

УДК 621.372

DOI: 10.22213/2410-9304-2021-4-138-147

## Скольльзящая пространственно-частотная обработка финитных двумерных действительных дискретных сигналов на основе преобразования Фурье с варьируемыми параметрами

А. В. Пономарев, кандидат экономических наук, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова,  
Ижевск, Россия

О. В. Пономарева, доктор технических наук, профессор, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова,  
Ижевск, Россия

В области Фурье-обработки финитных сигналов выделено три основных направления проведения научных исследований: Фурье-обработка одномерных финитных сигналов – обработка скалярных функций скалярного аргумента, Фурье-обработка двумерных финитных сигналов – обработка скалярных функций векторного аргумента, многоканальная Фурье-обработка – обработка векторных функций скалярного аргумента. В рамках создания обобщенной теории Фурье-обработки финитных сигналов авторами предложены: теория спектрального анализа дискретных сигналов на конечных интервалах в базисах параметрических экспоненциальных функций и теория двумерной цифровой обработки сигналов в базисах Фурье с варьируемыми параметрами. Разработанные теории, обобщая теорию Фурье-обработки одномерных и двумерных сигналов, базируются: на введении новых понятий сдвига финитных дискретных сигналов в одномерном и двумерном случаях и введении новых базисных систем Фурье-обработки дискретных сигналов, которые обладают свойствами мультипликативности, ортогональности и симметричности относительно номера базисной функции в системе. Рассмотрен математический аппарат двумерного дискретного преобразования Фурье с варьируемыми параметрами в матричной и алгебраической форме. Введен новый метод обработки финитных двумерных действительных дискретных сигналов в пространственно-частотной области на основе дискретного преобразования Фурье с варьируемыми параметрами – метод скольльзящей пространственно-частотной обработки. Разработан эффективный метод и алгоритм быстрой диагональной скольльзящей пространственно-частотной обработки финитных двумерных действительных дискретных сигналов на основе дискретного преобразования Фурье с варьируемыми параметрами. Проведена оценка эффективности и результативности алгоритма диагонального скольльзящего двумерного дискретного преобразования Фурье с варьируемыми параметрами с точки зрения вычислительных затрат. В результате экспериментальных исследований на модельных двумерных дискретных финитных сигналах доказана обоснованность, эффективность и достоверность предложенного метода скольльзящей пространственно-частотной обработки финитных двумерных действительных дискретных сигналов на основе дискретного преобразования Фурье с варьируемыми параметрами. Проведено сравнение (с точки зрения вычислительных затрат) разработанного метода скольльзящей пространственно-частотной обработки финитных двумерных действительных дискретных сигналов на основе дискретного преобразования Фурье с варьируемыми параметрами со стандартным методом скольльзящей обработки этого вида сигналов.

**Ключевые слова:** двумерный дискретный финитный сигнал, прямое двумерное дискретное преобразование Фурье с варьируемыми параметрами, опорная область, пространственно-частотный спектр, скольльзящая обработка.

### Введение

Бурное развитие средств компьютерной техники, которые являются основой информационных технологий, значительно расширило сферы приложения методов цифровой обработки финитных сигналов на основе дискретного преобразования Фурье. Среди множества областей приложения информационной технологии цифровой Фурье-обработки финитных сигналов отметим томографию, активную и пассивную гидролокацию, сейсмологию, техническое диагностирование, ме-

дицину, криминалистическую кибернетику, разработку методов и алгоритмов искусственного интеллекта (англ. *artificial intelligence*) [1–18].

В Фурье-обработке финитных сигналов<sup>1</sup> (сигналов, заданных в одномерном случае на конечных интервалах или на конечных опорных областях в двумерном случае) можно выделить следующие три направления научных исследований:

1. Фурье-обработка одномерных финитных сигналов – обработка скалярных функций скалярного аргумента.

© Пономарев А. В., Пономарева О. В., 2021

<sup>1</sup> **Финитный сигнал** в одномерном случае задается на одномерном конечном интервале (отрезке, ограниченном начальной и конечной точками), а в двумерном случае прямоугольного раstra – задается на конечной прямоугольной опорной плоскости (прямоугольнике, ограниченном четырьмя точками).

2. Фурье-обработка двумерных финитных сигналов – обработка скалярных функций векторного аргумента.

3. Многоканальная Фурье-обработка – обработка векторных функций скалярного аргумента.

В рамках создания обобщенной теории Фурье-обработки финитных сигналов авторами разработаны [19–21]:

– теория спектрального анализа дискретных сигналов на конечных интервалах в базисах параметрических экспоненциальных функций (первое научное направление исследований);

– теория двумерной цифровой обработки сигналов в базисах Фурье с варьируемыми параметрами (второе научное направление исследований).

Разработанные теории, обобщая теорию Фурье-обработки одномерных и двумерных сигналов [22–36], базируются:

– на определениях финитности дискретных сигналов в одномерном и двумерном случаях;

– введении новых понятий сдвига финитных дискретных сигналов в одномерном и двумерном случаях;

– введении новых базисных систем Фурье-обработки дискретных сигналов в одномерном и двумерном случаях, которые обладают свойствами мультипликативности, ортогональности и симметричности относительно номера базисной функции в системе.

Финитный дискретный 2D-сигнал  $x(n_1, n_2)$  – это двумерный массив конечной длины, являющийся множеством действительных (или в общем случае комплексных) чисел, определенных для упорядоченных пар целых чисел  $n_1$  и  $n_2$  при  $0 \leq n_1 \leq N_1 - 1$ ;  $0 \leq n_2 \leq N_2 - 1$ . Финитный дискретный 2D-сигнал может быть представлен в виде матрицы:

$$\mathbf{X}_{N_1 \times N_2} = \begin{matrix} & & & & 0 & 1 & \dots & (N_2 - 1) & n_2 \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ (N_1 - 1) \end{matrix} & \left[ \begin{array}{cccccc} x(0,0) & x(0,1) & \dots & x(0, N_2 - 1) \\ x(1,0) & x(1,1) & \dots & x(1, N_2 - 1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x(N_1 - 1, 0) & x(N_1 - 1, 1) & \dots & x(N_1 - 1, N_2 - 1) \end{array} \right] & \cdot & \end{matrix} \quad (1)$$

**Двумерное дискретное преобразование Фурье с варьируемыми параметрами (2D ДПФ-ВП)** в алгебраической форме задается соотношением

$$S_{N_1, N_2}(k_1, k_2, \theta_1, \theta_2) = \frac{1}{N_1 \cdot N_2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x(n_1, n_2) W_{N_1}^{(k_1+\theta_1) \cdot n_1} \cdot W_{N_2}^{(k_2+\theta_2) \cdot n_2}, \quad (2)$$

где  $S_{N_1, N_2}(k_1, k_2, \theta_1, \theta_2)$  – спектр сигнала  $x(n_1, n_2)$  (коэффициенты 2D ДПФ-ВП),  $k_1 = \overline{0, (N_1 - 1)}$ ,  $k_2 = \overline{0, (N_2 - 1)}$  – пространственные частоты;  $\theta_1, \theta_2$  – параметры преобразования 2D ДПФ-ВП:  $0 \leq \theta_1, \theta_2 < 1$ ;  $x(n_1, n_2)$  – двумерный сигнал,  $n_1 = \overline{0, N_1 - 1}$ ,  $n_2 = \overline{0, N_2 - 1}$ .

