

УДК 004.942:623.526.4

DOI: 10.22213/2410-9304-2020-4-98-108

Исследование влияния упругих деформаций и колебаний ствола на точность стрельбы*

И. Г. Русяк, доктор технических наук, профессор, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова, Ижевск, Россия

В. Г. Суфиянов, доктор технических наук, доцент, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова, Ижевск, Россия

Д. А. Клюкин, магистрант, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова, Ижевск, Россия

В работе приводятся постановки задач продольных и поперечных колебаний ствола артиллерийской системы, возникающих в процессе выстрела. Отличительной особенностью является учет сил взаимодействия снаряда с каналом ствола переменного сечения и начального изгиба ствола, который находится из решения задачи гравитационного прогиба. Для определения сил, приводящих снаряд в движение, решается задача внутренней баллистики в осредненных параметрах в термодинамическом приближении. Численное решение задачи колебаний ствола проводилось в одномерной постановке методом конечных разностей по неявной схеме, имеющей второй порядок точности по времени и пространству. Сравнение решений задачи о гравитационном прогибе, полученных в одномерной и трехмерной постановках, показало, что они практически совпадают. Расчет внешнебаллистической траектории снаряда проводился на основе решения системы дифференциальных уравнений с начальными условиями, определяемыми из решения задач внутренней баллистики и поперечных колебаний ствола в вертикальной плоскости. Представлены результаты исследования влияния упругих деформаций и колебаний ствола на угол бросания снаряда из ствола и дальность полета снаряда при различных условиях стрельбы. Показано, что отклонения, вызванные деформацией и колебаниями ствола при стрельбе из артиллерийской системы, приводят к уменьшению дальности стрельбы при малых углах возвышения и к увеличению дальности при больших углах возвышения. Полученные результаты позволяют определить поправки к углу вылета снаряда, возникающие вследствие колебания ствола при выстреле.

Ключевые слова: артиллерийская система; математическое моделирование; упругие колебания ствола; внутренняя баллистика; внешняя баллистика; угол бросания снаряда.

Введение

Интенсивный рост давления и ускоренное движение снаряда по каналу ствола при выстреле вызывает колебания ствола в различных направлениях [1]. Исследование динамики ствола в процессе выстрела является актуальной научной и практической проблемой, т. к. деформации определяют начальные условия движения снаряда на внешнебаллистической траектории, например угол вылета снаряда из канала ствола, и в конечном счете влияют на точность стрельбы. Вопросы математического моделирования процесса деформации и колебаний ствола посвящены работы как российских, так и зарубежных авторов. В ряде работ [2–4] для моделирования динамики ствола артиллерийской системы используются современные пакеты инженерного проектирования, позволяющие решать задачу в трехмерной постановке. Тем не менее моделирование в одномерной постановке находит применение при исследовании колебаний ствола при выстреле и позволяет получить решение с точностью, сопоставимой с решением в трехмерной постановке, при этом значительно уменьшая время проведения расчетов.

В работе рассматривается математическая модель колебаний ствола переменного сечения в упругой постановке в одномерном приближении. Соответствующие дифференциальные уравнения можно решить, например, методом Фурье [5], либо методом конечных элементов [6], либо методом конечных разностей. Ниже для численного решения нестационарных одномерных дифференциальных уравнений колебаний ствола использовалась неявная конечно-разностная схема, рассмотренная в [7].

Целью данного исследования является изучение влияния упругих деформаций и колебаний ствола в процессе выстрела на результаты стрельбы.

Дополнительно будем придерживаться следующих условий и допущений: потери энергии на теплоотдачу не учитываются; орудие считается безоткатным; канал ствола является осесимметричным; поперечные колебания ствола в горизонтальной плоскости не учитываются.

Основная задача внутренней баллистики

Решение основной задачи внутренней баллистики (ОЗВБ), необходимое для определения закона изменения распределения давления по

роховых газов и скорости движения снаряда в зависимости от пути и времени, проводится в термодинамической постановке по модели [8].

Уравнение горения пороховых элементов запишем в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{d\psi}{dt} = \frac{S_0}{\Lambda_0} \sigma(z) u_k, \\ \frac{dz}{dt} = \frac{u_k}{e_1}, \end{cases} \quad (1)$$

где ψ – доля сгоревшего пороха; S_0 – начальная площадь поверхности порохового элемента; Λ_0 – начальный объем порохового элемента; $\sigma(z)$ – относительная площадь поверхности горения порохового элемента; $z = e/e_1$ – относительная толщина сгоревшего свода порохового элемента; e – толщина сгоревшего свода; e_1 – максимальная толщина горящего полусвода; $u_k = u_1 p$ – линейная скорость горения; u_1 – коэффициент скорости горения; $p = p(t)$ – давление пороховых газов внутри ствола.

Система (1) решается до фазы распада пороховых элементов $z \leq 1$ или $\psi \leq \psi_p = \kappa(1 + \lambda + \mu)$. При этом $\sigma(z) = 1 + 2\lambda z + 3\mu z^2$, $\psi(z) = \kappa z(1 + \lambda z + \mu z^2)$, где κ , λ , μ – коэффициенты формы, которые рассчитываются исходя из геометрии пороховых элементов.

