

УДК 531.383

DOI: 10.22213/2410-9304-2021-3-12-24

Имитационное моделирование точности идентификации характеристик твердотельного волнового гироскопа с настройкой вычислительных алгоритмов на периодичность сигналов

Р. И. Мингазов, аспирант, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова, Ижевск, Россия

К. В. Шишаков, доктор технических наук, доцент, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова, Ижевск, Россия

Описана настройка вычислительных алгоритмов для четырех методик идентификации волновых характеристик в режиме свободного выбега стоячих волн в резонаторе интегрирующего твердотельного волнового гироскопа по наблюдениям за сигналами его измерительного устройства на временных интервалах, кратных периоду колебаний резонатора.

В первой, наиболее грубой методике производится обработка результатов измерений без учета влияния квадратурной волны. Она удобна для формирования начальных приближений в задачах уточняющей оптимизации функционалов идентификации в остальных методиках. Во второй методике уточненная обработка результатов измерений выполняется с учетом фазового сдвига сигналов измерительного устройства. В третьей методике, в целях лучшей физической наглядности, для обработки результатов измерений введен виртуальный переход к подвижным осям стоячих волн. В четвертой методике обработка результатов измерений производится с использованием численных процедур цифровой демодуляции.

Выполнено сравнение точности перечисленных методик идентификации методами имитационного моделирования для теоретически задаваемых исходных сигналов. Это позволило непосредственно сравнить исходные и идентифицированные характеристики волновых процессов: амплитуды основной и квадратурной стоячих волн, угол нахождения основной стоячей волны и ее частоту. Приведены результаты при отсутствии и наличии шумов в измерительных сигналах.

Полученные результаты показывают особенности практического применения разных методик для реальных образцов гироскопов. Для коротких интервалов идентификации в них требуется специальный выбор длин интервалов, равных конечному числу периодов колебаний резонатора. С удлинением таких интервалов это требование к длине интервала ослабляется.

Ключевые слова: твердотельный волновой гироскоп, резонансные колебания, волновая картина, идентификация, свободный выбег стоячих волн, методики, измерения, вычислительный алгоритм.

Введение

Производственный цикл изготовления интегрирующих твердотельных волновых гироскопов (ТВГ), работающих в режиме датчика угла, включает разные сопровождающие технологические операции контроля балансировки, разночастотности, разнодобротности и другие [1–3 и др.]. Эти операции обычно выполняются через измерение динамических характеристик стоячих волн резонатора. При этом последние оказываются наиболее сильно связанными с механическими параметрами резонатора в режиме его свободных колебаний (также называемого режимом свободного выбега стоячих волн), когда выключают систему активной параметрической подкачки резонансных колебаний.

В настоящее время интерес исследователей, аналитиков и инженеров к теории погрешностей гироскопов не ослабевает [4–9 и др.], так как это имеет непосредственный выход на технологические операции повышения точности их изготовления и настройки [10, 11 и др.]. Одной из таких

актуальных задач является проведение текущей идентификации волновых характеристик гироскопов [12–15 и др.] в процессе их производственного контроля и предэксплуатационной настройки.

Целью статьи является анализ параметрической настройки таких вычислительных алгоритмов идентификации для интегрирующего твердотельного волнового гироскопа в режиме свободного выбега его стоячих волн в резонаторе, а также проведение сравнительного анализа точности отличающихся методик идентификации волновых характеристик по сигналам измерительного устройства ТВГ на временных интервалах, кратных периоду колебаний резонатора.

Подробности теоретического обоснования рассматриваемых ниже методик идентификации приведены в статье авторов «Методики исследования свободного выбега стоячих волн в твердотельном волновом гироскопе», в № 3 этого журнала за 2020 год. Также физический смысл использованных зависимостей детально разъяс-

няется в [16]. Введение в данной статье дополнительного ограничения на выбор длины интервалов идентификации, кратных периоду колебаний резонатора, позволяет существенно упростить предлагаемые вычислительные математические алгоритмы.

Заметим, что в общем случае на выбор длины интервала идентификации влияет постановка задачи идентификации. Так, для технологических операций контроля и настройки волновых процессов резонатора гироскопа эта длина выбирается исходя из характерного времени замороженности идентифицируемых параметров и с учетом силы шумов измерений.

Также подчеркнем перспективность использования рассматриваемых ниже алгоритмов для повышения точности сигналов ТВГ в его эксплуатационных режимах. При этом для быстродействующих внутренних контуров управления гироскопом интервалы идентификации может потребоваться уменьшить до одного или нескольких периодов колебаний резонатора.

Математическая постановка задачи идентификации

Для того чтобы всемерно понять достоинства и недостатки разных методик, их исследование в данной статье проведем методами имитационного моделирования. Это позволит непосредственно сравнивать исходные и идентифицированные характеристики волновых процессов в твердотельных волновых гироскопах. Тем самым будут определены рекомендуемые условия использования разных методик на реальных образцах ТВГ.

Исследуемыми волновыми характеристиками в режиме свободного выбега стоячих волн в резонаторе интегрирующего гироскопа выберем следующие медленно изменяемые (по сравнению с резонансными колебаниями) переменные, входящие в функцию деформации W кромки полусферического резонатора:

$$W(\theta, t) = A(t) \cdot \cos 2(\theta - \theta_A(t)) + B(t) \cdot \sin 2(\theta - \theta_A(t));$$

$$A(t) = a_A(t) \cdot \cos [\omega(t) \cdot t - \alpha(t)], B(t) =$$

$$= a_B(t) \cdot \sin [\omega(t) \cdot t - \alpha(t)]. \quad (1)$$

Это амплитуда a_A основной (рабочей) стоячей волны, амплитуда a_B квадратурной стоячей волны, угол расположения основной стоячей волны θ_A (относительно осей измерительного устройства), начальная фаза α . А также будем допускать возможность слабого изменения частоты ω , например, из-за изменения внутреннего температурного режима или при работе систе-

мы электронной коррекции осей жесткости резонатора.

Здесь и везде далее принимаем $a_A(t) > 0$, а знак a_B условно будем считать произвольным: $a_B(t) := \pm a_B(t)$ (чтобы не усложнять формулы, вводя скачок фазы на π при смене знака $B(t)$).

На всем длительном периоде затухания свободных колебаний резонатора (для высокочастотных резонаторов он многократно превышает период своих резонансных колебаний) будут иметь место временные зависимости этих характеристик: $a_A(t)$, $a_B(t)$, $\theta_A(t)$, $\omega(t)$, причем скорость их изменения будет зависеть в первую очередь от скорости углового поворота основания гироскопа. Так, угол стоячей волны $\theta_A(t)$ будет изменяться с пропорциональной скоростью, медленнее будет изменяться амплитуда $a_B(t)$ квадратурной волны, еще медленнее – амплитуда $a_A(t)$ рабочей волны и совсем медленно – частота $\omega(t)$.

Для решения задачи идентификации этих временных зависимостей наиболее просто весь период наблюдения разбить на относительно короткие интервалы, внутри которых восстанавливаемые величины $\{a_A, a_B, \theta_A, \omega, \alpha\}$ можно считать условно постоянными. В этом случае получим множество независимых задач идентификации этих пяти постоянных величин на скользких временных интервалах. Длина таких интервалов выбирается с учетом установленной на стенде скорости вращения основания ТВГ, выбор которой зависит от прогнозируемых условий эксплуатации гироскопа. Так, при медленных скоростях вращения будем иметь достаточно длинные интервалы идентификации, а при очень быстром вращении основания ТВГ длина таких интервалов может стать сравнимой с несколькими периодами резонансных колебаний.