Вычисление 2D ДПФ-ВП, учитывая свойство разделимости (свойство сепарабельности) ядра преобразования, может быть представлено в двух видах:

$$S_{N_1, N_2}(k_1, k_2, \theta_1, \theta_2) = \frac{1}{N_1} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} W_{N_1}^{(k_1+\theta_1) \cdot n_1} \left[ \frac{1}{N_2} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x(n_1, n_2) W_{N_2}^{(k_2+\theta_2) \cdot n_2} \right] \quad (3)$$

или

$$S_{N_1, N_2}(k_1, k_2, \theta_1, \theta_2) = \frac{1}{N_2} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} W_{N_2}^{(k_2+\theta_2) \cdot n_2} \left[ \frac{1}{N_1} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} x(n_1, n_2) W_{N_1}^{(k_1+\theta_1) \cdot n_1} \right]. \quad (4)$$

Соотношениями (3) и (4) задается вычисление 2D ДПФ-ВП с помощью поэтапного вычисления одномерных параметрических дискретных преобразований Фурье (ДПФ-П)<sup>2</sup> – соотношение (3) – сначала по переменной  $n_2$ , а затем по переменной  $n_1$ , а соотношение (4) – сначала по переменной  $n_1$ , а затем по переменной  $n_2$ .

**2D ДПФ-ВП в матричной форме** с учетом свойства сепарабельности задается соотношениями:

<sup>2</sup> Параметрическое дискретное преобразование Фурье в алгебраической форме определяется выражением:

$$S(k, \theta) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{(k+\theta)n}; 0 \leq \theta < 1.$$

$$S_{N_1 \times N_2, \theta_1, \theta_2} = \frac{1}{N_1 \cdot N_2} F_{N_1 \times N_1, \theta_1}^{(2)} \cdot X_{N_1 \times N_2} \cdot F_{N_2 \times N_2, \theta_2}^{(1)} \quad (5)$$

где  $S_{N_1 \times N_2, \theta_1, \theta_2}$  – коэффициенты 2D ДПФ-ВП в виде матрицы;

$$F_{N_1 \times N_1, \theta_1}^{(2)} = \begin{matrix} & & 0 & 1 & \dots & (N_1 - 1) \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ (N_1 - 1) \end{matrix} & \left[ \begin{array}{cccc} W_{N_1}^{(0+\theta_1)-0} & W_{N_1}^{(0+\theta_1)-1} & \dots & W_{N_1}^{(0+\theta_1)-(N_1-1)} \\ W_{N_1}^{(1+\theta_1)-0} & W_{N_1}^{(1+\theta_1)-1} & \dots & W_{N_1}^{(1+\theta_1)-(N_1-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{N_1}^{(N_1-1+\theta_1)-0} & W_{N_1}^{(N_1-1+\theta_1)-1} & \dots & W_{N_1}^{(N_1-1+\theta_1)-(N_1-1)} \end{array} \right] & \begin{matrix} n_1 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{matrix} \end{matrix} ; \quad (6)$$

$$F_{N_2 \times N_2, \theta_2}^{(1)} = \begin{matrix} & & 0 & 1 & \dots & (N_2 - 1) \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ (N_2 - 1) \end{matrix} & \left[ \begin{array}{cccc} W_{N_2}^{0-(0+\theta_2)} & W_{N_2}^{0-(1+\theta_2)} & \dots & W_{N_2}^{0-(N_2-1+\theta_2)} \\ W_{N_2}^{1-(0+\theta_2)} & W_{N_2}^{1-(1+\theta_2)} & \dots & W_{N_2}^{1-(N_2-1+\theta_2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{N_2}^{(N_2-1)-(0+\theta_2)} & W_{N_2}^{(N_2-1)-(1+\theta_2)} & \dots & W_{N_2}^{(N_2-1)-(N_2-1+\theta_2)} \end{array} \right] & \begin{matrix} k_2 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{matrix} \end{matrix} . \quad (7)$$

Вычисление преобразования 2D ДПФ-ВП в матричной форме, так же как и его вычисление в алгебраической форме (3), (4), может быть представлено в двух видах:

$$S_{N_1 \times N_2, \theta_1, \theta_2} = \frac{1}{N_1} F_{N_1 \times N_1, \theta_1}^{(2)} \cdot \frac{1}{N_2} \left[ X_{N_1 \times N_2} \cdot F_{N_2 \times N_2, \theta_2}^{(1)} \right]; \quad (8)$$

$$S_{N_1 \times N_2, \theta_1, \theta_2} = \left[ \frac{1}{N_1} F_{N_1 \times N_1, \theta_1}^{(2)} \cdot X_{N_1 \times N_2} \right] \cdot \frac{1}{N_2} F_{N_2 \times N_2, \theta_2}^{(1)} . \quad (9)$$

Соотношениями (8) и (9) задается вычисление 2D ДПФ-ВП с помощью поэтапного вычисления одномерных параметрических дискретных преобразований Фурье (1D ДПФ-П).

**Цель работы:** разработка метода быстрой диагональной скользящей пространственно-частотной обработки финитных двумерных действительных дискретных сигналов на основе дискретного преобразования Фурье с варьируемыми параметрами.

**Диагональная скользящая пространственно-частотная обработка финитных двумерных действительных дискретных сигналов на основе преобразования Фурье с варьируемыми параметрами**

Согласно соотношениям (3), (4) или (8), (9) можно найти все коэффициенты 2D ДПФ-ВП

сигнала  $x(n_1, n_2)$  в виде 2D-массива  $S_{N_1, N_2}(k_1, k_2, \theta_1, \theta_2)$  или сигнала  $X_{M_1 \times N_2}$  в виде матрицы  $S_{N_1 \times N_2, \theta_1, \theta_2}$ .

