИ – ДФ). Следует подчеркнуть, что

[1] **Финитный дискретный сигнал** – это дискретный сигнал, заданный конечным числом отсчетов.

[2] **Единичный импульс** – импульс, имеющий единичную амплитуду и бесконечно малую длительность.

[3] **Косвенное измерение**: «*измерение,* при котором искомое *значение величины* определяют на основании *результатов прямых измерений* других *величин,* функционально связанных с искомой величиной».

подходы, которые лежат в основе этих двух видов косвенных измерений, отличаются принципиально:

- при выполнении ДКИ все измерения (прямые и косвенные) проводятся исключительно в дискретной форме на основе теории дискретной обработки;
- при выполнении НКИ – ДФ косвенное измерение искомой величины проводится в два этапа. На первом этапе дискретные значения прямых измерений величин, на основании которых проводится косвенное измерение искомой величины, интерполируются. В результате дискретные значения прямых измерений величин переводятся с помощью численных методов в непрерывную (кусочно-непрерывную) форму. Определение искомой величины проводится на втором этапе, на базе результатов первого этапа.

Учитывая специфику ДКИ и НКИ – ДФ, автор предложил рассматривать дискретные косвенные измерения как отдельную область косвенных измерений[1].

Цель данной работы – анализ проблемы достоверности перехода от финитного дискретного сигнала к финитному континуальному (аналоговому, непрерывному) сигналу в различных предметных областях, выявление основных факторов, которые необходимо учитывать при этом переходе.

Измерительные дискретные преобразования Фурье

В матричной форме пара преобразований: дискретное преобразование Фурье (ДПФ) и обратное дискретное преобразование Фурье (ОДПФ) задаются следующими соотношениями:

$$\text{ДПФ: } S_N = \frac{1}{N} F_N X_N, \tag{2}$$

$$\text{ОДПФ: } X_N = F_N^* S_N, \tag{3}$$

где * – обозначение операции комплексного сопряжения; $X_N = \left[x(0), x(1), ..., x(N-1)\right]^{\mathrm{T}}$ – вектор N-мерного линейного пространства, элементы которого являются значениями дискретного сигнала $x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$; Т – обозначение операции транспонирования; $S_N = \left[s(0), s(1), ..., s(N-1)\right]^{\mathrm{T}}$ – вектор N-мерного линейного пространства, элементы которого являются коэффициентами разложения вектора X_N по системе дискретных экспоненциальных функций (ДЭФ); система ДЭФ задается матрицей F_N:

$$F_N = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & . \; . & (N-1) & n \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ (N-1) \\ k \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & . \; . & 1 \\ 1 & W_N^1 & . \; . & W_N^{(N-1)} \\ . & . & . \; . & . \\ . & . & . \; . & . \\ 1 & W_N^{(N-1)} & . \; . & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \end{array}, \tag{4}$$

где $W_N^{kn} = \exp\left(-j\frac{2\pi}{N}kn\right)$.

В теориях цифровой обработки сигналов (ЦОС), цифровых векторных и спектральных измерений вводятся понятия спектра энергетического $G_N(k)$, спектра мощности $P_N(k)$, нормированной полосы частот Δf:

$$G_N(k) = \frac{P_N(k)}{\Delta f} = N \mid S_N(k) \mid^2, \quad P_N(k) = \mid S_N(k) \mid^2, \; \Delta f = \frac{1}{N}. \tag{5}$$

Переход от нормированной полосы частот Δf к *истинной* полосе частот $\Delta f_{\text{ист}}$ проводится согласно выражению, $\Delta f_{\text{ист}} = \Delta f \cdot f_s$, где f_s – частота дискретизации сигнала $x(n)$.

По мнению автора, неучет специфики свойств векторных и спектральных ДКИ, наблюдаемый в отечественных информационных источниках, во многом определяет возникновение проблем при проведении исследований в различных предметных областях. В зарубежной научной литературе, посвященной вопросам векторных и спектральных измерений, а также ЦОС, всегда подчеркивалось, что ДПФ является измерительным преобразованием и спектр S_N сигнала X_N является результатом именно косвенных измерений, а не результатом вычислений [16–39]. В противоположность этому в отечественной научной литературе, посвященной измерениям, стала преобладать иная точка зрения, согласно которой векторный и энергетический спектры рассматриваются, как результат вычислений.

Такая ситуация не только приводит к спорным и ошибочным выводам, но и противоречит объективному положению дел, а также не соответствует современному этапу развития науки об измерениях. Действительно, с появлением процессорных измерительных средств (ПрИС) была

[1] **Область измерений**: Совокупность **измерений величин**, свойственных какой-либо области науки или техники и выделяющихся своей спецификой.

не только поставлена, но и решена проблема *разграничения вычислительных и измерительных преобразований*. Было постулировано, что преобразование является измерительным, когда средства вычислительной техники непосредственно входят в модель измерения (*англ.* measurement model – уравнение измерений)[1].

Возвращаясь к вопросу о природе ДПФ, отметим, что дискуссия о том, каковым дискретным преобразованием оно является: вычислительным или измерительным, по мнению автора, не является предметной. Поясним почему. Линейные ДКИ известны уже достаточно давно, и их важность для теории и практики измерений не подвергалась и не подвергается сомнению. При линейном ДКИ значения некоторой физической величины P находят согласно соотношению:

$$P = \sum_{i=1}^{m} b_i \cdot Q_i\,. \qquad (6)$$

где b_i – коэффициент *i*-го значения величины Q_i; Q_i, $i = \overline{1,m}$ – значения величин, являющихся результатом прямых измерений; *m* – число коэффициентов.