Из-за того что задачи дискретной идентификации решаются независимо, временная координата может быть выбрана как текущей, так и локальной, причем последний вариант удобнее. Это связано с тем, что в первом варианте используется машинное время t , единое сквозное для всех подынтервалов идентификации. При этом начальная фаза α будет постоянной величиной, но задачи идентификации на всех подынтервалах окажутся взаимосвязанными через нее.

Во втором же варианте для каждого подынтервала идентификации используется свое локальное время. Однако начальные точки дискретного отсчета времени на таких разных интервалах в общем случае могут различаться по

отношению к началу периода колебаний резонатора, поэтому фаза станет некоторой вспомогательной функцией времени $\alpha(t)$. Преимуществом такой постановки является независимость локальных задач идентификации. Так как начальная фаза α явной информации о волновом процессе не несет, поэтому в результатах исследования ее приводить не будем. Тем не менее ее анализ может оказаться полезным для контроля вычислений. Во-первых, $\alpha(t)$ будет характеризовать рассогласование сетки временной дискретизации с периодами резонансных колебаний. Во-вторых, ее «странное» восстановленное значение будет указывать на ошибки и сбои в работе выбранного алгоритма идентификации.

На практике возможны случаи, когда такие интервалы следуют друг за другом непрерывно (обычный режим), или с пропусками (может быть использован в режиме медленного изменения волновой картины для покоящегося гироскопа), или со взаимным наложением друг на друга (для реализации аналога скользящего усреднения при больших шумах измерений).

На этих подынтервалах представляет интерес исследование влияния на точность идентификации следующих условий: числа использованных периодов усреднения; частоты дискретизации измерений; меры нарушения периодичности при выборе длины интервалов идентификации. При этом основные свойства алгоритмов удобнее выявлять при отсутствии шумов измерений. А влияние силы шумов измерений на получающиеся результаты изучим после выбора эффективных значений предыдущих параметров.

Измеряемыми величинами выбираем сигналы $S_C(t)$ и $S_D(t)$ емкостного устройства в измерительных осях гироскопа:

$$S_C(t) = C(t) + \varepsilon_C(t), \quad S_D(t) = D(t) + \varepsilon_D(t); \quad (2)$$

$$\begin{aligned} C(t) &= A(t) \cos 2\theta_A(t) - B(t) \sin 2\theta_A(t) = \\ &= a_C(t) \cos [\omega(t)t - \varphi_C(t)]; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} D(t) &= A(t) \sin 2\theta_A(t) + B(t) \cos 2\theta_A(t) = \\ &= a_D(t) \cos [\omega(t)t - \varphi_D(t)], \end{aligned}$$

где ε_C и ε_D – шумы измерений; $a_C(t)$, $a_D(t)$ и $\varphi_C(t)$, $\varphi_D(t)$ – соответственно медленно изменяющиеся амплитуды и фазы измеряемых сигналов.

В общем случае можно считать, что данные сигналы уже являются результатом предварительной обработки физически измеряемых сигналов, которая включает их центрирование и фильтрацию аналоговыми и цифровыми фильтрами низких частот (ФНЧ):

$$\begin{aligned} S_C(t) &:= \text{ФНЧ} [S_C(t) - (S_C)_{\text{среднее}}], \\ S_D(t) &:= \text{ФНЧ} [S_D(t) - (S_D)_{\text{среднее}}]. \end{aligned} \quad (4)$$

Для удобства и упрощения последующих формул, по аналогии со снятием ограничений на знак $a_B(t) := \pm a_B(t)$, в выражениях (3) будем условно принимать произвольные знаки амплитуд $a_C := \pm a_C$, $a_D := \pm a_D$. Так, например, в случаях малой квадратурной волны ($a_B/a_A \rightarrow 0$) из (3) с учетом (1) приближенно имеем: $a_C \approx a_A \cos 2\theta_A$, $a_D \approx a_A \sin 2\theta_A$. При этом функции $a_C(t)$ и $a_D(t)$ при непрерывном изменении угла $\theta_A(t)$ будут непрерывно изменяться с возможностью смены знака. Если бы эти амплитуды (a_C и a_D) считали только положительными, тогда пришлось бы изменение знаков «переносить» в формулы через добавление π к фазам φ_C, φ_D .

В то же время везде принимаем $a_A > 0$, так как это физически понятное требование задает в соответствии с (1) начальную фазу α . Нахождение же других амплитуд a_B , a_C , a_D для удобства часто будем заменять идентификацией их квадратов: a_B^2 , a_C^2 , a_D^2 , то есть вычислять с точностью до знака. При этом обычно будет иметь место: $\varphi_C, \varphi_D \rightarrow \alpha$. В последующем, на этапе интерпретации полученных результатов, уточнить знаки амплитуд и полупериоды расположения фаз можно будет из проверки соответствий:

$$\begin{aligned} S_C(t) &\approx a_C \cos [\omega t - \varphi_C], \quad S_D(t) \approx a_D \cos [\omega t - \varphi_D]; \\ S_A(t) &= S_C(t) \cos 2\theta_A + S_D(t) \sin 2\theta_A \approx \\ &\approx a_A \cos [\omega t - \alpha], \\ S_B(t) &= -S_C(t) \sin 2\theta_A + S_D(t) \cos 2\theta_A \approx \\ &\approx a_B \sin [\omega t - \alpha]. \end{aligned} \quad (5)$$

Так, если для какой-либо из фаз φ_C, φ_D сигналов S_C , S_D получится отрицательная амплитуда, тогда к соответствующей фазе надо будет добавить π и поменять знак амплитуды на положительный. То же самое относится и к сигналу S_B .

Критерием идентификации принимаем усредненный по ансамблю измерений функционал ошибки с учетом структур зависимостей (1)–(3):

$$J = \langle \{ [S_C(t) - C(t)]^2 + [S_D(t) - D(t)]^2 \} \rangle \Rightarrow \min, \quad (6)$$

где угловыми скобками обозначено усреднение по дискретному времени измерительного устройства:

$$\langle f \rangle \equiv \sum_i^m f / m. \quad (7)$$

В рассматриваемой статье при идентификации на коротких интервалах для упрощения вычислительных алгоритмов решения сильно нелинейных задач (2)–(6) интервалы усреднения T будем выбирать из условия сохранения дискретной ортогональности функций:

$$\langle \cos(\omega t + \alpha) \cdot \sin(\omega t + \alpha) \rangle = \langle \sin 2(\omega t + \alpha) \rangle \rightarrow 0, \quad (8)$$

которое упрощает математический вывод итоговых формул алгоритмов.

Это требование для любых α сведется к двум условиям: $\langle \sin 2\omega t \rangle \rightarrow 0$ и $\langle \cos 2\omega t \rangle \rightarrow 0$. Для коротких интервалов T на непрерывном времени они выполняются при $\omega T = n\pi$ (n – целое число). А для длинных интервалов T с учетом усреднения (7) – для произвольных сеток временной дискретизации. Следовательно, при нарушении соответствия $\omega T = n\pi$ интервал усреднения должен быть выбран по возможности длиннее.

На практике для обеспечения (8) на дискретном времени можно поступить следующим образом. Так как $S_C(t) \approx a_C \cos[\omega t - \varphi_C]$, $S_D(t) \approx a_D \cos[\omega t - \varphi_D]$, поэтому интеграл от них на периоде $T = 2\pi n / \omega$ должен стремиться к нулю. Тогда набор точек дискретных измерений при суммировании (7) следует выполнять до тех пор, пока не получим на выбранном n числе периодов (с учетом ослабления влияния шумов измерений):

$$\sum_{i=1}^m S_C(t) / m \rightarrow 0, \quad \sum_{i=1}^m S_D(t) / m \rightarrow 0, \quad (9)$$

что будет указывать на $\omega T \approx 2n\pi$.