При этом если непосредственное вычисление двумерного дискретного преобразования Фурье с варьируемыми параметрами требует  $N_1^2 \cdot N_2^2$  операций, то учет свойства сепарабельности позволяет сократить число операций до  $N_1 \cdot N_2 \cdot (N_1 + N_2)$ . Число операций при вычислении 2D ДПФ-ВП можно еще существенно сократить, применив быстрые алгоритмы 2D БПФ-ВП.

Такова ситуация, если необходимо найти все коэффициенты 2D ДПФ-ВП. В то же время в приложениях методов Фурье-обработки 2D-сигналов часто встречаются приложения (например, при препарировании изображений), когда, во-первых, анализируется только один или часть коэффициентов 2D ДПФ-ВП и, во-вторых, вычисление спектра проводится в скользящем дискретном пространственном окне. На рис. 1 в качестве примера приведены виды диагональных сдвигов двумерного дискретного пространственного скользящего окна 3×3 по двумерному сигналу.

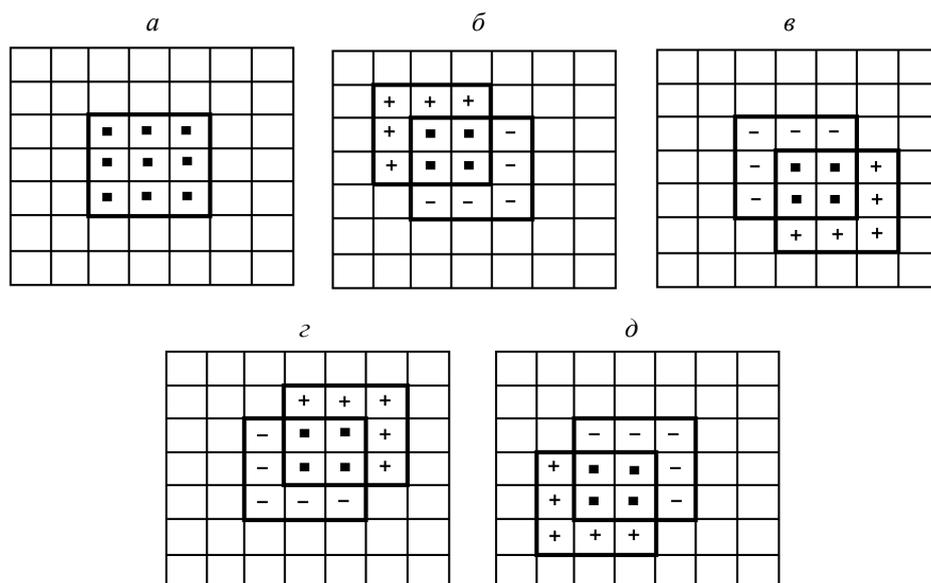


Рис. 1. Виды диагональных сдвигов двумерного дискретного пространственного скользящего окна  $3 \times 3$  по двумерному сигналу: а – сдвиг нулевой, б – сдвиг левый диагональный вверх (СЛД<sup>+</sup>), в – сдвиг левый диагональный вниз (СЛД<sup>-</sup>); г – сдвиг правый диагональный вверх (СПД<sup>+</sup>), д – сдвиг правый диагональный вниз (СПД<sup>-</sup>)

Fig. 1. Types of diagonal shifts of a two-dimensional discrete spatial sliding window  $3 \times 3$  on a two-dimensional signal: а - zero shift, б - left diagonal shift upward (SLD<sup>+</sup>), в - left diagonal downward shift (SLD<sup>-</sup>); г - shift right diagonal up (SPD<sup>+</sup>), д - shift right diagonal down (SPD<sup>-</sup>)

Из рис. 1 нетрудно видеть, что при единичных сдвигах часть отсчетов в двумерном скользящем дискретном пространственном окне остаются неизменными (обозначены символом ■), часть отсчетов «выпадают» из окна (обозначены символом -) и часть отсчетов появляются в окне вновь (обозначены символом +). Очевидно, что чем больше размер скользящего окна, тем больше число отсчетов, остающихся неизменными при его сдвигах<sup>3</sup>.

Рассмотрим для данного случая метод сокращения числа операций при диагональной скользящей пространственно-частотной обработке финитных двумерных действительных дискретных сигналов на основе дискретного преобразования Фурье с варьируемыми параметрами.

**Метод быстрой диагональной скользящей пространственно-частотной обработки финитных двумерных действительных дискретных сигналов на основе дискретного преобразования Фурье с варьируемыми параметрами**

Из рис. 1 непосредственно следует, что при вычислении спектра 2D ДПФ-ВП сигнала  $X_{M_1 \times N_2}$  в двумерном скользящем дискретном пространственном окне значительное число значений

матрицы  $X_{M_1 \times N_2}$  остается неизменным. Это утверждение справедливо и для отдельного коэффициента 2D ДПФ-ВП. Однако классический метод вычисления отдельного коэффициента (бина) 2D ДПФ-ВП (или нескольких бинов) заключается в нахождении при каждом сдвиге 2D-окна всего спектра 2D ДПФ-ВП и отбрасывании неиспользуемых бинов. Следовательно, можно предположить, что в классическом методе существует избыточность при вычислении отдельного коэффициента 2D ДПФ-ВП.

Докажем существование метода быстрого вычисления отдельного бина дискретного преобразования Фурье с варьируемыми параметрами при диагональной скользящей пространственно-частотной обработке финитных двумерных действительных дискретных сигналов.

Введем в рассмотрение 2D пространственное окно размером  $N_1 \times N_2$ , скользящее по 2D-сигналу  $x_1(m_1, m_2)$  размером  $M_1 \times M_2$ . 2D-сигнал в скользящем пространственном окне размером  $N_1 \times N_2$  обозначим как  $x(n_1, n_2)$ ,  $n_1 = \overline{0, N_1 - 1}$ ,  $n_2 = \overline{0, N_2 - 1}$ . Для обеспечения сдвига СЛД<sup>-</sup> положим  $M_1 \gg N_1$ ,  $M_2 \gg N_2$ .

<sup>3</sup> Существует восемь видов сдвигов двумерного дискретного пространственного скользящего окна, половина из которых приведена выше. Оставшиеся 4 вида сдвигов: сдвиг вертикальный вверх (СВ<sup>+</sup>), сдвиг вертикальный вниз (СВ<sup>-</sup>), сдвиг горизонтальный вверх (СГ<sup>+</sup>), сдвиг горизонтальный вниз (СГ<sup>-</sup>).