Из сравнения соотношений (2) и (6) становится очевидным, что *k*-й, $k = \overline{0,(N-1)}$ бин[2] ДПФ, линейным ДКИ *k*-го значения векторного спектра сигнала X_N на дискретной частоте $\frac{2\pi}{N}\cdot k$ При этом *k*-я ДЭФ в соотношении (6) задает значения коэффициентов b_i.

Проблема достоверного перехода от сигнала, заданного дискретными отсчетами, к континуальному сигналу

В монографии [40] находим, что финитному дискретному сигналу $x(n)$; $n = \overline{0,N-1}$ можно поставить в соответствие множество непрерывных функций, проходящих через отсчеты сигнала (рис. 1). Эти функции в монографии определены как *огибающие* сигнала $x(n)$; $n = \overline{0,N-1}$.

Относительно приведенного утверждения и определения *огибающей* сделаем следующие замечания. Во-первых, утверждение о бесчисленном множестве *огибающих* вполне очевидно, но также вполне очевидно и то, что *огибающие* будут иметь различные спектры и не для всех из них будут выполняться условия теоремы Котельникова[3], которая была доказана в 1933 году. Следовательно, однозначное восстановление *огибающих* принципиально невозможно. Во-вторых, определение непрерывных функций (рис. 1) как *огибающих,* вносит серьезную путаницу в понятия теории обработки сигналов как континуальных, так и дискретных сигналов, поскольку общепринятым является определение огибающей сигнала с помощью преобразования Гильберта [41].

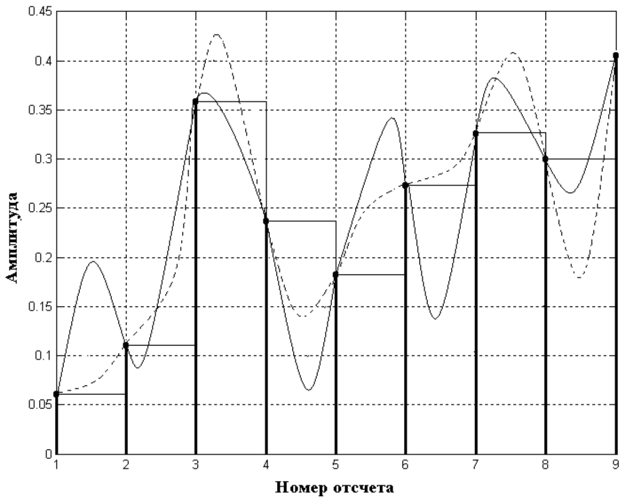

Рис. 1. Огибающие дискретного сигнала $x(n)$; $n = \overline{0,9}$

Возвращаясь к косвенным измерениям величин, заметим, что «восстановление» непрерывных функций (*огибающих)* (рис. 1), является предметом первого этапа НКИ – ДФ. При этом отметим, что именно произвольный выбор метода «восстановления» *огибающих* приводит к *субъективности методов НКИ – ДФ.*

Остановимся на еще одном вопросе, связанным с проблемой перехода от сигнала, заданного дискретными отсчетами, к аналоговому сигналу. Речь идет о встречающемся до сих пор, совершенно ошибочном пояснении теоремы Котельникова[4]. Об ошибочности приведенного в примечании *правдоподобного* объяснения теоремы В. А. Котельникова, свидетельствует тео-

[1] **Модель измерений; уравнение измерений**: уравнение связи (measurement model), между величинами в конкретной измерительной задаче.

[2] **Бинами** в зарубежных и отечественных информационных источниках называют коэффициенты ДПФ.

[3] **Теорема Котельникова**: произвольный сигнал, спектр которого не содержит частот выше f_s Гц, может быть полностью восстановлен, если известны отсчетные значения этого сигнала, взятые через равные промежутки времени $1/2f_s$ с.

[4] **Ошибочное пояснение теоремы Котельникова:** поскольку спектр сигнала не содержит частот выше $2f_s$, сигнал не может претерпевать значительных изменений между отсчетами.

рема[1], доказанная Д. В. Агеевым в 1957 году [42]. Согласно этой теореме (коль скоро отсутствует требование к частоте непрерывной функции $s(t)$ на отрезке $[t_1, t_2]$) можно на интервале $[t_1, t_2]$ задать отрезок косинусоиды частотой, например, 5 мегагерц и затем так продолжить $s(t)$ вне отрезка $[t_1, t_2]$, что спектр $s(t)$ не будет содержать частот выше, например, 5 герц.

Вольная трактовка понятия огибающей, игнорирование свойств ДПФ приводит к досадным ошибкам и некорректным выводам.

Рассмотрим пример. В статье [43] предлагается метод вычисления, *достоверных коэффициентов Фурье цифрового сигнала*.