Так как здесь при замене интегрирования на суммирование неявно присутствуют длины элементарных интервалов Δt , поэтому рассчитанное значение периода составит $T = m \cdot \Delta t$. Отсюда дополнительно будем иметь и грубую оценку частоты $\omega \approx 2n\pi / T$.

Заметим, что при произвольном выборе начальных значений сигналов в (9) на каждом из периодов появятся еще по одной дополнительной внутренней нулевой точке, которые следует отслеживать и пропускать.

Для исключения контроля таких лишних внутренних нулевых точек можно заменить (9) на следующую задачу минимизации на одном периоде (при $n = 1$):

$$\begin{aligned} \sum \{ [S_C(t) - S_C(t - T)]^2 + [S_D(t) - S_D(t - T)]^2 \} \Rightarrow \\ \Rightarrow \min(T). \end{aligned} \quad (10)$$

Погрешность (10) будет определяться в основном неравномерностью и несогласованностью сетки временной дискретизации. Для таких случаев в реальном эксперименте (особенно при малых n) может потребоваться переформатирование временной сетки дискретизации. Так, если (8) будет плохо выполняться на сетках АЦП реальных сигналов измерительного устройства, тогда можно сначала полученные дискретные значения сигналов пропустить через фильтр низких частот, а потом перевести их в новую дискретную форму на заранее выбранной нужной сетке по времени (которая будет зависеть от оценки частоты ω). Такое переформатирование окажется полезным и в условиях больших шумов измерений, так как предварительная низкочастотная фильтрация сигналов будет дополнительно уменьшать влияние шумов.

Найденную по формулам (9) или (10) оценку $\omega \approx 2\pi/T$ часто можно принимать за результат предварительной идентификации частоты ω с поющим уточнением, согласованным с алгоритмом идентификации.

Ниже проведем сравнение точности разных методик идентификации волновых характеристик на интервалах выполняемости (8) для теоретически задаваемых исходных сигналов на достаточно коротких интервалах, когда их параметры $\{a_A, a_B, \theta_A, \omega, \alpha\}$ можно считать постоянными величинами:

$$A(t) = a_A \cos[\omega t - \alpha], \quad B(t) = a_B \sin[\omega t - \alpha]. \quad (11)$$

Идентифицируемые параметры в такой постановке задачи тоже считаются постоянными величинами на выбранных коротких временных интервалах наблюдения волновых процессов.

В первой наиболее грубой методике производится обработка результатов измерений без учета влияния квадратурной волны. Она удобна для формирования начальных приближений в задачах уточняющей оптимизации функционалов идентификации в остальных методиках. Во второй методике уточненная обработка результатов измерений выполняется с учетом фазового сдвига сигналов измерительного устройства. В третьей методике в целях лучшей физической наглядности для обработки результатов измерений введен виртуальный переход к подвижным осям стоячих волн. В четвертой методике обработка результатов измерений производится с использованием численных процедур цифровой демодуляции.

В качестве вычислительной основы этих методик выбраны рассматриваемые ниже алгоритмы.

Алгоритм 1 – алгоритм обработки результатов измерений без учета влияния квадратурной волны

Он характеризуется пониженной точностью, так как здесь пренебрегают влиянием квадратурной волны. Сначала по формулам (9) или (10) выбирается интервал идентификации T с учетом требования (8), а также оценивается частота резонансных колебаний ω .

Далее при $\omega T \approx n\pi$ выполняем расчет по формулам:

$$a_B = 0; a_A = [2 \langle (S_C^2 + S_D^2) \rangle]^{1/2}; \quad (12)$$

$$\text{tg } 2\theta_A = [\langle S_D^2 \rangle / \langle S_C^2 \rangle]^{1/2} \cdot \text{sign}[\langle S_D / S_C \rangle];$$

В общем случае для нахождения $\text{tg } 2\theta_A$ можно также использовать более простую формулу, не требующую обязательного выполнения условия (8):

$$\text{tg } 2\theta_A \approx \langle S_D / S_C \rangle. \quad (13)$$

Однако в выполненных расчетах оказалось, что точность (13) часто получается на порядок хуже по сравнению с (12). Для повышения точности здесь рекомендуется исключать из усреднения точки дискретизации с малыми значениями S_C (сравнимыми с уровнями шумов).

Такие же точки надо удалять при расчете знака $\text{sign}[\langle S_D / S_C \rangle]$, чтобы случайно он не переключился на ложный.

Кроме этого, в данном алгоритме получалось, что точность восстановления угла θ_A ухудшалась с увеличением периода идентификации из-за пренебрежения вкладом квадратурной волны.

Заметим, что одинаковое значение $\text{tg } 2\theta_A$ дают 4 угла: $\theta_A, \theta_A + \pi/2, \theta_A + \pi, \theta_A + 3\pi/2$. Физически они определяют собой угловые направления рабочей стоячей волны. Так как выбор соответствующего угла связан с выбором фазы α , для определенности в начальный момент времени можно выбирать первый из них. При идентификации на следующих по времени интервалах рекомендуется соблюдать условие неразрывности угла.

При необходимости нахождения фазы α потребуется решить дополнительную задачу минимизации функционала ошибки:

$$J = \langle [S_C - a_A \cos t \cos 2\theta_A]^2 + [S_D - a_A \cos t \sin 2\theta_A]^2 \rangle =$$

$$= a_A^2 - 2a_A \{ \cos \alpha \cdot (CC \cos 2\theta_A + DC \sin 2\theta_A) + \sin \alpha \cdot (CS \cos 2\theta_A + DS \sin 2\theta_A) \} \Rightarrow \min(\alpha); \quad (14)$$

$$\partial J / \partial \alpha = 0 \Rightarrow \text{tg } \alpha = \langle S_A(t) \sin \omega t \rangle / \langle S_A(t) \cos \omega t \rangle,$$

где обозначены:

$$CC = \langle S_C(t) \cos \omega t \rangle, CS = \langle S_C(t) \sin \omega t \rangle,$$

$$DC = \langle S_D(t) \cos \omega t \rangle, DS = \langle S_D(t) \sin \omega t \rangle;$$

$$S_A(t) \text{ вычисляется с помощью (5); } \tau \equiv \omega t - \alpha;$$

частота ω выбирается из решения задачи (10) (или (9)).

При этом согласовать выбор α или $\alpha + \pi$ можно простым перебором соответствующих знаков для достижения наименьшего значения J в (14).

Итак, в данном алгоритме полагаем $a_B = 0$, параметры $\{a_A, \theta_A\}$ вычисляем непосредственно из (12), а начальную фазу α находим по оценке частоты ω , которую берем из решения задачи (10).

Если же дополнительно требуется уточнить значение частоты, тогда выполняется дополнительная внешняя минимизация функционала (14) по частоте: $J \Rightarrow \min(\omega)$. Наиболее просто это сделать простым перебором частоты с шагом, например, 1 Гц в небольшой окрестности от ранее найденной по формуле (10) или (9) ее оценки.

Для ускорения поиска точки минимума в последней задаче можно также попробовать заменить гладкий функционал (14) на следующий негладкий функционал с более сильно выраженным минимумом:

$$J = \langle |S_C(t) - a_A \cos(\omega t - \alpha) \cos 2\theta_A| + |S_D(t) - a_A \cos(\omega t - \alpha) \sin 2\theta_A| \rangle \Rightarrow \min(\omega). \quad (15)$$

Рассмотренный простой вариант алгоритма идентификации (10), (12), (14) на практике может быть использован для случаев очень малой квадратурной волны, сравнимой с шумами измерений. Он также удобен как начальное приближение для последующих, более точных алгоритмов идентификации. Кроме этого, при исследовании реальных образцов ТВГ полученные с его помощью результаты рекомендуется выбирать в качестве базы для сравнения остальных методик повышенной точности.