Бин 2D ДПФ-ВП на пространственной частоте  $(p_1, p_2, \theta_1, \theta_2)$ , полученного сдвигом СЛДГ на  $r_1$  отсчетов вниз и на  $r_2$  отсчетов вправо, обозначим как  $S_{N_1, N_2}^{(p_1, p_2, \theta_1, \theta_2)}(r_1, r_2)$ :

$$S_{N_1, N_2}^{(p_1, p_2, \theta_1, \theta_2)}(r_1, r_2) = \frac{1}{N_1 \cdot N_2} \times \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x[(n_1 + r_1), (n_2 + r_2)] \cdot W_{N_1}^{(p_1 + \theta_1)n_1} \cdot W_{N_2}^{(p_2 + \theta_2)n_2}, \tag{10}$$

где  $r_1 = 0, 1, 2, \dots$ ;  $r_2 = 0, 1, 2, \dots$ .

При значениях сдвигов  $r_1 = 0$  и  $r_2 = 0$  в формуле (10) получим выражение, определяющее значение бина 2D ДПФ-ВП на пространственной частоте  $(p_1, p_2, \theta_1, \theta_2)$  сигнала  $x(n_1, n_2)$  при нулевом сдвиге:

$$S_{N_1, N_2}^{(p_1, p_2, \theta_1, \theta_2)}(0, 0) = \frac{1}{N_1 \cdot N_2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x(n_1, n_2) \cdot W_{N_1}^{(p_1 + \theta_1)n_1} \cdot W_{N_2}^{(p_2 + \theta_2)n_2}, \tag{11}$$

а задав в формуле (10) сдвиги  $r_1 = 1$  и  $r_2 = 1$ , получим выражение, определяющее значение бина

$$S_{N_1, N_2}^{(p_1, p_2, \theta_1, \theta_2)}(1, 1) = \frac{1}{N_1} \cdot \left[ \sum_{n_2=0}^{N_2-1} W_{N_1}^{(p_1 + \theta_1)n_1} \left\{ \frac{1}{N_2} \sum_{g_2=-1}^{N_2-2} x[(n_1 + 1), g_2] \cdot W_{N_2}^{(p_2 + \theta_2)g_2} \cdot W_{N_2}^{-(p_2 + \theta_2)} \right\} \right]. \tag{14}$$

Преобразуем выражение в фигурных скобках соотношения (14), изменив пределы суммирования и введя обозначение  $S_{N_2}^{(n_1, (p_2 + \theta_2))}(0)$  для ре-

$$\begin{aligned} \frac{1}{N_2} \sum_{g_2=-1}^{N_2-2} x[(n_1 + 1), g_2] \cdot W_{N_2}^{(p_2 + \theta_2)g_2} \cdot W_{N_2}^{-(p_2 + \theta_2)} &= \frac{W_{N_2}^{-(p_2 + \theta_2)}}{N_2} \left\{ \left[ \sum_{g_2=0}^{N_2-1} x[(n_1 + 1), g_2] \cdot W_{N_2}^{(p_2 + \theta_2)g_2} \right] + \right. \\ &+ \left. \left[ x[(n_1 + 1), 0] \cdot W_{N_2}^{(p_2 + \theta_2) \cdot 0} - x[(n_1 + 1), N_2] \cdot W_{N_2}^{(p_2 + \theta_2) \cdot N_2} \right] \right\} = \\ &= W_{N_2}^{-(p_2 + \theta_2)} \left[ S_{N_2}^{(n_1, (p_2 + \theta_2))}(0) + \frac{1}{N_2} \left( x[(n_1 + 1), 0] - x[(n_1 + 1), N_2] \right) \right]. \end{aligned} \tag{15}$$

С учетом (15) выражение (14) преобразуется к виду:

$$S_{N_1, N_2}^{(p_1, p_2, \theta_1, \theta_2)}(1, 1) = \frac{1}{N_1} \cdot \left\{ \sum_{n_2=0}^{N_1-1} W_{N_1}^{(p_1 + \theta_1)n_1} W_{N_2}^{-(p_2 + \theta_2)} \left[ S_{N_2}^{(n_1, (p_2 + \theta_2))}(0) + \frac{1}{N_2} \left( x[(n_1 + 1), 0] - x[(n_1 + 1), N_2] \right) \right] \right\}. \tag{16}$$

Введем обозначение  $S_{N_2}^{(n_1, (p_2 + \theta_2))}(1)$  для результата одномерного ДПФ-П на частоте  $(p_2 + \theta_2)$

$$S_{N_2}^{(n_1, (p_2 + \theta_2))}(1) = W_{N_2}^{-(p_2 + \theta_2)} \left[ S_{N_2}^{(n_1 + 1, (p_2 + \theta_2))}(1) + \frac{1}{N_2} \left( x[(n_1 + 1), 0] - x[(n_1 + 1), N_2] \right) \right]; \quad n_1 = \overline{0, N_1 - 2}. \tag{17}$$

2D ДПФ-ВП на пространственной частоте  $(p_1, p_2, \theta_1, \theta_2)$  сигнала  $x(n_1, n_2)$  при единичном сдвиге СЛДГ:

$$S_{N_1, N_2}^{(p_1, p_2, \theta_1, \theta_2)}(1, 1) = \frac{1}{N_1 \cdot N_2} \times \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x[(n_1 + 1), (n_2 + 1)] \cdot W_{N_1}^{(p_1 + \theta_1)n_1} \cdot W_{N_2}^{(p_2 + \theta_2)n_2}. \tag{12}$$

Положив  $(n_2 + 1) = g_2$ , преобразуем выражение (12) к виду

$$S_{N_1, N_2}^{(p_1, p_2, \theta_1, \theta_2)}(1, 1) = \frac{1}{N_1 \cdot N_2} \times \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{g_2=-1}^{N_2-2} x[(n_1 + 1), g_2] \cdot W_{N_1}^{(p_1 + \theta_1)n_1} \cdot W_{N_2}^{(p_2 + \theta_2)(g_2 - 1)}. \tag{13}$$

Используя свойство разделимости ядра 2D ДПФ-ВП, представим соотношение в следующем виде:

зультата на частоте  $(p_2 + \theta_2)$  одномерного параметрического ДПФ (ДПФ-П) при нулевом сдвиге:

Значение  $S_{N_2}^{((N_1-1), (p_2+\theta_2))}(1)$  может быть получено матричным умножением соответствующего столбца матрицы  $F_{N_2 \times N_2, \theta_2}^{(1)}$  на  $(N_1-1)$  строку матрицы  $X_{N_1 \times N_2}$ , полученную в результате единичного сдвига СЛДГ.