После распада пороховых элементов $\psi_p \leq \psi \leq 1$ решается уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= \frac{S_0}{\Lambda_0} \sigma(\psi) u_k, \\ \sigma(\psi) &= (1 + 2\lambda + 3\mu) \sqrt{\frac{1-\psi}{1-\psi_p}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Система уравнений движения снаряда:

$$\begin{cases} q \frac{dv_{\text{сн}}}{dt} = S_{\text{кн}} p_{\text{сн}} \eta(p_{\text{сн}} - p_{\text{ф}}), \\ \frac{dx_{\text{сн}}}{dt} = v_{\text{сн}} \eta(p_{\text{сн}} - p_{\text{ф}}), \end{cases} \quad (3)$$

где $x_{\text{сн}}$ – положение снаряда; $v_{\text{сн}}$ – скорость снаряда; $S_{\text{кн}}$ – площадь сечения цилиндрической части канала ствола; q – масса снаряда; $p_{\text{ф}}$ – давление форсирования; $\eta(\xi)$ – функция Хэвисайда:

$$\eta(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{если } \xi \leq 0, \\ 1, & \text{если } \xi > 0. \end{cases}$$

Уравнение энергии:

$$\begin{aligned} p \left[W_{\text{сн}} - \frac{\omega}{\delta} (1 - \psi) - \alpha \omega \psi \right] &= \\ &= \omega \psi f - \left(1 + \frac{1}{3} \frac{\omega}{q} \right) (k - 1) q \frac{v_{\text{сн}}^2}{2}, \end{aligned} \quad (4)$$

где ω – масса пороха; δ – плотность пороха; α – коволюм; f – сила пороха; $k = \frac{c_p}{c_v}$ – показатель адиабаты продуктов горения пороха; c_p – теплоемкость продуктов горения пороха при постоянном давлении; c_v – теплоемкость продуктов горения пороха при постоянном объеме; $W_{\text{сн}}$ – объем заснарядного пространства:

$$W_{\text{сн}} = W_{\text{км}} + S_{\text{сн}} (x_{\text{сн}} - x_{\text{сн}}^0), \quad (5)$$

где $W_{\text{км}}$ – объем камеры; $x_{\text{сн}}^0$ – начальное положение снаряда.

Уравнение состояния:

$$p \left[W_{\text{сн}} - \frac{\omega}{\delta} (1 - \psi) - \alpha \omega \psi \right] = \omega \psi RT, \quad (6)$$

где R – удельная газовая постоянная; T – температура продуктов горения пороха.

Дополнительные соотношения:

$$p_{\text{сн}}(t) = \frac{p(t)}{1 + \frac{1}{3} \frac{\omega}{q}}; \quad p_{\text{кн}}(t) = \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\omega}{q} \right) p_{\text{сн}}(t). \quad (7)$$

Распределение давления внутри канала ствола можно записать в следующем виде:

$$p(x, t) = p_{\text{кн}}(t) - \frac{1}{2} \frac{\omega p_{\text{сн}}(t)}{q} \frac{x^2}{x_{\text{сн}}^2}. \quad (8)$$

Начальные условия при $t = 0$, $0 \leq x \leq L_{\text{км}}$:

$$p(0) = p_{\text{н}}, \quad T(0) = \frac{f}{R}, \quad v_{\text{сн}}(0) = 0, \quad x_{\text{сн}}(0) = x_{\text{сн}}^0,$$

$$\psi(0) = \psi_{\text{н}} = \frac{p_{\text{н}} \left(\frac{\delta}{\Delta} - 1 \right)}{f \delta + p_{\text{н}} (\alpha \delta - 1)}, \quad \Delta = \frac{\omega}{W_{\text{км}}}, \quad (9)$$

где $p_{\text{н}}$ – давление, развиваемое воспламенителем.

Расчеты по представленной выше системе дифференциальных уравнений проводятся до

момента вылета снаряда из ствола: $x_{\text{сн}} \leq L_{\text{км}} + L_{\text{д}}$, где $L_{\text{км}}$ – длина камеры; $L_{\text{д}}$ – длина ствола.

Задача упругих деформаций и колебаний ствола

Рассмотрим декартову систему координат $Oxyz$ (рис. 1), связанную с недеформированным

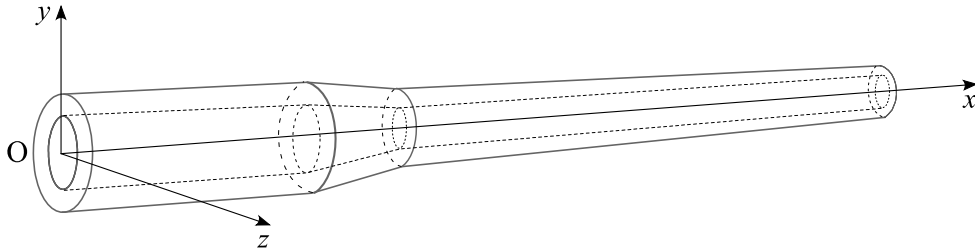


Рис. 1. Система координат, связанная со стволом

стволом орудия. Начало координат O находится в центре казенного среза ствола. Ось Ox направим вдоль оси симметрии ствола. Ось Oy находится в вертикальной плоскости перпендикулярно оси Ox . Ось Oz образует правостороннюю систему координат.

Совместим начало координат $Oxyz$ с началом местной системы координат $OXYZ$. Ось OY направлена в сторону, противоположную направлению силы тяжести \vec{g} . Также совмести

тим оси Oz и OZ . Направим ось Ox орудия в плоскости OXY под углом возвышения θ к оси OX (рис. 2).

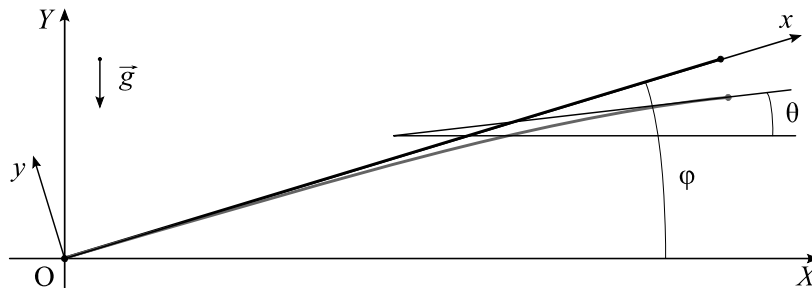


Рис. 2. Местная система координат $OXYZ$

Под действием силы тяжести и других сил ствол будет испытывать изгиб. Угол бросания θ (рис. 2) вычисляется как угол, образованный осью OX и направлением касательной линии, совпадающей с центром канала ствола, в точке дульного среза в момент вылета снаряда из ствола.