Алгоритм 2 – алгоритм обработки результатов измерений с учетом фазового сдвига сигналов измерительного устройства

Здесь дополнительный учет фазового рассогласования $\Delta\varphi_{CD} = \varphi_C - \varphi_D$ измерительных сигналов позволяет идентифицировать вклад малой квадратурной волны с амплитудой a_B .

Как и ранее, при выводе нижеследующих формул используется условие (8) для выбора T , чтобы нейтрализовать вклад гармонических сигналов на удвоенной частоте.

Поэтому сначала решается задача (10), из которой находятся T и первая оценка частоты $\omega \approx 2\pi/T$. Далее сразу вычисляются $\{a_A, a_B, \theta_A\}$:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}4\theta_A &= 2 a_C a_D \cos \Delta\varphi_{CD} / (a_C^2 - a_D^2) \approx \\ &\approx 2 \langle S_C \cdot S_D \rangle / [\langle S_C^2 \rangle - \langle S_D^2 \rangle]; \\ E^2 &\equiv a_C^2 + a_D^2 + 2a_D a_C \sin \Delta\varphi_{CD} \approx \\ &\approx 2 [\langle S_C^2 \rangle + \langle S_D^2 \rangle] + 4 \langle S_C(t) \cdot S_D(t - t_3) \rangle, \\ F^2 &\equiv a_C^2 + a_D^2 - 2a_D a_C \sin \Delta\varphi_{CD} \approx \\ &\approx 2 [\langle S_C^2 \rangle + \langle S_D^2 \rangle] - 4 \langle S_C(t) \cdot S_D(t - t_3) \rangle, \\ a_A &= (E + F) / 2, \quad a_B = (E - F) / 2. \end{aligned} \quad (16)$$

Заметим, что в (16) введена временная задержка сигнала t_3 , которая для непрерывного времени точно равна четверти периода: $t_3 \equiv \pi / 2\omega$. А для дискретных временных отсчетов она будет выбираться с малой погрешностью. Ее выбор рекомендуется проверять с учетом (5) из решения задач:

$$\begin{aligned} 2 S_D(t) S_D(t - t_3) &= a_D^2 \sin 2(\omega t - \varphi_D) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \langle S_D(t) \cdot S_D(t - t_3) \rangle \rightarrow 0; \\ 2 S_C(t) S_C(t - t_3) &= a_C^2 \sin 2(\omega t - \varphi_C) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \langle S_C(t) \cdot S_C(t - t_3) \rangle \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Начальная фаза α при необходимости может быть идентифицирована через решение задачи минимизации функционала ошибки, получаемого после подстановок (1) и (3) в (6):

$$\begin{aligned} J &= \langle \{ [S_C(t) - (a_A \cos t \cos 2\theta_A - a_B \sin t \sin 2\theta_A)]^2 + \\ &+ [S_D(t) - (a_A \cos t \sin 2\theta_A + a_B \sin t \cos 2\theta_A)]^2 \} \rangle; \\ \tau &\equiv \omega t - \alpha. \end{aligned} \quad (18)$$

Из условия $\partial J / \partial \alpha = 0$ получаем:

$$\operatorname{tg} \alpha = [\langle S_A(t) \sin \omega t \rangle - (a_B/a_A) \cdot \langle S_B(t) \cos \omega t \rangle] / [\langle S_A(t) \cos \omega t \rangle + (a_B/a_A) \cdot \langle S_B(t) \sin \omega t \rangle], \quad (19)$$

где $(a_B/a_A) \rightarrow 0$, а $S_A(t)$, $S_B(t)$ вычисляются с помощью (5) по найденному θ_A .

Далее, как и в первом алгоритме, с помощью найденной фазы α можно попробовать уточнить частоту через решение задачи $J \Rightarrow \min(\omega)$ простым перебором с шагом 1 Гц в небольшой окрестности.

При использовании данного алгоритма рекомендуется дополнительно контролировать изменения разности фаз измерительных сигналов:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \Delta\varphi_{CD} &= \langle S_C(t) \cdot S_D(t - t_3) \rangle / \langle S_C(t) \cdot S_D(t) \rangle, \\ &(\omega t_3 = \pi/2). \end{aligned} \quad (20)$$

Так, при нахождении рабочей стоячей волны в угловых секторах между измерительными осями должно наблюдаться $\operatorname{tg} \Delta\varphi_{CD} \rightarrow 0$, а в моменты прохождения измерительных осей: $\operatorname{ctg} \Delta\varphi_{CD} \rightarrow 0$.

Алгоритм 3 – алгоритм обработки результатов измерений с переходом к подвижным осям стоячих волн (A, B)

Он представляет собой отличающуюся математическую форму предыдущего алгоритма, в которой упрощается расчет амплитуд стоячих волн (16).

Здесь, как и в алгоритме 2, сначала решается задача (10). Из нее находятся T и выполняется первая оценка частоты $\omega \approx 2\pi/T$. Далее временной интервал идентификации выбирается кратным T , а угол θ_A вычисляется из (16):

$$\operatorname{tg}4\theta_A = 2 \langle S_C \cdot S_D \rangle / [\langle S_C^2 \rangle - \langle S_D^2 \rangle]. \quad (21)$$

По найденному θ_A , используя преобразования (5), измерительные сигналы $S_C(t)$, $S_D(t)$ преобразуются в сигналы $S_A(t)$, $S_B(t)$ и находятся амплитуды:

$$a_A^2 \approx 2 \langle S_A^2 \rangle, \quad a_B^2 \approx 2 \langle S_B^2 \rangle. \quad (22)$$

Начальная фаза α , если это требуется, вычисляется из минимизации функционала ошибки:

$$\begin{aligned} J &= \langle [S_A - a_A \cos(\omega t - \alpha)]^2 \rangle + \\ &+ \langle [S_B - a_B \sin(\omega t - \alpha)]^2 \rangle. \end{aligned} \quad (23)$$

При этом нетрудно показать, что решение задачи $\partial J / \partial \alpha = 0$ приведет к прежней формуле (19).

Такой расчет α потребуется, например, если ставится задача уточнения частоты через решение задачи $J \Rightarrow \min(\omega)$. Ее наиболее просто решать обычным перебором с шагом 1 Гц в малой окрестности.

К удобству алгоритма 3 можно отнести более простую вычислительную схему, не требующую оценки t_3 при расчетах в (16). А также здесь имеем лучшую физическую наглядность и интерпретацию результатов (непосредственно в параметрах рабочей и квадратурной стоячих волн).

Алгоритм 4 – алгоритм обработки результатов измерений с использованием процедур цифровой демодуляции

В нем цифровая демодуляция выполняется умножением измерительных сигналов на гармонические сигналы с некоторой выбранной начальной фазой φ_0 . Их частота ω и период усреднения T могут быть найдены из решения задачи

(10). Далее рассчитываются следующие вспомогательные усредненные параметры:

$$\begin{aligned} C_x &= 2 \langle S_C(\tau) \cos(\tau + \Phi) \rangle, \\ C_y &= 2 \langle S_D(\tau) \cos(\tau + \Phi) \rangle, \\ S_x &= 2 \langle S_C(\tau) \sin(\tau + \Phi) \rangle, \\ S_y &= 2 \langle S_D(\tau) \sin(\tau + \Phi) \rangle; \\ E &= S_x^2 + C_x^2 + S_y^2 + C_y^2; \\ Q &\equiv 2 (S_y C_x - S_x C_y); \\ R &\equiv S_x^2 + C_x^2 - S_y^2 - C_y^2; \quad S \equiv 2 (S_x S_y + C_x C_y); \\ L &\equiv 2 (S_x C_x + S_y C_y), \end{aligned} \quad (24)$$

где $\Phi \equiv \alpha - \varphi_0$, $\tau \equiv \omega t - \alpha$.