Соотношениями (16) и (17) определен метод быстрой диагональной скользящей пространственно-частотной обработки финитных двумерных действительных дискретных сигналов на основе дискретного преобразования Фурье с варьируемыми параметрами.

**Эффективность алгоритма, реализующего метод быстрой диагональной скользящей пространственно-частотной обработки финитных двумерных действительных**

$$\gamma = \frac{\text{число операций в алгоритме } A - \text{число операций в алгоритме } B}{\text{число операций в алгоритме } A} \cdot 100\% . \quad (18)$$

Сравнение алгоритма  $A$  с алгоритмом  $B$  проведем после их выхода на рабочий режим<sup>4</sup>.

Несложно установить, что для вычисления бина  $S_{N_1, N_2}^{(p_1, p_2, \theta_1, \theta_2)}(1, 1)$  алгоритмом  $A$  необходимо выполнить  $4 \cdot N_1 \cdot (N_2 + 1)$  действительных умножений и  $4 \cdot N_1 \cdot N_2 + 2 \cdot (N_1 - 1)$  действительных сложений, а алгоритмом  $B$  –  $4 \cdot (N_2 + 2 \cdot N_1 - 1)$  действительных умножений и  $2 \cdot (5 \cdot N_1 + 2 \cdot N_2 - 3)$  действительных сложений.

На рис. 2 и 3 приведены результаты сравнения алгоритмов  $A$  и  $B$  по критерию (18).

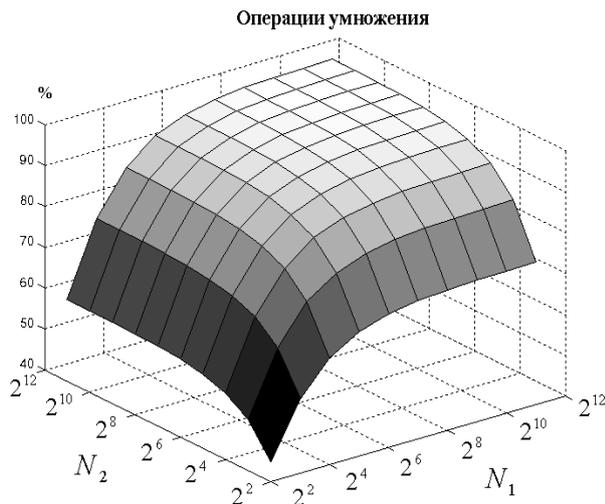


Рис. 2. Относительная экономия умножений в алгоритме  $B$  в сравнении с алгоритмом  $A$   
Fig. 2. Relative economy of multiplications in the algorithm in comparison with the algorithm

**дискретных сигналов на основе дискретного преобразования Фурье с варьируемыми параметрами**

Обозначим алгоритмом  $A$  стандартный алгоритм скользящей пространственно-частотной обработки, а алгоритмом  $B$  обозначим алгоритм, реализующий метод быстрой диагональной скользящей пространственно-частотной обработки финитных двумерных действительных дискретных сигналов на основе дискретного преобразования Фурье с варьируемыми параметрами.

При сравнении алгоритма  $A$  с алгоритмом  $B$  в качестве критерия используем относительную экономию вычислений:

Операции умножения и сложения

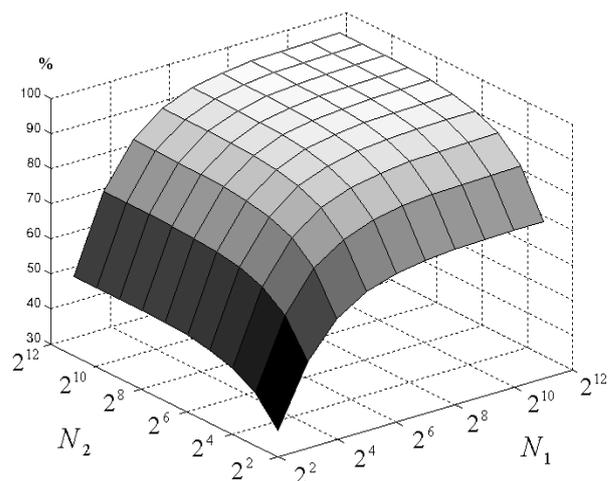


Рис. 3. Относительная экономия умножений и сложений в алгоритме  $B$  в сравнении с алгоритмом  $A$   
Fig. 3. Relative economy of multiplications and additions in the algorithm in comparison with the algorithm

**Заключение**

В рамках создания обобщенной теории Фурье-обработки финитных сигналов авторами предложены две теории: теория одномерного спектрального анализа дискретных сигналов на конечных интервалах в базисах параметрических экспоненциальных функций и теория двумерной цифровой обработки сигналов в базисах Фурье с варьируемыми параметрами.

Введен новый метод обработки финитных двумерных действительных дискретных сигналов в пространственно-частотной области на основе дискретного преобразования Фурье

<sup>4</sup> Под выходом алгоритма на рабочий режим будем понимать вычисление бина  $S_{N_1, N_2}^{(p_1, p_2, \theta_1, \theta_2)}(0, 0)$ .

с варьируемыми параметрами – метод скользящей пространственно-частотной обработки.

Разработан эффективный метод и алгоритм быстрой диагональной скользящей пространственно-частотной обработки финитных двумерных действительных дискретных сигналов на основе дискретного преобразования Фурье с варьируемыми параметрами.