В цитируемой статье приводится следующее заключение: «В ходе проведенных исследований установлено, что не более 5 % от общего числа вычисленных коэффициентов Фурье для простейшей линейной функции имеют погрешность 0,005. Применение правила Симпсона позволяет существенно увеличить количество достоверно вычисленных коэффициентов Фурье для детерминированной функции». В цитируемой работе в качестве критерия определения числа *достоверно вычисленных коэффициентов Фурье* используется правило двойного пересчета:

$$|\ S(k) - S_1(k)\ | < \eta \cdot |S_1(k)|, \qquad (7)$$

где η=0,005; $S(k)$ – ДПФ $x(n)$ на интервале $N = N_1 = 996$; $S_1(k)$ – ДПФ $x(n)$ на интервале $N = N_2 = 498$;

$$x(n) = \left\{ \begin{array}{c} 2 \cdot (n-1) / N;\ n = \overline{1, N/2} \\ 0;\ n = N/2 + 1; \\ 2 \cdot [(n-1)/N - 1];\ n = \overline{N/2+2, N} \end{array} \right\}. \qquad (8)$$

Согласно теории ЦОС причина появления *недостоверных коэффициентов Фурь*е сигнала $x(n)$ очевидна, поскольку является проявлением эффекта наложения (*англ. aliasing effect*). Поясним проявление эффекта наложения примером. На рис. 2, *а* приведен сигнал $x(n)$, $N = N_1 = 64$, а на рис. 2, *б* – его ДПФ в алгебраической форме – real [$S(k)$]:

$$S(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot W_N^{kn};\ k = \overline{0, (N-1)}. \qquad (9)$$

Сигнал $x_1(n)$, $N = 32 = N_2$, получаемый при увеличении в два раза интервала дискретизации сигнала $x(n)$, приведен на рис. 2, *в*, а на рис. 2, *г* – его ДПФ.

Из теории ЦОС известно, что уменьшение частоты дискретизации приводит к проявлению эффекта наложения спектров в частотной области. На рис. 2, *б* проявление эффекта наложения проиллюстрировано сворачиванием спектра real [$S(k)$] относительно линии d-d.

В результате увеличения интервала дискретизации дискретного сигнала $x(n)$ мы получаем дискретный сигнал $x_1(n)$, спектр которого real [$S_1(k)$] является «свернутым» вариантом real [$S(k)$]. Поскольку коэффициенты Фурье real [$S(k)$], $k = \overline{17, 32}$ отличны от нуля, то коэффициенты Фурье real [$S_1(k)$] принципиально не могут совпадать с коэффициентами Фурье real [$S(k)$], $k = \overline{1,16}$ (рис. 2, *б*).

Несложно также видеть, что поскольку спектр сигнала $x(n)$ является монотонным, то именно начальные бины Фурье real [$S_1(k)$] подвергаются наименьшему изменению.

Очевидным является также и метод повышения *достоверности коэффициентов Фурье* – это выполнение условий теоремы Котельникова, т. е. устранение влияния эффекта наложений спектров. Это достигается путем низкочастотной фильтрации по линии d-d, рис. 2, *б*. В результате низкочастотной фильтрации по линии d-d бины Фурье real [$S_1(k)$], $k = \overline{17, 32}$ (рис. 2, *б*) будут равны нулю, вследствие чего «свернутые» бины Фурье real [$S_1(k)$] будут равны бинам Фурье real [$S(k)$], $k = \overline{1,16}$ (рис. 2, *б*). Можно показать, что рассмотренные положения будут верны и для иных дискретных сигналов.

И, наконец, о том, что применение правила Симпсона (при вычислении соответствующих интегралов – авт.) дает возможность «существенно увеличить количество достоверно вычисленных коэффициентов Фурье для детерминированной функции». В случае выполнения при дискретизации исходного континуального сигнала условий теоремы Котельникова все коэффициенты Фурье будут в терминах цитируемой работы – *достоверными.* В то же время нетрудно убедиться в том, что коэффициенты Фурье, вычисленные с применением правила Симпсона, будут иметь существенную относительную погрешность, поскольку оптимальной в этом случае является тригонометрическая интерполяция [44].

---

[1] **Теорема Агеева**: пусть на интервале $[t_1, t_2]$ заданы любая непрерывная функция $s(t)$ и произвольная частота f. Тогда можно построить функцию, спектр которой не содержит частот выше f, сколь угодно близкую (в среднеквадратическом смысле) к $s(t)$ на интервале $[t_1, t_2]$.