Уравнение продольных колебаний ствола в направлении оси Ox имеет вид

$$\rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} (F\sigma + 2\nu Sp) + p \frac{\partial S}{\partial x} - q_x(x, t) = 0, \quad (10)$$

где $u = u(x, t)$ – величина продольной деформации; ρ – плотность материала ствола; $F = F(x)$ – переменная площадь сечения ствола; $S = S(x)$ – переменная площадь сечения канала ствола; $\sigma = E \frac{\partial u}{\partial x}$ – напряжение в сечении x ; E –

модуль упругости; ν – коэффициент Пуассона; $q_x = q_x(x, t)$ – распределенные продольные силы.

Задача (10) решается при заданных начальных условиях:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = u_1(x) \quad (11)$$

и граничных условиях:

$$u(0, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, \quad (12)$$

где функция $u_0(x)$ определяется из решения стационарной задачи гравитационного прогиба, в которой рассматривается только постоянная сила тяжести; $L = L_{\text{км}} + L_{\text{д}}$ – длина артиллерийской системы. Площадь сечения ствола и площадь канала ствола вычисляются по формулам

$$F(x) = \pi[r_2^2(x) - r_1^2(x)], \quad S(x) = \pi r_1^2(x),$$

где $r_1(x), r_2(x)$ – переменные внутренней и внешней радиусы канала ствола.

Распишем продольные силы, действующие на канал ствола:

$$q_x(x, t) = -\rho F g \sin \phi - q_x^{\text{ch}}(x, t) + q_x^{\text{tp}}(x, t), \quad (13)$$

где $q_x^{\text{ch}}(x, t)$ – массовые силы, действующие на ствол со стороны снаряда в направлении оси Ox ; $q_x^{\text{tp}}(x, t)$ – силы трения и взаимодействия снаряда с нарезами в направлении оси Ox ; g – ускорение свободного падения. При определении этих сил снаряд будем считать эквивалентным по объему цилиндром, радиус которого совпадает с радиусом канала ствола. Длина эквивалентного снаряда равна:

$$\Delta l_{\text{ch}} = \frac{V_{\text{ch}}}{S_{\text{ch}}},$$

где V_{ch} – объем снаряда.

Средняя плотность такого «приведенного» снаряда равна:

$$\rho_{\text{ch}} = \frac{q}{V_{\text{ch}}}.$$

В таком случае можно записать:

$$q_x^{\text{ch}}(x, t) = \begin{cases} \rho_{\text{ch}} S_{\text{ch}} g \sin \phi, & x \in [x_{\text{ch}}, x_{\text{ch}} + \Delta l_{\text{ch}}], \\ 0, & x \notin [x_{\text{ch}}, x_{\text{ch}} + \Delta l_{\text{ch}}]. \end{cases} \quad (14)$$

В условии (14) положение снаряда $x_{\text{ch}} = x_{\text{ch}}(t)$ определяется из решения основной задачи внутренней баллистики.

Продольная сила, действующая на стенки канала ствола гладкоствольного орудия, противоположна силе трения, действующей на снаряд:

$$R_{\text{гл}} = -f_{\text{тр}} p_{\text{сн}} S_{\text{кн}}, \quad (15)$$

где $f_{\text{тр}}$ – коэффициент трения; $p_{\text{сн}}$ – давление на дно снаряда. В этом случае

$$q_x^{\text{тр}}(x, t) = \frac{R_{\text{гл}}}{\Delta l_{\text{ch}}}. \quad (16)$$

Продольная сила, действующая на стенки канала ствола нарезного орудия, определяется по формуле [9]:

$$R_{\text{нар}} = -nN(\sin \alpha_{\text{нар}} + f_{\text{тр}} \cos \alpha_{\text{нар}}), \quad (17)$$

где n – число нарезов в канале; N – сила реакции; $f_{\text{тр}}$ – коэффициент трения; $\alpha_{\text{нар}}$ – угол наклона нарезов, определяется по формуле

$$\alpha_{\text{нар}} = \arctan \frac{\pi}{\eta}, \quad (18)$$

где $\eta = \frac{h}{d}$ – кривизна нарезов (вычисляется в калибрах); h – длина хода нарезов.

Сила реакции определяется по формуле

$$N = \frac{1}{n} \lambda \operatorname{tg} \alpha_{\text{нар}} \cdot p_{\text{сн}} S_{\text{кн}}, \quad (19)$$

где $\lambda = \left(\frac{\rho_J}{r_{\text{сн}}}\right)^2$ – безразмерный коэффициент, для осколочно-фугасных снарядов его значение находится в пределах 0,64...0,68; $\rho_J = \frac{J_{\text{сн}}}{q}$ –

радиус момента инерции снаряда; $J_{\text{сн}}$ – момент инерции снаряда относительно оси вращения. В случае нарезного орудия имеем:

$$q_x^{\text{тр}}(x, t) = \frac{R_{\text{нар}}}{\Delta l_{\text{ch}}}. \quad (20)$$

Уравнение продольных колебаний в вертикальной плоскости Oxy представляет собой бигармоническое уравнение вида

$$\rho F \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[(F\sigma - Sp) \frac{\partial v}{\partial x} \right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} EJ_z \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - q_y(x, t) = 0, \quad (21)$$

где $v = v(x, t)$ – поперечные деформации ствола в направлении оси Oy ; $J_z = J_z(x)$ – момент инерции ствола относительно оси z ; $q_y(x, t)$ – распределенные по длине ствола силы, действующие в направлении оси Oy .

Начальные условия для уравнения (21):

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad \left. \frac{\partial v(x, 0)}{\partial t} \right|_{t=0} = v_1(x), \quad (22)$$

где $v_0(x)$ – начальный прогиб ствола, который определяется из решения стационарной задачи, в которой рассматриваются только постоянная сила тяжести в направлении оси Oy ; $v_1(x)$ – начальная скорость ствола в направлении оси Oy .