С их помощью находятся:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 4\theta_A &= S/R; \quad a_A^2 - a_B^2 = (S^2 + R^2)^{1/2}; \\ \sin 4\theta_A &= S/(a_A^2 - a_B^2), \quad \cos 4\theta_A = R/(a_A^2 - a_B^2); \\ \sin 2\Phi &= L/(a_A^2 - a_B^2) \Rightarrow \alpha = \Phi + \varphi_0; \\ a_A + a_B &= (E + Q)^{1/2}, \quad a_A - a_B = (E - Q)^{1/2} \Rightarrow (a_A, a_B). \end{aligned} \quad (25)$$

При необходимости частота ω может быть уточнена из решения задачи: $J \Rightarrow \min(\omega)$, в которой функционал J выбирается в виде (23) или (18), а знак a_B выбирается с учетом зависимости: $Q \equiv 2 a_A a_B$.

Заметим, что на основе данной методики (24), (25) можно также прогнозировать эффективность использования аналоговых устройств демодуляции сигналов.

Результаты сравнения точности методик идентификации

Выполним имитационное моделирование в пакете прикладных программ Scilab для сравнения точности описанных выше методик идентификации волновых характеристик. Для этого будем математически задавать исходные сигнала

лы (1) с последующим преобразованием по формулам (2), (3) в имитационные измерительные сигналы. При этом ограничимся небольшими интервалами идентификации, когда значения искомого параметров сигналов можно считать постоянными величинами.

В расчетах для определенности с учетом накопленного опыта задавались следующие исходные данные: $a_A = 2$ (нормированная безразмерная величина), $a_B = 0,1$ (нормированная безразмерная величина), $\alpha = \pi/6 = 0,5236$ рад, $\omega/2\pi = 5332$ Гц, $\theta_A = \pi/6 = 30$ угл. град. При этом частота дискретизации (частота АЦП) принималась 10^5 , то есть примерно 19 точек на период колебаний резонатора.

Все приводимые далее в виде графиков результаты моделирования представляют собой дискретные точки, условно соединенные между собой линейными функциями. При этом на рис. 1, 2 показаны результаты сравнения абсолютных ошибок идентифицированных значений $\{a_A, a_B, \theta_A, \omega/2\pi\}$ при отсутствии шумов измерений. Так как фаза α везде выступает в роли вспомогательного параметра, ее графики не представлены.

При расчетах наблюдалась значительная зависимость точности методик от ошибки выполнения условия ортогональности (8) на дискретном множестве измерений. Поэтому на рис. 1, 2 и дополнительно приведены графики имеющих место относительных отклонений от периода, которые показывают соответствие оцифрованного отрезка времени периоду колебания резонатора. Так, например, значение данной величины 0,03 означает, что было оцифровано не одно колебание резонатора, а интервал времени $1,03 \cdot T$, где T – период колебания резонатора.

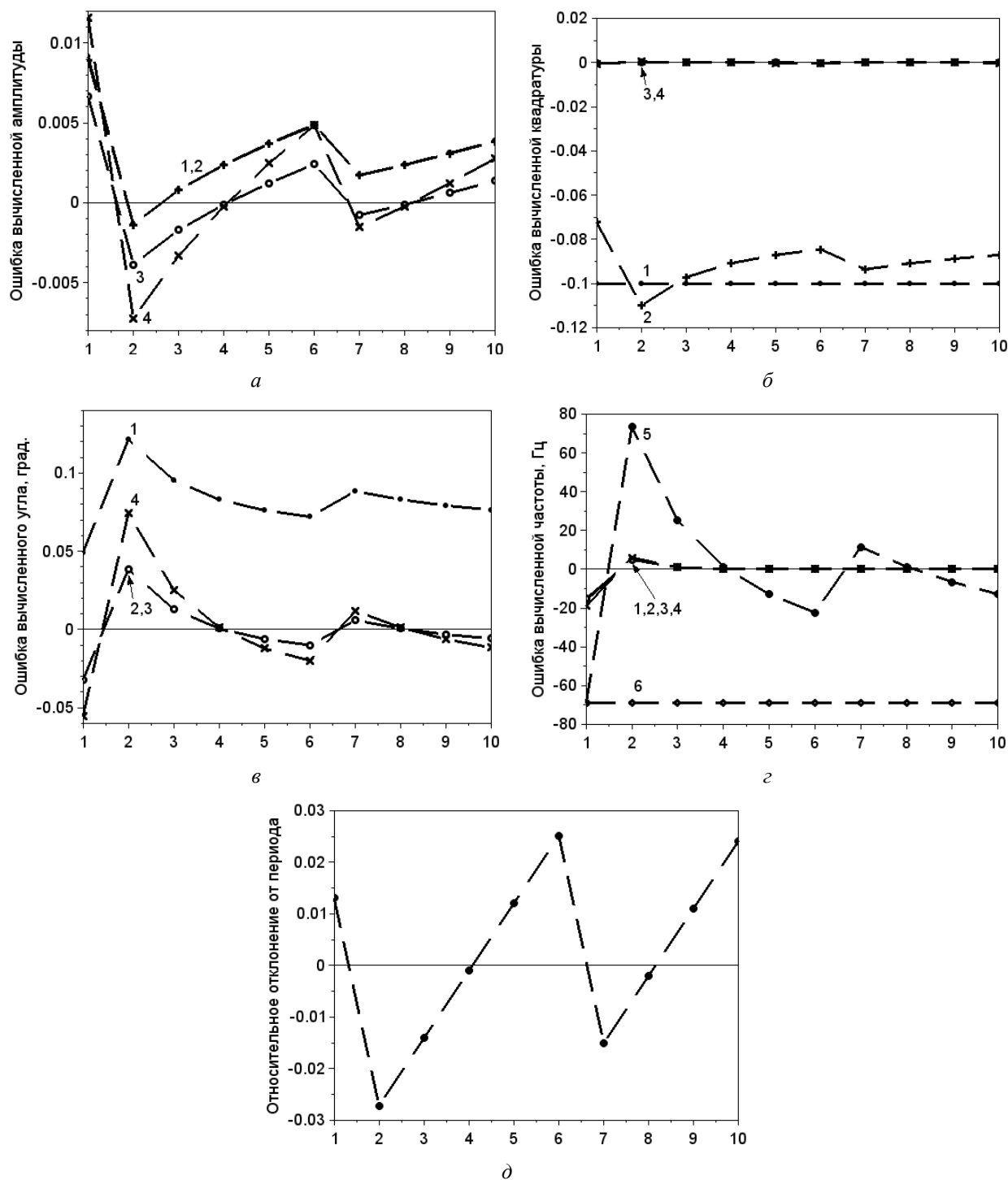


Рис. 1. Сравнение абсолютных ошибок идентифицированных параметров в зависимости от числа периодов усреднения (номера графиков 1–4 указывают на соответствующий алгоритм; график с номером 5 соответствует расчету по формуле (9), а с номером 6 – по формуле (10)): а – основная амплитуда, б – квадратурная составляющая колебаний, в – угол стоячей волны, г – частота колебаний, д – относительное отклонение дискретизации от периода

Fig. 1. Comparison of the absolute errors of the identified parameters depending on the number of averaging periods (graph numbers 1-4 indicate the corresponding algorithm; graph number 5 corresponds to the calculation by formula (9), and with number 6 - according to formula (10)): а - fundamental amplitude, б - quadrature component of oscillations, в - standing wave angle, г - oscillation frequency, д - relative deviation of sampling from the period