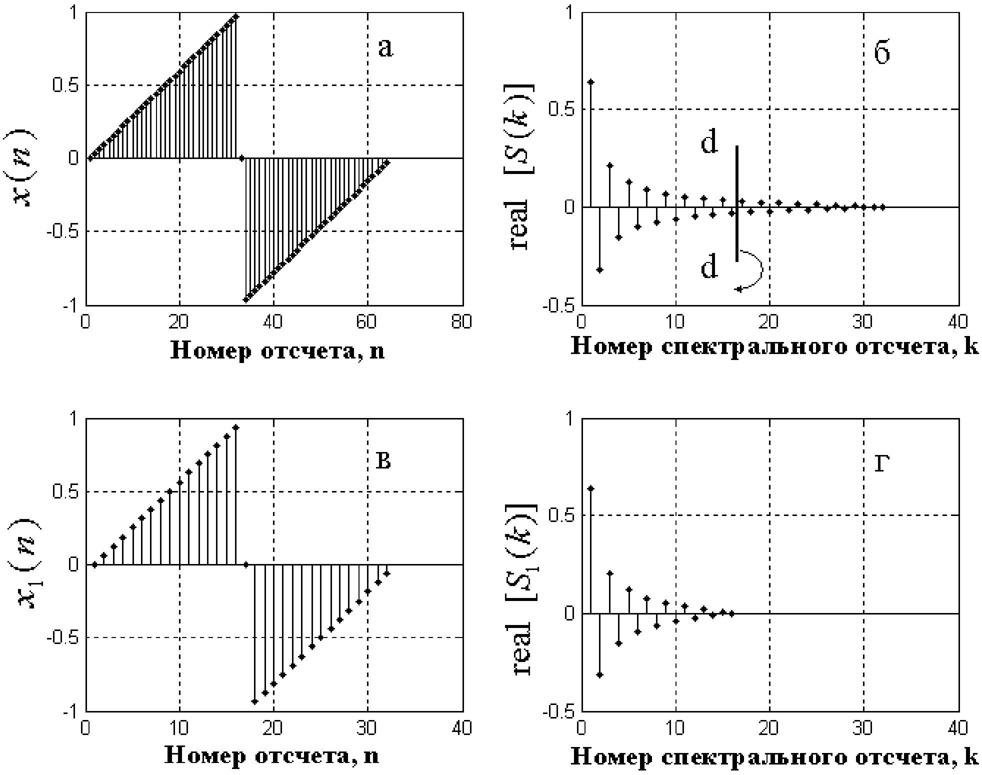

Рис. 2. Проявление эффекта наложения спектров сигналов: *а* – дискретный сигнал $x(n)$, $N = 64 = N_1$; *б* – дискретное преобразование Фурье сигнала $x(n)$, real [$S(k)$]; *в* – сигнал $x_1(n)$, $N = 32 = N_2$; *г* – дискретное преобразование Фурье сигнала $x_1(n)$, real [$S_1(k)$]

Заключение

Проведенный системный анализ проблемы перехода от финитного дискретного сигнала к финитному континуальному сигналу в различных предметных областях позволяет сделать следующие выводы:

- выбор объективного метода интерполяции финитного дискретного сигнала требует знания характеристик исходного непрерывного сигнала и основ цифровой обработки;
- выбор метода перехода от финитного дискретного сигнала к континуальному дискретному сигналу, без учета свойств исходного сигнала, приводит к субъективности оценки результатов интерполяции финитного дискретного сигнала, к ошибкам и некорректным выводам;
- объективным и оптимальным методом интерполяции финитного дискретного сигнала при выполнении условий теоремы Котельникова является метод, основанный дискретных преобразованиях Фурье.

Библиографические ссылки

1. *Пономарева О. В.* Основы теории дискретных косвенных измерений параметров сигналов. Ижевск : Изд-во ИжГТУ, 2016. 172 с.
2. *Цветков Э. И.* Процессорные измерительные средства. Л.: Энергоатомиздат, 1989. 224 с.
3. *Цветков Э. И.* Основы математической метрологии. СПб. : Политехника, 2005. 510 с.
4. *Сергеев А. Г., Крохин В. В.* Метрология. М. : Логос, 2002. 408 с.
5. Ponomarev A.V. Systems Analysis of Discrete Two-Dimensional Signal Processing in Fourier Basis // Advances in Signal Processing. Theories, Algorithms, and System Control. Editor: Margarita Favorskaya, Lakmi C. Jain. // Springer. 2020. Vol. 184. Pp. 87-96. doi.org/10/1007/978-3-030-40312-6_7.
6. Gonzalez R.C., Woods R.E. Digital Image Processing, 4th Ed. Published by Pearson. 2018. 1168 pages**.**
7. Luis Chaparro. Chapter 11 - Fourier Analysis of Discrete-time Signals and Systems. Signals and Systems Using MATLAB (Second Edition), 2015, Pages 683-768.
8. Darian M. Onchis, Pavel Rajmic. Generalized Goertzel algorithm for computing the natural frequencies of cantilever beams. Signal Processing, Volume 96, Part A, March 2014, Pages 45-50.
9. Z. Gao, P. Reviriego, X. Li, J.A. Maestro, M. Zhao, J. Wang. A fault tolerant implementation of the

Goertzel algorithm. Microelectronics Reliability, Volume 54, Issue 1, January 2014, Pages 335-337.

10. Vu Dang Hoang. Wavelet-based spectral analysis TrAC Trends in Analytical Chemistry, Volume 62, November 2014, Pages 144-153.

11. Carl Q. Howard, Richard A. Craig. An adaptive quarter-wave tube that uses the sliding-Goertzel algorithm for estimation of phaseOriginal Research Article. Applied Acoustics, Volume 78, April 2014, Pages 92-97.

12. Carl Q. Howard, Richard A. Craig. Noise reduction using a quarter wave tube with different orifice geometries. Applied Acoustics, Volume 76, February 2014, Pages 180-186.

13. Fan Jiang, Zhencai Zhu, Wei Li, Gongbo Zhou, Guoan Chen. Fault identification of rotor-bearing system based on ensemble empirical mode decomposition and self-zero space projection analysis. Journal of Sound and Vibration, Volume 333, Issue 14, 7 July 2014, Pages 3321-3331.