Граничные условия закрепления будем рассматривать при $x = 0$:

$$v(0,t) = 0, \quad \left. \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0. \quad (23)$$

Условия свободного конца при $x=L$ имеют вид

$$\left. \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \right|_{x=L} = 0, \quad \left. \frac{\partial}{\partial x} \left(EJ_z \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \right) \right|_{x=L} = 0. \quad (24)$$

Распределенные силы для рассматриваемой системы запишем в виде

$$q_y(x,t) = -\rho g F \cos \varphi - q_y^{\text{сн}}(x,t), \quad (25)$$

где $q_y^{\text{сн}}(x,t)$ – массовая сила, действующая на ствол со стороны снаряда в направлении оси Oy :

$$q_y^{\text{сн}}(x,t) = \begin{cases} \rho_{\text{сн}} S_{\text{кн}} g \cos \varphi, & x \in [x_{\text{сн}}, x_{\text{сн}} + \Delta L_{\text{сн}}], \\ 0, & x \notin [x_{\text{сн}}, x_{\text{сн}} + \Delta L_{\text{сн}}]. \end{cases} \quad (26)$$

Отклонение $\gamma(t)$ угла $\theta = \theta(t)$ от угла возвышения φ определяется направлением касательной к линии канала ствола в точке дульного среза:

$$\gamma(t) = \theta(t) - \varphi = \arctan \left(\left. \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \right|_{x=L} \right).$$

Тогда угол бросания в момент достижения дна снаряда дульного среза t_d определяется по формуле

$$\theta_0 = \theta(t_d) = \varphi + \gamma. \quad (27)$$

Гравитационный прогиб ствола

Рассмотрим одномерное уравнение статического прогиба упругого стержня с одним закрепленным концом и со вторым свободным концом под действием сил тяжести. Уравнение для начальных продольных деформаций ствола $u_0 = u_0(x)$ в направлении оси Ox имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(FE \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) = P \frac{\partial S}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} [vSp(x,0)] - q_x(x,0), \quad (28)$$

с граничными условиями:

$$u_0(0) = 0, \quad \left. \frac{\partial u_0(x)}{\partial x} \right|_{x=L} = 0. \quad (29)$$

Уравнение для начального гравитационного прогиба ствола $v_0 = v_0(x)$ в вертикальной плоскости Oxy имеет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EJ_z \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(FE \frac{\partial u}{\partial x} - Sp \right) \frac{\partial v_0}{\partial x} \right] = q_y(x,0), \quad (30)$$

с граничными условиями:

$$v_0(0) = 0, \quad \left. \frac{\partial v_0(x)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 v_0(x)}{\partial x^2} \right|_{x=L} = 0, \quad (31)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} \left(EJ_z \frac{\partial^2 v_0(x)}{\partial x^2} \right) \right|_{x=L} = 0.$$

Основная задача внешней баллистики

Основной задачей внешней баллистики является отыскание закона изменения траектории полета снаряда от времени [10]. Рассмотрим систему уравнений внешней баллистики, описывающую движение снаряда. Снаряд движется в плоскости Oxy , ориентированной по направлению стрельбы (см. рис. 3), координаты центра масс снаряда описываются уравнениями [11]:

$$\frac{dx}{dt} = V_k \cos \beta, \quad \frac{dy}{dt} = V_k \sin \beta, \quad (32)$$

где x – продольная координата; y – высота полета снаряда; β – угол наклона траектории; V_k – скорость центра масс снаряда.

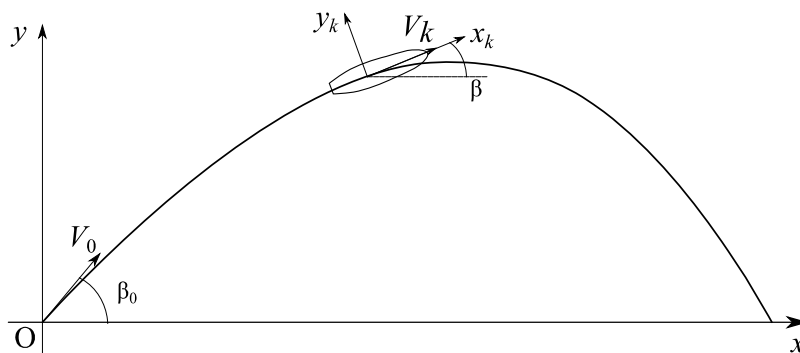


Рис. 3. Система координат для решения основной задачи внешней баллистики

Для определения параметров движения снаряда в траекторной системе координат $Ox_k y_k$, связанной с центром масс снаряда и ориентированной по вектору скорости, запишем уравнения:

$$\frac{dV_k}{dt} = -g \sin \beta - \frac{C_x q_b S_M}{m}, \quad (33)$$

$$\frac{d\beta}{dt} = -\frac{g \cos \beta}{V_k}, \quad (34)$$

где g – ускорение силы тяжести; m – полетная масса снаряда; $S_M = \pi d^2/4$ – площадь миделева сечения снаряда; d – калибр снаряда; C_x – коэффициент лобового сопротивления снаряда; $q_b = \rho M^2 a^2/2$ – скоростной напор воздуха; M – число Маха; a – скорость звука в воздухе.

Коэффициент лобового сопротивления снаряда рассчитывается по формуле

$$C_x = i_x C_x^{\text{эт}}(M), \quad (35)$$

где i_x – коэффициент аэродинамической формы снаряда; $C_x^{\text{эт}}(M)$ – эталонный коэффициент сопротивления, определяется из аппроксимации закона 1943 г. для осколочно-фугасных снарядов.