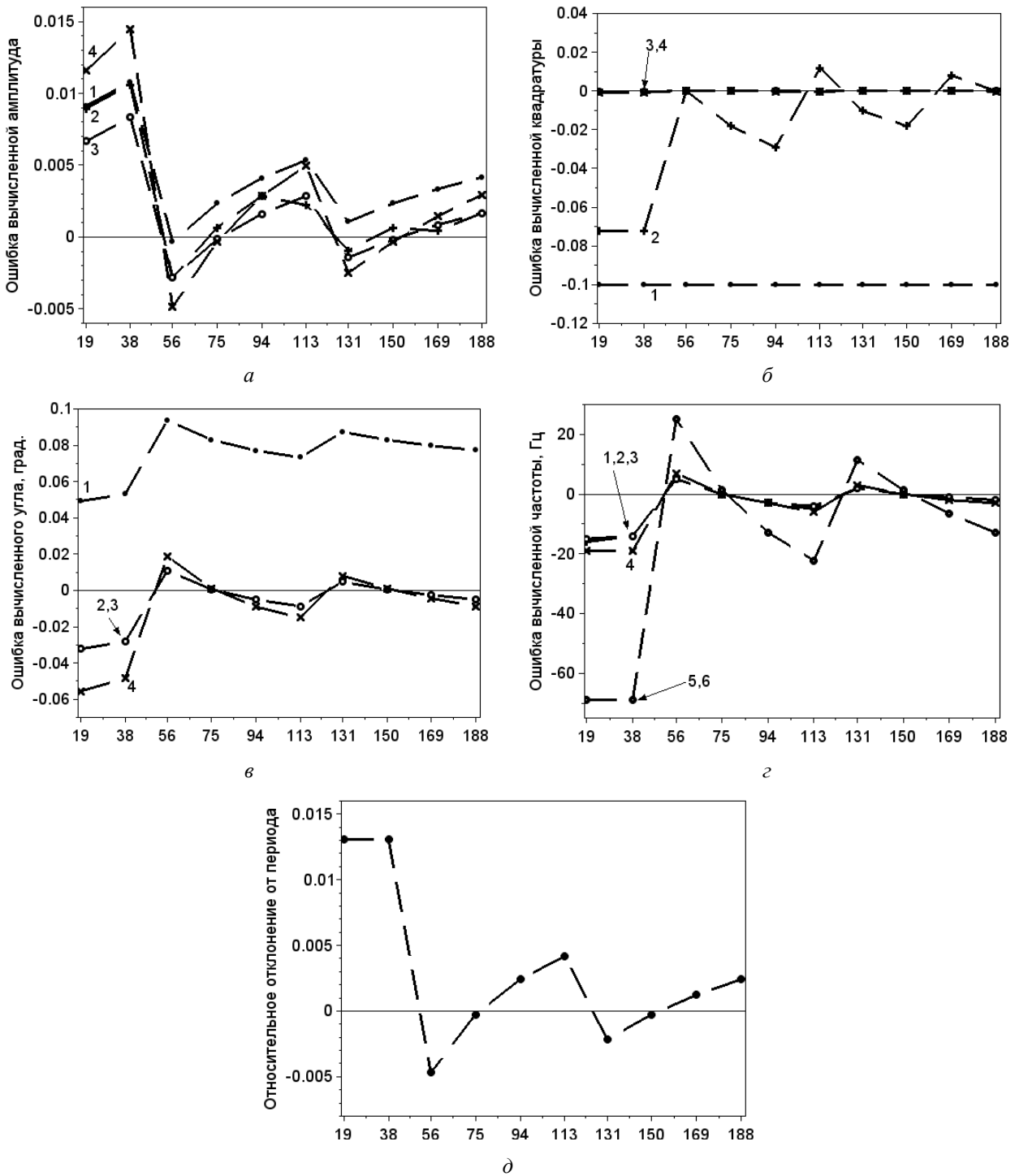


Рис. 2. Сравнение абсолютных ошибок идентифицированных параметров в зависимости от количества точек значений дискретизации на один период колебаний (номера графиков 1–4 указывают на соответствующий алгоритм; график с номером 5 соответствует расчету по формуле (9), а с номером 6 – по формуле (10)): а – основная амплитуда, б – квадратурная составляющая колебаний, в – угол стоячей волны, г – частота колебаний, д – относительное отклонение дискретизации от периода

Fig. 2. Comparison of the absolute errors of the identified parameters depending on the number of points of sampling values for one oscillation period (numbers of graphs 1–4 indicate the corresponding algorithm; graph with number 5 corresponds to the calculation according to formula (9), and with number 6 - according to formula (10)): а - basic amplitude, б - quadrature component of oscillations, в - standing wave angle, г - oscillation frequency, д - relative deviation of sampling from the period