14. Huanhuan Liu, Minghong Han. A fault diagnosis method based on local mean decomposition and multi-scale entropy for roller bearings. Mechanism and Machine Theory, Volume 75, May 2014, Pages 67-78.

15. A. Mostafapour, S. Davoodi, M. Ghareaghaji. Acoustic emission source location in plates using wavelet analysis and cross time frequency spectrum. Ultrasonics, Volume 54, Issue 8, December 2014, Pages 2055-2062.

16. *Пономарева Н. В., Пономарева О. В., Хворенков В. В.* Определение огибающей ангармонического дискретного сигнала на основе преобразования Гильберта в частотной области // Интеллектуальные системы в производстве. 2018. Т. 16. № 1. С. 33-40. DOI 10.22213/24-10-9304-2018-1-33-40.

17. *Пономарева О. В., Пономарев А. В., Пономарева Н. В.* Иерархическое морфологическо-информационное описание систем функционального диагностирования объектов // Современные информационные и электронные технологии. 2013. Т. 1. № 14. С. 121–124.

18. *Пономарева О. В., Пономарев А. В.* Интерполяция в пространственной области двумерных дискретных сигналов с помощью быстрых преобразований Фурье // Интеллектуальные системы в производстве. 2019. Т. 17. № 1. С. 88-94. DOI 10.22213/24-10-9304-2019-1-88-94.

19. *Пономарева О. В., Пономарев А. В.* Быстрый метод горизонтальной скользящей пространственно-частотной обработки // Интеллектуальные системы в производстве. 2019. Т. 17. № 2. С. 81-87. DOI 10.22213/24-10-9304-2019-2-81-87.

20. *Пономарева О. В., Пономарев А. В.* Быстрый метод диагональной скользящей пространственно-частотной обработки дискретных сигналов // Интеллектуальные системы в производстве. 2019. Т. 17. № 3. С. 105-114. DOI 10.22213/24-10-9304-2019-3-105-114.

21. *Пономарева О. В., Пономарев А. В.* Огибающая действительного дискретного сигнала на конечном интервале и методы ее определения // Интеллектуальные системы в производстве. 2019. Т. 17. № 4. С. 116–122. DOI 10.22213/24-10-9304-2019-4-116-122.

22. *Пономарева О. В., Пономарев А. В., Смирнова Н. В.* Цифровизация измерений спектров в базисе Фурье - тенденции развития и проблемы // Приборы и методы измерений. 2019. Т. 10. № 3. С. 271–280. DOI 10.21122/2220-9506-2019-10-3-271-280.

23. *Пономарева О. В., Алексеев В. А., Пономарев А. В.* Быстрый алгоритм измерения спектра действительных сигналов методом апериодического дискретного преобразования Фурье // Вестник Ижевского государственного технического университета. 2014. № 2. С. 106–109.

24. *Пономарева Н. В.* Проблемы компьютерной спектральной обработки сигналов в музыкальной акустике // Интеллектуальные системы в производстве. 2018. Т. 16. № 1. С. 26–33. DOI 10.22213/24-10-9304-2018-1-26-33.

25. *Пономарева Н. В.* Цифровая спектральная обработка сигналов в музыкальной акустике // DSPA: Вопросы применения цифровой обработки сигналов. 2018. Т. 8. № 2. С. 37–42.

26. *Пономарева Н. В., Пономарев В. В.* Метод быстрого получения прореженных коэффициентов дискретного преобразования Фурье на основе параметрических дискретных экспоненциальных базисов // DSPA: Вопросы применения цифровой обработки сигналов. 2017. Т. 7. № 1. С. 172–177.

27. *Пономарева Н. В., Пономарева В. Ю.* Локализация спектральных пиков методом параметрического дискретного преобразования Фурье // Интеллектуальные системы в производстве. 2016. № 2 (29). С. 15–18.

28. *Пономарева Н. В.* Предобработка дискретных сигналов при спектральном анализе в системе компьютерной математики – MATLAB // Интеллектуальные системы в производстве. 2016. № 4 (31). С. 32–34.

29. *Пономарева Н. В., Пономарева В. Ю.* Метод измерения частоты сигналов на базе параметрического дискретного преобразования Фурье // DSPA: Вопросы применения цифровой обработки сигналов. 2016. Т. 6. № 2. С. 393–397.

30. *Пономарева Н. В.* Быстрое параметрическое преобразование Фурье для спектрального анализа сигналов с высоким разрешением в заданном частотном диапазоне // DSPA: Вопросы применения цифровой обработки сигналов. 2019. Т. 9. № 1. С. 28–32.

31. *Пономарев В. А., Пономарева Н. В.* Метод и алгоритм выделения музыкально-акустического сигнала из его смеси со случайным дискретным телеграфным сигналом // Перспективные информационные технологии (ПИТ 2018) : труды Международной научно-технической конференции / под ред. С. А. Прохорова. 2018. С. 161–164.

32. *Пономарев В. А., Пономарева Н. В*. Цифровой спектрально-временной анализ музыкально-акустических сигналов на основе параметрического дискретного преобразования Фурье // Приборостроение в XXI веке – 2017. Интеграция науки, образования и производства : сборник материалов XIII Меж-

дународной научно-технической конференции. 2018. С. 307–312.