Начальными условиями для расчета внешнебаллистической траектории являются результаты решения ОЗВБ в момент достижения дна снаряда дульного среза:

$$x(t_d) = 0, \quad y(t_d) = 0, \quad V_k(t_d) = v_0, \quad \beta(t_d) = \beta_0 = \theta_0. \quad (36)$$

Начальная скорость снаряда $v_0 = v_{\text{сн}}(t_d)$ определяется из решения ОЗВБ. Угол бросания $\theta_0 = \theta(t_d)$ определяется из решения задач деформации и колебаний ствола под действием сил тяжести, давления пороховых газов и взаимодействия снаряда с каналом ствола.

Численные методы решения задач

Дифференциальные уравнения, описывающие задачи внутренней и внешней баллистики, решались методом Рунге – Кутты 4-го порядка точности.

Разностная аппроксимация дифференциальных уравнений в частных производных (10), (21), (28) и (30) проводилась интегроинтерполяционным методом [12], который позволяет построить разностную схему для моделей с негладкими и разрывными коэффициентами и получить наиболее точное физическое решение. Рассматривалась расчетная сетка во временной области $0 \leq t \leq T$:

$$\Xi = \left\{ t_n = n \cdot \tau \mid i \in \{0, 1, \dots, N\}, \tau = \frac{T}{N} \right\} \quad (37)$$

и пространственной области $0 \leq x \leq L$:

$$\Omega = \left\{ x_i = i \cdot h \mid i \in \{0, 1, \dots, I\}, h = \frac{L}{I} \right\}. \quad (38)$$

Разностная аппроксимация уравнения (10) имеет вид

$$\begin{aligned} \rho F_i \left(\frac{u_i^{n-2} - 2 \cdot u_i^{n-1} + u_i^n}{\tau^2} \right) - \frac{EF_{i-1/2} u_{i-1}^n - (EF_{i-1/2} + EF_{i+1/2}) u_i^n + EF_{i+1/2} u_{i+1}^n}{h^2} - \frac{2\nu}{h} (p_{i+1/2} S_{i+1/2} - p_{i-1/2} S_{i-1/2}) + \\ + \frac{p_i}{h} (S_{i+1/2} - S_{i-1/2}) + \rho F_i g \sin \phi + \frac{h_i}{h} \left(\rho_{\text{сн}} S_{\text{сн}} g \sin \phi - \frac{R}{\Delta L_{\text{сн}}} \right) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, I-1, \end{aligned} \quad (39)$$

где h_i – шаг интегрирования в области расположения движущегося снаряда определяется с учетом движения снаряда:

$$h_i = \begin{cases} 0, & (x_{i+1/2} < x_{\text{сн}}) \vee (x_{i-1/2} > x_{\text{сн}} + \Delta L_{\text{сн}}), \\ \min(x_{i+1/2}, x_{\text{сн}} + \Delta L_{\text{сн}}) - \max(x_{i-1/2}, x_{\text{сн}}), & \text{иначе.} \end{cases} \quad (40)$$

Разностная аппроксимация при $i=0$ и $i=I$ определяется с учетом граничных условий (12). Начальные значения определяются из соотношения (11):

$$u_i^0 = u_0(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, I. \quad (41)$$

$$\begin{aligned} & \rho F_i \left(\frac{v_i^{n-2} - 2 \cdot v_i^{n-1} + v_i^n}{\tau^2} \right) - (G_{i-1/2}^n v_{i-1}^n - (G_{i-1/2}^n + G_{i+1/2}^n) v_i^n + G_{i+1/2}^n v_{i+1}^n) + \\ & + E \frac{J_{i-1} \cdot v_{i-2}^n - 2 \cdot (J_{i-1} + J_i) \cdot v_{i-1}^n + (J_{i-1} + 4 \cdot J_i + J_{i+1}) \cdot v_i^n - 2 \cdot (J_i + J_{i+1}) \cdot v_{i+1}^n + J_{i+1} \cdot v_{i+2}^n}{h^4} + \\ & + \rho F_i g \cos \varphi + \frac{h_i}{h} \rho_{\text{сн}} S_{\text{сн}} g \cos \varphi = 0, \quad i = 2, 3, \dots, I-2, \end{aligned} \quad (42)$$

где $G_{i+1/2}^n$ – коэффициент, определяемый соотношением

$$G_{i+1/2}^n = \frac{E F_{i+1/2} \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h} - S_{i+1/2} P_{i+1/2}^n}{h^2}.$$

Разностная аппроксимация при $i=0, 1$ и $i=I-1, I$ определяется с учетом граничных условий (23) и (24). Начальные условия определяются из соотношения (22):

$$v_i^0 = v_0(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, I. \quad (43)$$

Начальные скорости из соотношения (22) используются для аппроксимации $n=1$ на 1-м шаге итераций. В результате неявной разностной аппроксимации получаем пятидиагональную систему линейных алгебраических уравнений относительно v_i^n , $i = 0, 1, \dots, I$, которая решается методом прогонки на каждой итерации по времени $n = 1, 2, \dots, N$.

Анализ численных результатов

Рассматриваемый ствол калибра 152 мм представляет собой толстостенный цилиндр, закрепленный в области казенного среза. Изме-

Начальные скорости из соотношения (11) используются для аппроксимации на 1-м шаге итераций при $n=1$. В результате неявной разностной аппроксимации получаем трехдиагональную систему линейных алгебраических уравнений относительно u_i^n , $i = 0, 1, \dots, I$, которая решается методом прогонки на каждой итерации по времени $n = 1, 2, \dots, N$.

Разностная аппроксимация уравнений, описывающих поперечные колебания (21), имеет вид

нение геометрии ствола представлено в табл. 1. Между указанными в таблице координатами x изменение радиусов принималось по линейному закону.