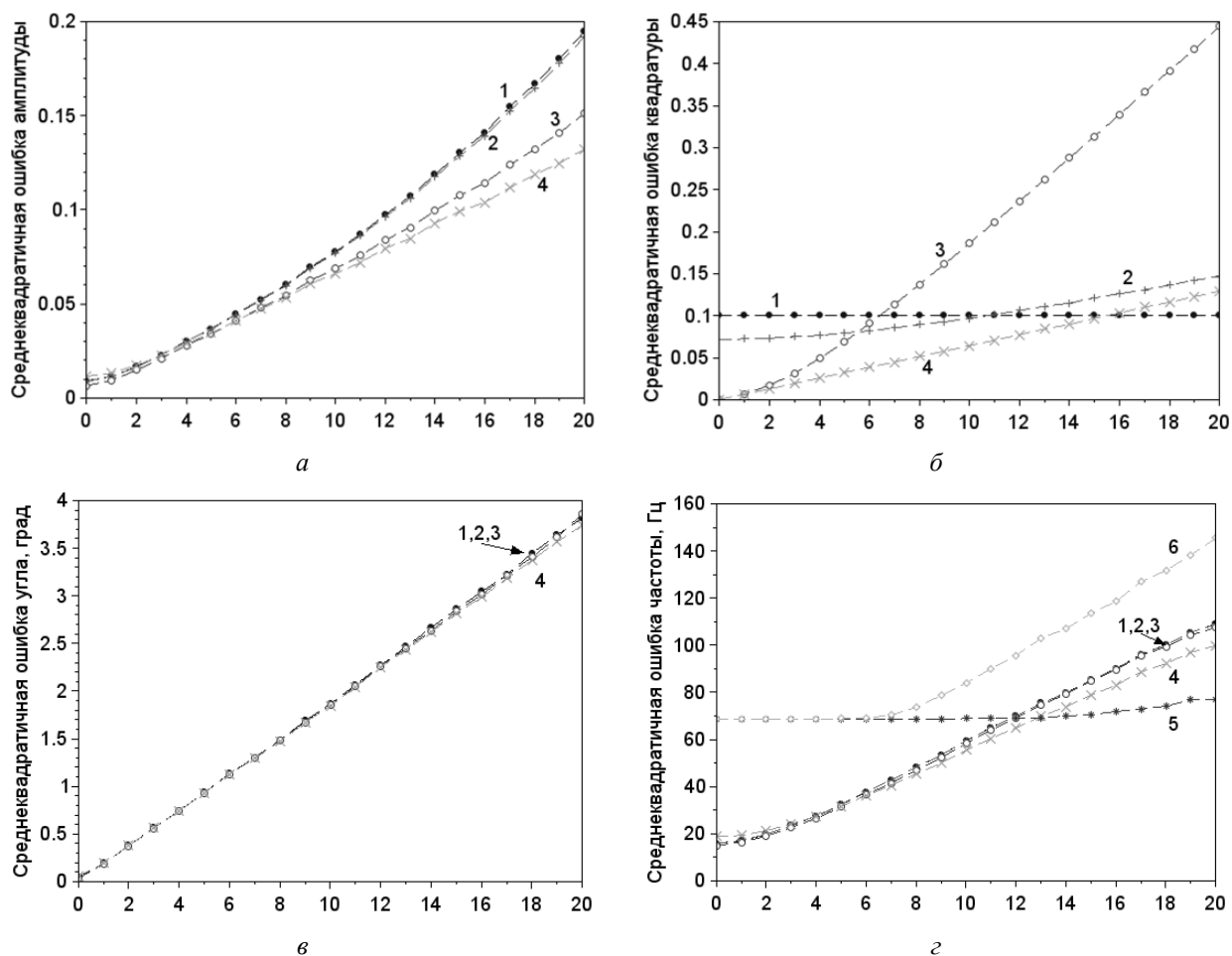


Рис. 3. Сравнение среднеквадратичных ошибок (σ % от основной амплитуды колебаний) в зависимости от уровня шума (номера графиков 1–4 указывают на соответствующий алгоритм; график с номером 5 соответствует расчету по формуле (9), а с номером 6 – по формуле (10)): a – основная амплитуда, $б$ – квадратурная составляющая колебаний, $в$ – угол стоячей волны, $г$ – частота колебаний

Fig. 3. Comparison of root-mean-square errors (σ % of the main oscillation amplitude) depending on the noise level (numbers of graphs 1–4 indicate the corresponding algorithm; graph with number 5 corresponds to the calculation by formula (9), and with number 6 - by formula (10)): a - basic amplitude, $б$ - quadrature component of oscillations, $в$ - standing wave angle, $г$ - oscillation frequency

Полученные результаты показывают, что минимальная абсолютная ошибка идентификации параметров волны, при отсутствии шумовой составляющей сигнала, достигается при наименьших значениях величины относительного отклонения от периода. Для графиков на рис. 1 этому условию соответствуют число периодов осреднения 4 и 8, а на рис. 2 оно выполняется при 75 и 150 точках дискретизации на одном периоде колебаний.

Заметим, что ошибки графиков 1 (соответствующих 1-му алгоритму) связаны с пренебрежением влияния квадратурной составляющей волны. В то же время ошибки графиков 2 (соответствующих 2-му алгоритму) объясняются погрешностью оценки сдвига сигнала на четверть периода в (16). Это явно видно из рис. 2, б (так как при количестве точек дискретизации на пе-

риоде, кратном 4, ошибка вычисления квадратурной составляющей волны с использованием 2-го алгоритма получилась минимальна).

При вычислении частоты все рассматриваемые алгоритмы показали похожее поведение ошибок. А вычисление частоты по более грубым формулам (9) и (10) (графики 5 и 6 на рис. 1, г и 2, г) для сигнала без шумовой составляющей оказалось зависимым от частотной дискретизации. При этом ошибку вычисления частоты по формуле (9) удавалось уменьшить при рассмотрении нескольких периодов с дополнительным контролем относительного отклонения дискретизации от периода (при практическом применении этих методов потребуется контролировать математическое ожидание сигнала на рассматриваемом отрезке).

Заметим, что приведенные графики в ряде случаев позволяют косвенно характеризовать задачи идентификации с предварительным сглаживанием существенно зашумленных сигналов измерительных устройств (когда в качестве сигналов (2) выступают сильно сглаженные сигналы (4), прошедшие через дополнительные специально настроенные фильтры низких частот).

Для более сильно зашумленных сигналов (2) было исследовано влияние нормальной шумовой составляющей сигнала с нулевым матожиданием на идентифицируемые параметры. Интервал идентификации, как и на рис. 2, выбирался приближенно равным одному периоду резонансных колебаний. Уровень среднеквадратичного отклонения шумовой составляющей варьировался в диапазоне 0–20 % от основной амплитуды. Приведенные на рис. 3 результаты соответствуют средним значениям после обработки 10000 независимых выборок.

Из приведенных на рис. 1–3 результатов можно составить общее представление об условиях и требованиях по применению разных методик идентификации волновых параметров твердотельных волновых гироскопов в режиме свободного выбега его стоячих волн.

В целом, все рассмотренные алгоритмы показали хорошее приближение к исходно задаваемым значениям параметров колебаний при приближении относительной погрешности оцифровки к нулю (что может достигаться за счет повышения частоты дискретизации или же при рассмотрении нескольких периодов колебаний).

Внесение в измеряемые сигналы шумовой составляющей показало при рассмотрении одного колебания ее значительное влияние на точность определения волновых характеристик. Для уменьшения этого влияния на оценку параметров стоячей волны рекомендуется проводить идентификацию на временном интервале из большего числа периодов колебаний.

Так, было получено, что все рассмотренные алгоритмы достаточно хорошо работают на длинных интервалах идентификации (длительностью около 10 периодов колебаний резонатора и более). В этом случае предпочтение будет зависеть от формы представления сигналов, выдаваемых измерительным устройством, а также от удобства физической интерпретации промежуточных результатов идентификации.

Заключение

Таким образом, в статье выполнено подробное описание особенностей вычислительных

алгоритмов и проведено сравнение точности четырех методик идентификации для наблюдения режима свободного выбега стоячих волн в резонаторе интегрирующего твердотельного волнового гироскопа по сигналам его измерительного устройства с настройкой вычислительных алгоритмов на периодичность сигналов.

Последнее условие позволило значительно упростить математическое представление алгоритмов и улучшить их вычислительную обусловленность.

После проведенного детального анализа становятся понятными условия и требования к корректному применению рассмотренных методик для исследования волновых характеристик твердотельных волновых гироскопов в технологических операциях контроля эксплуатационной точности при их изготовлении.

В целом, описанная вычислительная настройка алгоритмов всех рассмотренных методик позволила получить приемлемые для практического использования результаты.

По мнению авторов, в производственном цикле изготовления твердотельных волновых гироскопов рекомендуется параллельно выполнять вычисления сразу по всем методикам с разными рангами приоритетности. Поскольку в них применяются разные алгоритмы обработки шумов измерительных сигналов, поэтому выводимые оператору результаты позволят более полно и разносторонне интерпретировать и характеризовать волновые показатели твердотельных волновых гироскопов на соответствующих технологических стендах их отладки и настройки.

Библиографические ссылки

1. *Климов Д. М., Журавлев В. Ф., Жбанов Ю. К.* Кварцевый полусферический резонатор (Волновой твердотельный гироскоп). М.: Ким Л. А., 2017. 194 с.
2. *Лукин Б. С., Матвеев В. А., Басараб М. А.* Волновой твердотельный гироскоп. Теория и технологии. М.: Радиотехника, 2014. 176 с.
3. *Меркурьев И. В., Подалков В. В.* Динамика микромеханического и волнового твердотельного гироскопа. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 228 с.
4. *Журавлев В. Ф.* Задача идентификации погрешностей обобщенного маятника Фуко // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 5. С. 5–9.
5. *Жбанов Ю. К., Каленова Н. В.* Поверхностный дисбаланс волнового твердотельного гироскопа // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2001. № 3. С. 11–18.
6. *Журавлев В. Ф.* Дрейф несовершенного ВТГ // Изв. РАН. МТТ. 2004. № 4. С. 19–23.
7. *Козубняк С. А.* Расщепление собственных частот колебаний цилиндрического резонатора волново-

го твердотельного гироскопа, вызванное возмущением формы // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия «Приборостроение». 2015. № 3. С. 39–49.

8. Серёгин С. В. Влияние асимметричных начальных несовершенств формы на свободные колебания тонких оболочек // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2016. Т. 15. № 3. С. 209–222.