33. *Пономарев А. В.* Основы теории двумерной цифровой обработки сигналов в базисах Фурье с варьируемыми параметрами // Цифровая обработка сигналов. 2019. № 2. С. 12–20.

34. *Пономарев А.В.* Двумерная обработка сигналов в дискретных базисах Фурье // Интеллектуальные системы в производстве. 2019. Т. 17. № 1. С. 71–77. DOI 10.22213/24-10-9304-2019-1-71-77.

35. *Пономарев А. В.* Вертикальная скользящая пространственно-частотная обработка дискретных сигналов // Интеллектуальные системы в производстве. 2019. Т. 17. № 2. С. 65–72. DOI 10.22213/24-10-9304-2019-2-65-72.

36. *Пономарев А. В.* Теоретические вопросы линейных пространственно-инвариантных систем обработки сигналов // Интеллектуальные системы в производстве. 2019. Т. 17. № 3. С. 9–104. DOI 10.22213/24-10-9304-2019-3-97-104.

37. *Пономарев А. В.* Измерение амплитуды дискретного гармонического сигнала методом параметрического ДПФ // Интеллектуальные системы в производстве. 2019. Т. 17. № 4. С. 107–115. DOI 10.22213/24-10-9304-2019-4-107-115.

38. *Пономарев А. В.* Проблематика дискретной двумерной обработки сигналов в базисах Фурье // Цифровая обработка сигналов и ее применение – DSPA-2019 : доклады 21-й Международной конференции. 2019. С. 163–168.

39. *Леньков С. В.* Измерение амплитуд, частот и фаз простых периодических составляющих сложного сигнала при спектральном анализе с использованием быстрого преобразования Фурье // Вестник ИжГТУ имени М. Т. Калашникова. 2019. Т. 22. № 4. С. 83–92. DOI 10.22213/24-13-1172-2019-4-83-92.

40. *Трахтман А. М.* Введение в обобщенную спектральную теорию. М. : Сов. радио,1972. 352 с.

41. Ming A.B., Zhang W., Qin Z.Y., Chu F.L. Envelope calculation of the multi-component signal and its application to the deterministic component cancellation in bearing fault diagnosis. Mechanical Systems and Signal Processing, Volumes 50–51, January 2015, Pages 70-100

42. *Финк Л. М.* Сигналы. Помехи. Ошибки. 2-е изд. М. : Радио и связь, 1984. 256 с.

43. *Кравчук А. С., Кравчук А. И., Рымуза З.* Вычисление достоверных коэффициентов Фурье цифрового сигнала // Цифровая обработка сигналов. 2010. № 2. С. 19–21.

44. *Голд Б., Рэйдер Ч.* Цифровая обработка сигналов / пер. с англ., под ред. А. М. Трахтмана. М. : Сов. радио, 1973. 368 с.

References

1. Ponomareva O.V. *Osnovy teorii diskretnyh kosvennyh izmerenij parametrov signalov* [Fundamentals of the theory of discrete indirect measurements of signal parameters]. Izhevsk, IzhSTU, 2016, 120 p. (in Russ).

2. Cvetkov E.I. Processornye izmeritel'nye sredstva [Processor instrumentation]. Leningrad, Energoatomizdat Publ.,1989, 224 p. (in Russ.).

3. Cvetkov E.I. Osnovy matematicheskoj metrologii [Fundamentals of Mathematical Metrology]. St. Petersburg, Politekhnika Publ., 2005. 510 p. (in Russ.).

4. Sergeev A.G., Krohin V.V. Metrologiya [Metrology]. Moscow, Logos Publ., 2002. 408 p. (in Russ.).

5. Ponomarev A.V. Systems Analysis of Discrete Two-Dimensional Signal Processing in Fourier Basis // Advances in Signal Processing. Theories, Algorithms, and System Control. Editor: Margarita Favorskaya, Lakmi C. Jain. // Springer. 2020. Vol. 184. Pp. 87-96. doi.org/10/1007/978-3-030-40312-6_7.

6. Gonzalez R.C., Woods R.E. Digital Image Processing, 4th Ed. Published by Pearson. 2018. 1168 pages**.**

7. Luis Chaparro. Chapter 11 - Fourier Analysis of Discrete-time Signals and Systems. Signals and Systems Using MATLAB (Second Edition), 2015, Pages 683-768.

8. Darian M. Onchis, Pavel Rajmic. Generalized Goertzel algorithm for computing the natural frequencies of cantilever beams. Signal Processing, Volume 96, Part A, March 2014, Pages 45-50.

9. Gao Z., Reviriego P., Li X., Maestro J.A., Zhao M., Wang J. A fault tolerant implementation of the Goertzel algorithm. Microelectronics Reliability, Volume 54, Issue 1, January 2014, Pages 335-337.

10. Vu Dang Hoang. Wavelet-based spectral analysis TrAC Trends in Analytical Chemistry, Volume 62, November 2014, Pages 144-153.

11. Carl Q. Howard, Richard A. Craig. An adaptive quarter-wave tube that uses the sliding-Goertzel algorithm for estimation of phase Original Research Article. Applied Acoustics, vol. 78, April 2014, pages 92-97.

12. Carl Q. Howard, Richard A. Craig. Noise reduction using a quarter wave tube with different orifice geometries. Applied Acoustics, vol. 76. February 2014. Pages 180-186.