#### Библиографические ссылки

1. *Rabiner L., Gold B.* Theory and Application of digital signal processing. New Jersey, Prentice-hall, 1975, 772 p.
2. *Favorskaya M., Savchina E., Popov A.* Adaptive visible image watermarking based on Hadamard transform. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 2018, vol. 450, no. 5, MIST Aerospace, pp. 052003.1-052003.6. doi: 10.1088/1757-899X/450/5/052003
3. *Klionskiy D. M., Kaplun D. I., Geppener V. V.* Empirical more decomposition for signal preprocessing and classification of intrinsic mode functions. Pattern Recognition and Image Analysis (Advances in Mathematical Theory and Applications). 2018. Vol. 28. No. 1. Pp. 122-132. Doi:10.1134/S1054661818010091.
4. *Ponomarev A.V., Ponomareva O.V.* Digital technologies in non-destructif testing. In: Journal of Physics: Conference Series. 2019. C. 12038.
5. *Ponomareva O.V., Ponomarev A.V.* Application of parametric discret Fourier transform non-destructif testing of composite materialaals with a free oscilation metod In: Journal of Physics: Conference Series. 2019. C. 12039.
6. *Batishchev V. I., Volkov I. I., Zolin A. G.* Using a stochastic basis in signal and image recovery problems. Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing, 2017. Vol. 53. No. 4. Pp. 414-420.
7. *Kulikovskikh I., Prokhorov S.* Psychological perspectives on implicit regularization: a model of retrieval-induced forgetting (RIF). In: Journal of Physics: Conference Series. electronic edition, 2018. Pp. 012079. Doi:10.1088/1742-6596/1096/1/012079
8. *Favorskaya M. N., Buryachenko V. V.* Authentication and copyright protection of videos under transmitting specifications. In: Computer Vision in Advanced Control Systems-5. ISRL. Favorskaya M. N., Jain L. C. (eds). Springer, Cham, 2020. Vol. 175. Pp. 119-160. doi.org/10.1007/978-3-030-33795-7\_5.
9. *Blahut, R. E.,* Fast Algorithms for Digital Signal Processing. Reading, MA: Addison-Wesley, 1984.
10. *Petrovsky N. A., Rybenkov E. V., Petrovsky A. A.* In: Signal Processing - Algorithms, Architectures, Arrangements, and Applications Conference Proceedings, SPA. 22. Сеп. "SPA 2018 - Signal Processing: Algorithms, Architectures, Arrangements, and Applications, Conference Proceedings", 2018, pp. 120-125. Doi: 10.23919/SPA.2018.8563311
11. *Likhtsinder B.* Conditional average value of queues in queuing systems with bath request flows. In: 2017 4th International Scientific-Practical Conference Problems of Infocommunications Science and Technology, PIC S and T 2017 - Proceedings. 2018, pp. 49-52. Doi:10.1109/INFOCOMMST.2017.8246347.
12. *Bakulin M.G., Vityazev V.V., Shumov A.P., Kreyndelin V.B.* Effective signal detection for the spatial multiplexing mimo systems. Telecommunications and Radio Engineering, 2018. vol. 77, no. 13, pp. 1141-1158. doi.org/10.1615/TelecomRadEng.v77.i13.30.
13. *Prozorov D., Tatarinova A.* Comparison of grapheme-to-phoneme conversions for spoken document In: 2019 IEEE East-West Design and Test Symposium, EWDTS 2019, 2019, pp. 8884449. doi:10.1109/EWDTS.2019.8884449.
14. *Prozorov D., Trubin I.* Detection of a signal in the simo system with spatial correlation of noise. In: 2018 7th Mediterranean Conference on Embedded Computing, MECO 2018 - Including ECYPS 2018, Proceedings. 7. 2018, pp. 1-5. doi:10.1109/MECO.2018.8405965.
15. *Uraikov A., Gurevich K., Alies M., Reshetnikov A., Kasatkin A., Uraikova N.* The tissue temperature during injection of drug solution into it as an integral indicator of rheology. In: Journal of Physics: Conference Series. 4th International Conference on Rheology and Modeling of Materials, IC-RMM 2019, 2020, pp. 012003. Doi:10.1088/1742-6596/1527/1/012003.
16. *Gonzalez R.C., Woods R.E.* Digital Image Processing, 4th Ed. Published by Pearson. 2018.–1168 pages.
17. *Pratt William K.* Digital image processing. 4th edl, A Wiley-Interscience publication 2007, 807 p.
18. *Rabiner L., Gold B.* Theory and Application of digital signal processing. New Jersey, Prentice-hall, 1975, 772 p.
19. *Пономарев А. В.* Основы теории двумерной цифровой обработки сигналов в базисах Фурье с варьируемыми параметрами // Цифровая обработка сигналов. 2019. № 2. С. 12–20.
20. *Пономарева О. В., Пономарев А. В.* Интерполяция в пространственной области двумерных дискретных сигналов с помощью быстрых преобразований Фурье // Интеллектуальные системы в производстве. 2019. Т. 17, № 1. С. 88–94. DOI 10.22213/24-10-9304-2019-1-88-94.
21. *Пономарева О. В., Пономарев А. В., Смирнова Н. В.* Цифровизация измерений спектров в базисе Фурье – тенденции развития и проблемы // Приборы и методы измерений. 2019. Т. 10. № 3. С. 271-280. DOI 10.21122/2220-9506-2019-10-3-271-280.
22. *Dzhenkins G., Vatts D.* Spektral'nyj analiz i ego prilozheniya: Vyp.1 Per s angl. V.F.Pisarenko [Spectral analysis and its applications: Vol.1 Per from English. VF Pisarenko]. Moscov, Mir, 1971, 312 p. (in Russ.).
23. *Dzhenkins G., Vatts D.* Spektral'nyj analiz i ego prilozheniya: Vyp.1 Per s angl. V.F.Pisarenko [Spectral analysis and its applications: Vol.2 Per from English. VF Pisarenko]. Moscov, Mir, 1971, 287 p. (in Russ.).
24. *Milent'ev V.S., Batishchev V.I.* Approksimacionnye metody i sistemy izmereniya i kontrolya parametrov periodicheskikh signalov [Approximation methods and systems for measuring and monitoring parameters

of periodic signals.]. Moscow, Fizmatlit, 2011, 240 p. (in Russ.).

25. Bendat Dzh., Pirsol A. Prikladnoj analiz sluchajnyh processov: Per. s angl. [Applied analysis of random processes: Trans. from English]. Moscow, Mir, 1989, 540 p. (in Russ.).

26. Marpl-ml. S.L. Cifrovoj spektral'nyj analiz i ego prilozheniya: Perevod s angl. [Digital Spectral Analysis and its Applications]. Moscow, World., 1990, 584 p. (in Russ.).

27. Oppengejm E.H. Primenenie cifrovoj obrabotki signalov: Perev. s angl. [The use of digital signal processing: Trans. from English]. Moscow, Mir, 1980. 552 p. (in Russ.).

28. Yaglom A.M. Korrelyacionnaya teoriya stacionarnyh sluchajnyh funkcij s primerami iz meteorologii [Correlation theory of stationary random functions with examples from meteorology]. Leningrad, 1981, 281 p. (in Russ.).

29. Batishchev V.I., Zolin A.G., Kosarev D.N., Romaneev A.E. [Approximation approach to solving the problems of analyzing and interpreting experimental data]. Herald of Samara State University. Series: Engineering, 2006, no. 40, pp. 57-65 (in Russ.).

30. Batishchev V.I., Melent'ev V.S. [Measuring and modeling approach to determining the integral characteristics of periodic signals] News of higher educational institutions. Electromechanics, 2003, no.6, pp.36-39 (in Russ.).

31. Batishchev V.I., Volkov I.I., Zolin A.G. [The use of the stochastic basis in the problems of the restoration of signals and images]. Avtometriya, 2017, vol. 53, no.4, pp.127-134 (in Russ.).