9. Серёгин С. В. О возможности возникновения радиальных форм колебаний кольцевых элементов // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2018. Т. 4, № 1. С. 132–143.

10. Статическая балансировка цилиндрических резонаторов волновых твердотельных гироскопов / М. А. Басараб, Б. С. Лунин, В. А. Матвеев, Е. А. Чуманкин // Гироскопия и навигация. 2014. Т.85, № 2. С. 43–51.

11. Басараб М. А., Матвеев В. А., Лунин В. С. Аппроксимация распределения плотности резонатора волнового твердотельного гироскопа по измеренным параметрам дебаланса // Приборы и системы: управление, контроль, диагностика. 2015. № 10. С. 9–16.

12. Гавриленко А. Б., Меркурьев И. В., Подалков В. В. Экспериментальные методы определения параметров вязкоупругой анизотропии резонатора волнового твердотельного гироскопа // Вестник МЭИ. 2010. № 5. С. 13–19.

13. Маслов А. А., Маслов Д. А., Меркурьев И. В. Идентификация параметров волнового твердотельного гироскопа с учетом нелинейности колебаний резонатора // Приборы и системы: управление, контроль, диагностика. 2014. № 5. С. 18–23.

14. Маслов Д. А. Идентификация параметров гироскопа с цилиндрическим резонатором при учете влияния нелинейности на амплитуду возбуждающего воздействия // Машиностроение и инженерное образование. 2017. № 1 (50). С. 24–31.

15. Маслов Д. А. Идентификация и компенсация погрешностей волнового твердотельного гироскопа с электростатическими датчиками управления // Машиностроение и инженерное образование. 2018. № 1. С. 20–26.

16. Шишаков К. В. Твердотельные волновые гироскопы: волновые процессы, управление, системная интеграция. – Ижевск : Изд-во ИжГТУ, 2018. 264 с.

References

1. Klimov D. M., Juravlev V. F., Jbanov Y. K. *Kvartsevyi polusfericheskiy resonator (Volnovoi tverdotel'nyi giroskop)* [Quartz hemispherical resonator (Hemispherical resonator gyroscope)]. Moscow: FGBUN IPMehim. A. Y. Ishlinskogo, 2017 (in Russ.).

2. Lunin B.S., Matveev V.A., Basarab M.A. *Volnovoy tverdotel'nyy giroskop. Teoriya i tehnologii* [Hemispherical resonator gyro. Theory and technology]. Moscow: Radiotekhnika Publ., 2014 (in Russ.).

3. Merkur'ev I.V., Podalkov V.V. *Dinamika mikromekhanicheskogo i volnovoego tverdotel'nogo giroskopa* [Dynamics of micromechanical and hemispherical resonator gyro]. Moscow: FIZMATLIT, 2009 (in Russ.).

4. Zhuravlev V. F. [The task of identifying the errors of Foucault's generalized pendulum]. *Izv. Wounds. MTT*. 2000, no. 5. Pp. 5-9 (in Russ.).

5. Yubanov Y.K. Kalenova N.V. [Surface imbalance of wave solid gyroscope]. *Izv. Wounds. Solid mechanics*. 2001. No. 3. Pp. 11-18 (in Russ.).

6. Shhuravlev V.F. [Drift imperfect VTG]. *I'm a Wounds MTT*. 2004, no. 4. Pp. 19-23 (in Russ.).

7. Kozubnjak S.A. [Teeth splitting its own vibration frequencies of the cylindrical resonator of the wave solid gyroscope caused by the perturbation of the form]. *Vestnik of the Moscow State University by N.E. Bauman. Series "Device."* 2015, no. 3. Pp. 39-49 (in Russ.).

8. Seregin S.V. [Effect of asymmetrical initial imperfections of the form on the free vibrations of thin shells]. *Vestnik of the University of Samara. Aerospace technology, technology and engineering*. 2016. Vol. 15, no. 3. Pp. 209-222 (in Russ.).

9. Seregin S.V. [On the possibility of radial forms of oscillation of ring elements]. *Vestnik of Tyumen State University. Physics and mathematics modeling. Oil, gas, energy*. 2018. Vol. 4, no. 1. Pp. 132-143 (in Russ.).

10. Basarab M.A., Lunin B.S., Matveyev V.A., Chumankin E.A. [Static balancing of cylindrical resonators of wave solid-state gyroscopes]. *Gyroscopy and navigation*. 2014. Vol. 85, no 2. Pp. 43-51 (in Russ.).

11. Basarab M.A., Matveyev V.A., Lunin V.S. [Approximation of the density distribution of the resonance of the wave solid gyroscope by the measured parameters of the debalance]. *Devices and systems: control, control, diagnostics*. 2015. No. 10. Pp. 9-16 (in Russ.).

12. Gavrilenko A.B., Mercuriev I.V., Dopakov V.V. [Experimental methods of determining the parameters of viscous anisotropy of the resonator of the wave solid gyroscope]. *Vestnik MEI*. 2010. No. 5. Pp. 13-19 (in Russ.).

13. Maslov A.A., Maslov D.A., Mercuriev I.V. [Identification of wave solid gyroscope parameters taking into account nonlinearity vibrations of the resonator]. *Devices and systems. Management, control, diagnostics*. 2014. No. 5 (in Russ.).

14. Maslov D.A. [Identification of wave solid gyroscope parameters at a slowly changing frequency of forced vibrations]. *Engineering Journal: Science and Innovation*. 2017. Vol. 70, no. 10 (in Russ.).

15. Maslov D.A. [Identification and compensation of errors of wave solid gyroscope with electrostatic control sensors]. *Mechanical engineering and engineering formation*. 2018. No. 1. Pp. 20-26 (in Russ.).

16. Shishakov K.V. *Tverdotel'nye volnovye giroskopy: volnovye protsessy, upravlenie, sistemnaya integratsiya* [Solid wave gyroscopes: wave processes, control, system integration]. Izhensk: Izd-vo IzhGTU, 2018. 264 p. (in Russ.).

Simulation Modeling of the Accuracy of Solid-State Wave Gyroscope Characterization with Tuning of Computational Algorithms to Signal Periodicity

R. I. Mingazov, Post-graduate, Kalashnikov ISTU, Izhevsk, Russia

K. V. Shishakov, DSc in Engineering, Associate Professor, Kalashnikov ISTU, Izhevsk, Russia

The setting of computational algorithms for four methods of identification of wave characteristics in the free run-out mode of standing waves in the resonator of the integrative solid wave gyroscope on observations of signals of its measuring device at time intervals that are multiples of resonator oscillation is described.

In the first roughest method, measurement results are processed without taking into account the influence of the quadrature wave. It is convenient for forming initial approximations in the tasks of clarifying optimization of identification functionality in other methods. In the second method, the refined processing of measurement results is carried out taking into account the phase shift of the signals of the measuring device. In the third method, in order to provide better physical visibility and to process the results of measurements, a virtual transition to mobile axes of standing waves is introduced. In the fourth method, measurement results are processed using numerical digital demodulation procedures.

Comparisons have been made for the accuracy of these identification techniques by simulation methods for theoretically set source signals. This made it possible to directly compare the original and identified characteristics of wave processes: the amplitude of the main and square standing waves, the angle of the main standing wave and its frequency. The results are presented in the absence and presence of noise in the measuring signals.

The results show the specifics of the practical application of different techniques for real samples of gyroscopes. For short identification intervals, they require a special choice of interval lengths equal to the final number of resonator oscillations. With the lengthening of such intervals, this requirement for the length of the interval is weakened.

Keywords: solid wave gyroscope, resonant vibrations, wave pattern, identification, free run out of standing waves, techniques, measurements, computational algorithm.

Получено: 15.06.2021