Таблица 1. Геометрия ствола 152-мм пушки

Координата x , м	Радиус r_1 , м	Радиус r_2 , м
0	0,110	0,17
2,5	0,076	0,12
7,6	0,076	0,1

Характеристики артиллерийской системы: $W_{\text{км}} = 0,073 \text{ м}^3$; $\rho = 7850 \text{ кг/м}^3$; $E = 200 \text{ ГПа}$; $v = 0,25$; $l = 7,56 \text{ м}$; $S_{\text{кн}} = 0,076 \text{ м}^2$; $i_x = 1,0$; $L_{\text{км}} = 1,015 \text{ м}$; $\omega = 19 \text{ кг}$; $q = 46 \text{ кг}$. Значения теплофизических характеристик пороха: $f = 0,9 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}$; $k = \frac{c_p}{c_v} = 1,228$;

$\alpha = 95 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{кг}$; $R = 346,9 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$.

Результаты расчета ОЗВБ, а именно: среднее давление, давление на дно канала ствола, давление на дно снаряда и скорость снаряда, – представлены на рис. 4.

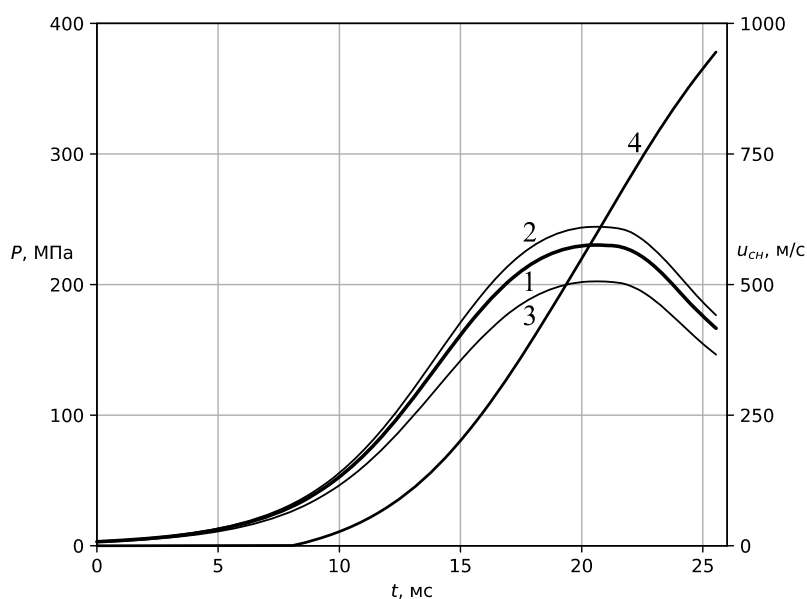


Рис. 4. Зависимости давления и скорости снаряда для 152-мм пушки от времени: 1 – давление; 2 – давление на дно канала; 3 – давление на дно снаряда; 4 – скорость снаряда

Гравитационный прогиб ствола, расположенного под углом возвышения $\phi = 40^\circ$, представлен на рис. 5. Сравнивая результаты прогиба в одномерном случае с решением в трехмерной постановке, полученным в системе конечно-элементного анализа ANSYS, видим, что результаты моделирования практически

совпадают. Максимальный гравитационный прогиб ствола достигается на дульном срезе: – 8,3 мм – при решении задачи в одномерной постановке и – 8,1 мм – в трехмерной постановке. Разность между полученными решениями составляет 2,5 %.

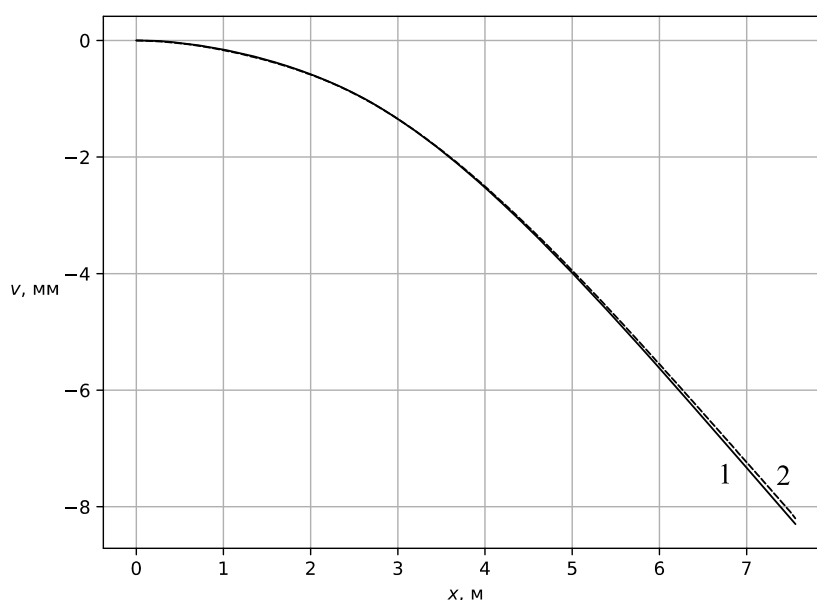


Рис. 5. Зависимость гравитационного прогиба ствола 152-мм пушки, расположенного под углом возвышения $\phi = 40^\circ$ от координаты: 1 – одномерная модель; 2 – трехмерная модель

Изменение величины поперечных колебаний дульного среза при выстреле представлены на рис. 6, где можно заметить, что они начинают развиваться в процессе выстрела, однако наи-

большие значения принимают после вылета снаряда из канала ствола, что может оказывать дополнительное влияние на последующие выстрелы из пушки в автоматическом режиме.