32. Batishchev V.I., Volkov I.I., Zolin A.G. [The study of the approximation properties of functional bases in the tasks of image reconstruction during remote sensing of the earth]. In the collection: Control and modeling problems in complex systems, works of the XVIII International Conference. Edited by: E.A. Fedosova, N.A. Kuznetsova, V.A. Witych, 2016, pp. 304-307 (in Russ.).

33. Prokhorov S.A., Kulikovskikh I.M. Unique Condition for generalized Laguerre Functions to solve pole Position Problem, Signal Processing, 2015. Vol. 108. Pp. 25-29.

34. Prohorov S.A., Grafkin V.V. Strukturno-spektral'nyj analiz sluchajnyh processov [Structural and spectral analysis of random processes]. Samara, 2010.

35. Prozorov D.E., Petrov E.P. Bystryj poisk shumopodobnyh signalov. Edited by: E.P.Petrova [Quick search for noise-like signals]. Kirov, 2006.

36. Пономарева О. В. Развитие теории и разработка методов и алгоритмов цифровой обработки информационных сигналов в параметрических базисах Фурье : дис. ... д-ра техн. наук: 05.13.01. Ижевск, 2016. 357 с.

## References

1. Rabiner L., Gold B. Theory and Application of digital signal processing. New Jersey, Prentice-hall, 1975, 772 p.

2. Favorskaya M., Savchina E., Popov A. Adaptive visible image watermarking based on Hadamard transform. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2018, vol. 450, no. 5, MIST Aerospace, pp. 052003.1-052003.6. doi: 10.1088/1757-899X/450/5/052003.

3. Klionskiy D. M., Kaplun D. I., Geppener V. V. Empirical more decomposition for signal preprocessing and classification of intrinsic mode functions. *Pattern Recognition and Image Analysis (Advances in Mathematical Theory and Applications)*, 2018. vol. 28. no. 1. pp. 122-132. doi:10.1134/S1054661818010091.

4. Ponomarev A.V., Ponomareva O.V. Digital technologies in non-destructif testing. In: *Journal of Physics: Conference Series*. 2019. C. 12038.

5. Ponomareva O.V., Ponomarev A.V. Application of parametric discret Fourier transform non-destructif testing of composite materials with a free oscilation metod In: *Journal of Physics: Conference Series*. 2019. C. 12039.

6. Batishchev V. I., Volkov I. I., Zolin A. G. Using a stochastic basis in signal and image recovery problems. *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*, 2017. vol. 53. no. 4. pp. 414-420.

7. Kulikovskikh I., Prokhorov S. Psychological perspectives on implicit regularization: a model of retrieval-induced forgetting (RIF). In: *Journal of Physics: Conference Series. electronic edition*, 2018. pp. 012079. doi:10.1088/1742-6596/1096/1/012079.

8. Favorskaya M. N., Buryachenko V. V. *Authentication and copyright protection of videos under transmitting specifications*. In: *Computer Vision in Advanced Control Systems-5*. ISRL. Favorskaya M. N., Jain L. C. (eds). Springer, Cham, 2020. Vol. 175. Pp. 119-160. doi.org/10.1007/978-3-030-33795-7\_5.

9. Blahut, R. E., *Fast Algorithms for Digital Signal Processing*. Reading, MA: Addison-Wesley, 1984.

10. Petrovsky N. A., Rybenkov E. V., Petrovsky A. A. In: *Signal Processing - Algorithms, Architectures, Arrangements, and Applications Conference Proceedings, SPA. 22. Cep. "SPA 2018 - Signal Processing: Algorithms, Architectures, Arrangements, and Applications, Conference Proceedings"*, 2018, pp. 120-125. doi: 10.23919/SPA.2018.8563311.

11. Likhttsinder B. Conditional average value of queues in queuing systems with bath request flows. In: *2017 4th International Scientific-Practical Conference Problems of Infocommunications Science and Technology, PIC S and T 2017 - Proceedings*. 2018, pp. 49-52. doi:10.1109/INFOCOMMST.2017.8246347.

12. Bakulin M.G., Vityazev V.V., Shumov A.P., Kreyndelin V.B. Effective signal detection for the spatial multiplexing mimo systems. *Telecommunications and Radio Engineering*, 2018. vol. 77, no. 13, pp. 1141-1158. doi.org/10.1615/TelecomRadEng.v77.i13.30.