13. Fan Jiang, Zhencai Zhu, Wei Li, Gongbo Zhou, Guoan Chen. Fault identification of rotor-bearing system based on ensemble empirical mode decomposition and self-zero space projection analysis. Journal of Sound and Vibration. Vol. 333, Issue 14, 7 July 2014. Pp. 3321-3331.

14. Huanhuan Liu, Minghong Han. A fault diagnosis method based on local mean decomposition and multi-scale entropy for roller bearings. Mechanism and Machine Theory. Vol. 75, May 2014. Pp. 67-78.

15. Mostafapour A., Davoodi S., Ghareaghaji M. Acoustic emission source location in plates using wavelet analysis and cross time frequency spectrum. Ultrasonics. Vol. 54, Issue 8. December 2014. Pp. 2055-2062.

16. Ponomareva N.V., Ponomareva O.V., Hvorenkov V.V. [Determination of the envelope of anharmonic discrete signal based on the Hilbert transform in the frequency domain]. Intellektual'nye sistemy v proizvodstve, 2018. Vol. 16, no. 1, pp. 33-40 (in Russ.). DOI 10.22213/24-10-9304-2018-1-33-40.

17. Ponomareva O.V., Ponomarev A.V., Ponomareva N.V. [Hierarchical morphological-informational description of systems for functional diagnostics of objects]. Sovremennye informacionnye i elektronnye tekhnologii, 2013, vol. 1, no.14, pp. 121-124. (in Russ.).

18. Ponomareva O.V., Ponomarev A.V. [Interpolation in the spatial domain of 2D discrete signals using fast Fourier transforms]. *Intellektual'nye sistemy v proizvodstve,* 2019, vol. 17, no. 1, pp. 88-94 (in Russ.). DOI 10.22213/24-10-9304-2019-1-88-94.

19. Ponomareva O.V., Ponomarev A.V. [Fast method of horizontal sliding spatial frequency processing]. *Intellektual'nye sistemy v proizvodstv,* 2019, vol. 17, no. 2, pp. 81-87 (in Russ.). DOI 10.22213/24-10-9304-2019-2-81-87.

20. Ponomareva O.V., Ponomarev A.V.[Fast method of diagonal sliding spatial frequency processing of discrete signals]. *Intellektual'nye sistemy v proizvodstve,* 2019, vol. 17, no. 3, pp. 105-114. (in Russ.). DOI 10.22213/24-10-9304-2019-3-105-114.

21. Ponomareva O.V., Ponomarev A.V. [The envelope of a real discrete signal on a finite interval and methods for its determination]. *Intellektual'nye sistemy v proizvodstve*, 2019, vol. 17, no. 4, pp. 116-122 (in Russ.). DOI 10.22213/24-10-9304-2019-4-116-122.

22. Ponomareva O.V., Ponomarev A.V., Smirnova N.V. [Digitalization of measurements of spectra in the Fourier basis - development trends and problems]. *Devices and Methods of Measurements,* 2019, vol. 10, no. 3, pp. 271-280 (in Russ.). DOI 10.21122/2220-9506-2019-10-3-271-280.

23. Ponomareva O.V., Alekseev V.A., Ponomarev A.V. [Fast algorithm for measuring the spectrum of real signals by the method of aperiodic discrete Fourier transform]. *Vestnik Izhevskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, 2014, no. 2, pp. 106-109 (in Russ.).

24. Ponomareva N.V. [Problems of computer spectral signal processing in musical acoustics]. *Intellektual'nye sistemy v proizvodstve*, 2018, vol. 16, no. 1, pp. 26-33. DOI 10.22213/24-10-9304-2018-1-26-33 (in Russ.).

25. Ponomareva N.V. [Digital spectral signal processing in musical acoustics]. *DSPA: Voprosy primeneniya cifrovoj obrabotki signalov*, 2018, vol. 8, no. 2, pp. 37-42 (in Russ.).

26. Ponomareva N.V., Ponomarev V.V. [A method for fast obtaining thinned discrete Fourier transform coefficients based on parametric discrete exponential bases]. *DSPA: Voprosy primeneniya cifrovoj obrabotki signalov*, 2017, vol. 7, no. 1. pp. 172-177 (in Russ.).

27. Ponomareva N.V., Ponomareva V.YU. [Localization of spectral peaks using the parametric discrete Fourier transform]. *Intellektual'nye sistemy v proizvodstve*, 2016, no. 2 (29), pp. 15-18 (in Russ.).

28. Ponomareva N.V. [Pre-processing of discrete signals for spectral analysis in the system of computer mathematics - MATLAB]. *Intellektual'nye sistemy v proizvodstve*, 2016, no. 4 (31), pp. 32-34 (in Russ.).

29. Ponomareva N.V., Ponomareva V.YU. [Method for measuring signal frequency based on parametric discrete Fourier transform]. *DSPA: Voprosy primeneniya cifrovoj obrabotki signalov*, 2016, vol. 6, no. 2, pp. 393-397 (in Russ.).

30. Ponomareva N.V. [Fast parametric Fourier transform for spectral analysis of signals with high resolution in a given frequency range]. DSPA: Voprosy primeneniya cifrovoj obrabotki signalov, 2019, vol. 9, no 1, pp. 28-32 (in Russ.). DOI 10.22213/24-10-9304-2019-1-28-32.