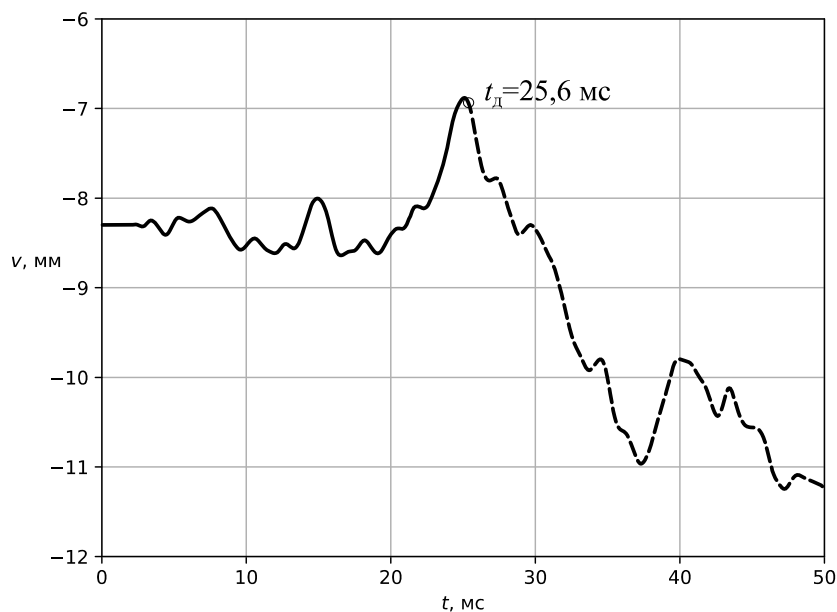


Рис. 6. Поперечные колебания дульного среза ствола в процессе выстрела $0 < t \leq t_d$ и после вылета снаряда из канала ствола ($t > t_d$)

В табл. 2 представлены зависимости дальности стрельбы от угла возвышения из 152-мм пушки с учетом и без учета деформаций и колебаний ствола.

Таблица 2. Сравнение результатов расчета внешней баллистики для 152-мм пушки

Угол возвышения $\varphi, ^\circ$	Угол бросания $\theta_0, ^\circ$	Дальность, м		Отклонение	
		Без деформации и колебаний ствола	С деформацией и колебаниями ствола	Абсолютное, м	Относительное, %
1° 18'	1° 08'	4000	3 604	-396	-9,90
10°	9° 50'	15 069	14 954	-115	-0,77
20°	19° 51'	20 827	20 756	-71	-0,34
30°	29° 51'	24 922	24 874	-48	-0,19
40°	39° 53'	27 706	27 681	-25	-0,09
50°	49° 54'	28 805	28 805	0	0,00
57°	56° 55'	28 130	28 148	18	0,06
60°	59° 55'	27 315	27 342	27	0,10

Как видно из таблицы, при учете деформаций и колебаний ствола дальность стрельбы изменяется в пределах от -396 м до 27 м в зависимости от угла возвышения. При этом чем ближе угол возвышения к значению 50°, тем меньше влияние деформации и колебаний на дальность стрельбы. Так, максимальное отклонение было получено при стрельбе прямой наводкой на расстояние 4 км и составило 9,9 %, что значительно больше остальных в других случаях.

Заключение

В работе представлена комплексная математическая модель процесса выстрела, позволяющая оценивать влияние деформации и колебаний ствола на дальность стрельбы. Как показали исследования, наибольшие деформации наблюдаются на дульном срезе и для рассматриваемого ствола 152-мм пушки в зависимости от угла возвышения могут достигать порядка 1 см. При этом решения в одномерной и в трехмерной постановках практически совпадают, что говорит о сопоставимой точности рассматриваемых моделей.

Как показали результаты численного моделирования, поперечные колебания ствола оказывают влияние на отклонения угла бросания снаряда от угла возвышения ствола. Учет этого отклонения при стрельбе из 152-мм пушки приводит к существенному уменьшению дальности стрельбы при малых углах бросания (до 10 %). При углах возвышения до максимальной дальности учет деформации приводит к уменьшению, а при углах возвышения после максимальной дальности — к увеличению дальности стрельбы.

Библиографические ссылки

1. Орлов Б. В., Ларман Э. К., Маликов В. Г. Устройство и проектирование стволов артиллерийских орудий: монография. М. : Машиностроение, 1976. 432 с.

2. *Stiavnický M, Lisý P.* Influence of barrel vibrations on the barrel muzzle position at the moment when the bullet exits // *Advanced Military Technology*. 2013. № 8 (issue 1). Pp. 89-102. http://aimt.unob.cz/articles/13_01/13_01%20%288%29.pdf.

3. *Yu Q., Yang G., Sun Q.* Dynamics analysis on barrel considering the temporal and spatial distribution of propellant gas by numerical simulation // *Journal of Vibroengineering*. 20(4). 2018. Pp. 1588-1602. DOI: 10.21595/jve.2018.19623

4. *Leonhardt D., Garnich M.* A Finite Element Model to Predict the Influence of Asymmetries on Barrel Dynamics in Small Arms // *Proceedings of 31st International Symposium on Ballistics, Hyderabad, India, 4-8 November 2019*. DOI: 10.12783/ballistics2019/33139

5. *Игнатов А. В., Богомолов С. Н., Федянин Н. Д.* Метод расчета свободных поперечных колебаний ствола автоматической пушки при заданном условии закрепления // *Известия Тульского государственного университета. Технические науки*. 2017. Вып. 11. Ч. 2. С. 70–77.

6. *Esen I.* A modified FEM for transverse and lateral vibration analysis of thin beams under a mass moving with a variable acceleration // *Latin American Journal of Solids and Structures*. 2017. Vol. 14. No. 3. pp. 485–511. DOI: 10.1590/1679-78253180

7. *Хоменко Ю. П., Ищенко А. Н., Касимов В. З.* Математическое моделирование внутрибаллистических процессов в ствольных системах : монография. Новосибирск : Изд-во СО РАН, 1999. 256 с.

8. *Русяк И. Г., Липанов А. М., Ушаков В. М.* Физические основы и газовая динамика горения порохов в артиллерийских системах: монография. М. ; Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2016. 456 с.

9. *Серебряков М. Е.* Внутренняя баллистика: монография. М. : Оборонгиз, 1949. 670 с.