13. Prozorov D., Tatarinova A. Comparison of grapheme-to-phoneme conversions for spoken document In: *2019 IEEE East-West Design and Test Symposium, EWDTs 2019*, 2019, pp. 8884449. doi:10.1109/EWDTs.2019.8884449.
14. Prozorov D., Trubin I. Detection of a signal in the simo system with spatial correlation of noise. In: *2018 7th Mediterranean Conference on Embedded Computing, MECO 2018 - Including ECYPS 2018, Proceedings*. 7. 2018, pp. 1-5. doi:10.1109/MECO.2018.8405965.
15. Urakov A., Gurevich K., Alies M., Reshetnikov A., Kasatkin A., Urakova N. The tissue temperature during injection of drug solution into it as an integral indicator of rheology. In: *Journal of Physics: Conference Series. 4th International Conference on Rheology and Modeling of Materials, IC-RMM 2019*, 2020, pp. 012003. doi:10.1088/1742-6596/1527/1/012003.
16. Gonzalez R.C., Woods R.E. *Digital Image Processing*, 4th Ed. Published by Pearson. 2018.–1168 pages.
17. Pratt William K. *Digital image processing*. 4<sup>th</sup> edl, A Wiley-Interscience publication 2007, 807 p.
18. Cooley, J. and Tukey, J. An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series, *Math. Comput.*, Vol. 19, No. 90, Apr. 1965, pp. 297–301. DOI: 10.2307/2003354.
19. Ponomarev A. V. [Fundamentals of the theory of two-dimensional digital signal processing in Fourier bases with variable parameters]. *Digital signal processing*, 2019, no. 2, pp. 12-20 (in Russ.).
20. Ponomareva O.V., Ponomarev A.V. [Interpolation in the spatial domain of 2D discrete signals using fast Fourier transforms]. *Intellektual'nye sistemy v proizvodstve*, 2019, vol. 17, no. 1, pp. 88-94 (in Russ.). DOI: 10.22213/24-10-9304-2019-1-88-94.
21. Ponomareva O.V., Ponomarev A.V., Smirnova N.V. [Digitalization of measurements of spectra in the Fourier basis - development trends and problems]. *Devices and Methods of Measurements*, 2019. Vol. 10, no. 3, pp. 271-280 (in Russ.). DOI 10.21122/2220-9506-2019-10-3-271-280.
22. Dzhenkins G., Vatts D. *Spektral'nyj analiz i ego prilozheniya: Vyp.1 Per s angl. V.F.Pisarenko* [Spectral analysis and its applications: Vol.1 Per from English. VF Pisarenko]. Moscow, Mir Publ., 1971, 312 p. (in Russ.).
23. Dzhenkins G., Vatts D. *Spektral'nyj analiz i ego prilozheniya: Vyp.1 Per s angl. V.F.Pisarenko* [Spectral analysis and its applications: Vol.2 Per from English. VF Pisarenko]. Moscow, Mir Publ., 1971, 287 p. (in Russ.).
24. Milent'ev V.S., Batishchev V.I. *Approksimacionnye metody i sistemy izmereniya i kontrolya parametrov periodicheskikh signalov* [Approximation methods and systems for measuring and monitoring parameters of periodic signals]. Moscow, Fizmatlit, 2011, 240 p. (in Russ.).
25. Bendat Dzh., Pirsol A. *Prikladnoj analiz sluchajnyh processov: Per. s angl.* [Applied analysis of random processes: Trans. from English]. Moscow, Mir Publ., 1989, 540 p. (in Russ.).
26. Marpl-ml. S.L. *Cifrovoj spektral'nyj analiz i ego prilozheniya: Perevod s angl.* [Digital Spectral Analysis and its Applications]. Moscow, World., 1990, 584 p. (in Russ.).
27. Oppengejm EH. *Primenenie cifrovoj obrabotki signalov: Perev. s angl.* [The use of digital signal processing: Trans. from English]. Moscow, Mir Publ., 1980. 552 p. (in Russ.).
28. Yaglom A.M. *Korrelyacionnaya teoriya stacionarnykh sluchajnykh funkcij s primerami iz meteorologii* [Correlation theory of stationary random functions with examples from meteorology]. Leningrad, 1981, 281 p. (in Russ.).
29. Batishchev V.I., Zolin A.G., Kosarev D.N., Romaneev A.E. [Approximation approach to solving the problems of analyzing and interpreting experimental data]. *Herald of Samara State University. Series: Engineering*, 2006, no. 40, pp. 57-65 (in Russ.).
30. Batishchev V.I., Melent'ev V.S. [Measuring and modeling approach to determining the integral characteristics of periodic signals]. *News of higher educational institutions. Electromechanics*, 2003, no.6, pp. 36-39 (in Russ.).
31. Batishchev V.I., Volkov I.I., Zolin A.G. [The use of the stochastic basis in the problems of the restoration of signals and images]. *Avtometriya*, 2017, vol. 53, no. 4, pp.127-134 (in Russ.).
32. Batishchev V.I., Volkov I.I., Zolin A.G. [The study of the approximation properties of functional bases in the tasks of image reconstruction during remote sensing of the earth]. In the collection: *Control and modeling problems in complex systems, works of the XVIII International Conference. Edited by: E.A. Fedosova, N.A. Kuznetsova, V.A. Wittych*, 2016, pp. 304-307 (in Russ.).
33. Prokhorov S.A., Kulikovskikh I.M. Unique Condition for generalized Laguerre Functions to solve pole Position Problem, *Signal Processing*. 2015. Vol. 108. Pp. 25-29.
34. Prohorov S.A., Grafkin V.V. *Strukturno-spektral'nyj analiz sluchajnyh processov* [Structural and spectral analysis of random processes]. Samara, 2010.
35. Prozorov D.E., Petrov E.P. *Bystryj poisk shumopodobnykh signalov. Edited by: E.P.Petrova* [Quick search for noise-like signals]. Kirov, 2006.
36. Ponomareva O.V. *Razvitie teorii i razrabotka metodov i algoritmov cifrovoj obrabotki informacionnykh signalov v parametricheskikh bazisah Fur'e* [Development of the theory and development of methods and algorithms for digital processing of information signals in parametric Fourier bases]: Dissertation of the doctor of technical sciences]. Izhevsk, 2016, 357 p. (in Russ.).

\* \* \*

### Sliding Space-Frequency Processing of Finite Two-Dimensional Real Discrete Signals Based on the Fourier Transform with Variable Parameters

A. V. Ponomarev, PhD in Economics, Kalashnikov ISTU, Izhevsk, Russia

O. V. Ponomareva, DSc in Engineering, Professor, Kalashnikov ISTU, Izhevsk, Russia

*In the field of Fourier processing of finite signals, three main directions of scientific research have been identified: Fourier processing of one-dimensional finite signals - processing of scalar functions of a scalar argument, Fourier processing of two-dimensional finite signals - processing of scalar functions of a vector argument, multichannel Fourier processing - processing of vector functions of a scalar argument. As part of the creation of a generalized theory of Fourier processing of finite signals, the authors proposed: the theory of spectral analysis of discrete signals at finite intervals in the bases of parametric exponential functions and the theory of two-dimensional digital signal processing in Fourier bases with variable parameters. The developed theories, generalizing the theory of Fourier processing of one-dimensional and two-dimensional signals, are based: on the introduction of new concepts of the shift of finite discrete signals in one-dimensional and two-dimensional cases and the introduction of new basic Fourier processing systems of discrete signals, which have the properties of multiplicativity, functions in the system. The mathematical apparatus of two-dimensional discrete Fourier transform with variable parameters in matrix and algebraic form is considered. A new method for processing finite two-dimensional real discrete signals in the spatial-frequency domain based on the discrete Fourier transform with variable parameters, the method of sliding spatial-frequency processing, has been introduced. An efficient method and algorithm for fast diagonal sliding spatial-frequency processing of finite two-dimensional real discrete signals based on the discrete Fourier transform with variable parameters has been developed. The estimation of the efficiency and effectiveness of the algorithm of the diagonal sliding two-dimensional discrete Fourier transform with variable parameters from the point of view of computational costs is carried out. As a result of experimental studies on model two-dimensional discrete finite signals, the validity, efficiency and reliability of the proposed method of sliding spatial-frequency processing of finite two-dimensional real discrete signals based on the discrete Fourier transform with variable parameters have been proved. A comparison (from the point of view of computational costs) of the developed method of sliding spatial-frequency processing of finite two-dimensional real discrete signals based on the discrete Fourier transform with variable parameters with the standard method of sliding processing of this type of signals is carried out.*

**Keywords:** two-dimensional discrete finite signal, direct two-dimensional discrete Fourier transform with variable parameters, reference domain, spatial frequency spectrum, sliding processing.

Получено: 19.11.2021