31. Ponomarev V.A., Ponomareva N.V. [Method and algorithm for separating a musical-acoustic signal from its mixture with a random discrete telegraph signal]. Perspektivnye informacionnye tekhnologii (PIT 2018). Trudy Mezhdunarodnoj nauchno-tekhnicheskoj konferencii. Pod redakciej S.A. Prohorova, 2018, pp. 161-164 (in Russ.).

32. Ponomarev V.A., Ponomareva N.V. [Method and algorithm for separating a musical-acoustic signal from its mixture with a random discrete telegraph signal]. Priborostroenie v XXI veke - 2017. Integraciya nauki, obrazovaniya i proizvodstva. sbornik materialov XIII Mezhdunarodnoj nauchno-tekhnicheskoj konferencii, 2018, pp. 307-312 (in Russ.).

33. Ponomarev A.V. [Fundamentals of the theory of two-dimensional digital signal processing in Fourier bases with variable parameters]. Cifrovaya obrabotka signalov, 2019, no.2. pp. 12-20 (in Russ.).

34. Ponomarev A.V. [Two-dimensional signal processing in discrete Fourier bases. Intellektual'nye sistemy v proizvodstve, 2019, vol. 17. no 1, S. 71-77. (in Russ.). DOI 10.22213/24-10-9304-2019-1-71-77.

35. Ponomarev A.V. [Vertical sliding spatial frequency processing of discrete signals]. Intellektual'nye sistemy v proizvodstve, 2019, vol. 17. no 2, pp. 65-72. (in Russ.). DOI 10.22213/24-10-9304-2019-2-65-72.

36. Ponomarev A.V. []. Intellektual'nye sistemy v proizvodstve, 2019, vol. 17,no. 3, pp. 97-104. (in Russ). DOI 10.22213/24-10-9304-2019-3-97-104.

37. Ponomarev A.V. [Measuring the amplitude of a discrete harmonic signal using the parametric DFT method]. Intellektual'nye sistemy v proizvodstve, 2019, vol. 17, no.4, pp. 107-115. (in Russ). DOI 10.22213/24-10-9304-2019-4-107-115.

38. Ponomarev A.V. [Problems of discrete two-dimensional signal processing in Fourier bases]. Cifrovaya obrabotka signalov i eyo primenenie – DSPA-2019. Doklady 21-j Mezhdunarodnoj konferencii, 2019, pp. 163-168. (in Russ.).

39. Len'kov S.V. [Measurement of amplitudes, frequencies and phases of simple periodic components of a complex signal in spectral analysis using the fast Fourier transform]. Vestnik IzhGTU imeni M.T. Kalashnikova, 2019, vol. 22, no.4, pp. 83-92. (in Russ.). DOI 10.22213/24-13-1172-2019-4-83-92.

40. Trahtman A.M. Vvedenie v obobshchennuyu spektral'nuyu teoriyu [Introduction to generalized spectral theory.]. Moscwa, Sov.radio, 1972, 352 p. (in Russ.).

41. Ming A.B., Zhang W., Qin Z.Y., Chu F.L. Envelope calculation of the multi-component signal and its application to the deterministic component cancellation in bearing fault diagnosis. Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 50-51, January 2015, Pages 70-100.

42. Fink L.M. Signaly. Pomekhi. Oshibki [Signals. Interference. Errors]. Moscow, Radio i svyaz' Publ., 1984, 256 p. (in Russ.).

43. Kravchuk A.S., Kravchuk A.I., Rymuza Z. Vychislenie [Calculation of reliable Fourier coefficients of a digital signal]. Cifrovaya obrabotka signalov, 2010, no. 2, pp.19-21. (in Russ.).

44. Gold B., Rejder C.H. Cifrovaya obrabotka signalov. [Digital signal processing]. Moscow, Sov. Radio Publ. 1973. 368 p. (in Russ.).

* * *

The Problem of Transition from a Finite Discrete Signal to a Finite Continual Signal

O. V. Ponomareva, DSc in Engineering, Professor, Kalashnikov IzhGTU, Izhevsk, Russia

To increase the accuracy of determining the required value in the theory of indirect measurements, the interpolation operation - the operation of determination (calculation) of intermediate values of the initial value between its specified (known) values - has found wide application. The arsenal of numerical methods used in interpolation of values obtained by direct measurements is quite wide; they are linear and quadratic interpolation, the use of various interpolation polynomials, as well as spline interpolation. However, the choice of interpolation methods in the general theory of measurements is made subjectively, without analyzing the characteristics of the original continuous signal and applying the theoretical foundations of digital signal processing. The work aims to analyze the problem of reliability of the transition from a finite discrete signal to a finite continual (analog, continuous) signal in different subject areas and to identify the main factors to be taken into account in this transition. The system analysis of the problem of transition from the finite discrete signal to the finite continual signal has shown that the transition from the finite discrete signal to the continual discrete signal without taking into account the properties of the original signal leads to subjectivity in evaluating the results of interpolation of the finite discrete signal, to errors, and incorrect conclusions. It is shown that the objective and optimal method of interpolation of the finite discrete signal at the fulfillment of conditions of Kotelnikov's theorem is the method based on the application of discrete Fourier transformations.

Keywords: discrete signal, analog signal, interpolation polynomial, bin, discrete indirect measurement, spectrum.

Получено: 10.11.2020