10. *Дмитриевский А. А., Лысенко Л. Н.* Внешняя баллистика : монография. М. : Машиностроение, 2005. 608 с.

11. *Королев С. А., Суфиянов В. Г.* Решение задач внешнебаллистического проектирования на основе математического и компьютерного моделирования // *Интеллектуальные системы в производстве*. 2019. Т. 17. № 3. С. 80-88. DOI: 10.22213/2410-9304-2019-3-80-88

12. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Численные методы. М. : Наука, 1989. 432 с.

References

1. *Orlov B.V., Larman E.K., Malikov V.G.* *Ustroystvo i proyektirovaniye stvolov artilleriyskikh orudiy* [Arrangement and design of artillery barrels]. Moscow, Mashinostroyeniye Publ., 1976. 432 p. (in Russ.)

2. *Stiavnický M, Lisý P.* Influence of barrel vibrations on the barrel muzzle position at the moment when

the bullet exits // *Advanced Military Technology*. 2013. № 8 (issue 1). Pp. 89-102. http://aimt.unob.cz/articles/13_01/13_01%20%288%29.pdf

3. *Yu Q., Yang G., Sun Q.* Dynamics analysis on barrel considering the temporal and spatial distribution of propellant gas by numerical simulation // *Journal of Vibroengineering*. 20(4). 2018. Pp. 1588-1602. DOI: 10.21595/jve.2018.19623

4. *Leonhardt D., Garnich M.* A Finite Element Model to Predict the Influence of Asymmetries on Barrel Dynamics in Small Arms // *Proceedings of 31st International Symposium on Ballistics, Hyderabad, India, 4-8 November 2019*. DOI: 10.12783/ballistics2019/33139

5. *Ignatov A.V., Bogomolov S.N., Fedyanin N.D.* *Metod rascheta svobodnykh poperechnykh kolebaniy stvola avtomaticheskoy pushki pri zadannom uslovii zakrepleniya* [Calculation of free transverse automatic gun barrel vibrations under the specified conditions]. *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskiye nauki*. Izvestiya Tula State University. Technical sciences. 2017. No. 11. Part 2. pp. 70-77 (in Russ.)

6. *Esen I.* A modified FEM for transverse and lateral vibration analysis of thin beams under a mass moving with a variable acceleration // *Latin American Journal of Solids and Structures*. 2017. Vol. 14. No. 3. Pp. 485–511. DOI: 10.1590/1679-78253180

7. *Khomenko Yu. P., Ischenko A.N., Kasimov V.Z.* *Matematicheskoye modelirovaniye vnutriballisticheskikh protsessov v stvol'nykh sistemakh* [Mathematical modeling of interior ballistic processes in barrel systems]. Novosibirsk: Publishing House of SB RAS, 1999. 256 p. (in Russ.)

8. *Rusyak, I.G. Lipanov A.M., Ushakov V.M.* *Fizicheskiye osnovy i gazovaya dinamika goreniya porokhov v artilleriyskikh sistemakh* [Physical bases and gas dynamics of the combustion of gunpowder in artillery systems]. Moscow, Izhevsk, Institute of Computer Studies, 2016. 456 p. (in Russ.)

9. *Serebryakov M.Ye.* *Vnutrennyaya ballistika stvol'nykh sistem i porokhovyykh raket* [Internal ballistics of barrel systems and powder rockets]. Moscow, Oborongiz, 1962. 705 p. (in Russ.)

10. *Dmitrievsky A.A., Lysenko L.N.* *Vneshnyaya ballistika* [External Ballistics]. Moscow, Mashinostroyeniye. 2005. 608 p. (in Russ.)

11. *Korolev S.A., Sufiyarov V.G.* *Resheniye zadach vneshneballisticheskogo proyektirovaniya na osnove matematicheskogo i komp'yuternogo modelirovaniya* [solution of problems of external ballistic design on the basis of mathematical and computer modeling]. *Intellektual'nyye sistemy v proizvodstve* – Intelligent systems in manufacturing. № 3. 2019. pp. 80-88. (in Russ.) DOI: 10.22213/2410-9304-2019-3-80-88

12. *Samarskiy A.A.* *Chislennyye metody* [Numerical methods]. Moscow, Nauka Publ., 1989. 432 p. (in Russ.)

* * *

Study of Elastic Barrel Deformations and Vibrations Impact on Shooting Accuracy

I. G. Rusyak, DSc in Engineering, Professor, Kalashnikov ISTU, Izhevsk, Russia

V. G. Sufiyarov, DSc in Engineering, Associate Professor, Kalashnikov ISTU, Izhevsk, Russia

D. A. Klyukin, Master's Degree Student, Kalashnikov ISTU, Izhevsk, Russia

The paper presents the formulation of the problems of vibrations during a shot. A distinctive feature is the account of projectile interaction forces with the bore of a variable section barrel while taking into account the barrel's initial bending, which is found from solving the problem of gravitational deflection. To determine projectile motion forces, the problem of internal ballistics is solved in averaged parameters in the thermodynamic approximation. An implicit second order of the accuracy scheme in time and space was applied to solve barrel vibrations' problems. Comparing the solutions obtained in the ANSYS finite element analysis system in a three-dimensional formulation with the solution of the problem in a one-dimensional formulation is carried out. Calculation of the projectile external ballistic trajectory was carried out by solving a system of differential equations with the initial conditions determined from the internal ballistics problem's solutions and the barrel transverse vibrations in the vertical plane. The influence of barrel vibrations on the angle of departure was studied, the range of the projectile flight was determined for different firing conditions. It is shown that the deviations caused by deformation and vibrations of the barrel during firing from the gun considered in this work lead to a decrease in the firing range at small elevation angles and an increase in the range at large elevation angles. The results obtained make it possible to determine corrections of departure angle arising from the barrel vibrations on firing.

Keywords: artillery system; mathematical modelling; elastic vibrations of barrel; internal ballistics; external ballistics; angle of departure.

Получено: 14.10.2020