

УДК 531.383

DOI: 10.22213/2410-9304-2022-3-12-23

Математические модели для цифровых двойников неидеальных резонаторов твердотельных волновых гироскопов

К. В. Шишаков, доктор технических наук, доцент, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова, Ижевск, Россия

Приведен вывод разных вариантов математических моделей для построения цифровых двойников резонаторов твердотельных волновых гироскопов с механическими дефектами. Полученные результаты предназначены для сопровождения этапов производственного цикла гироскопов с целью повышения качества выпускаемой продукции.

В качестве базовой выбрана общая механическая модель резонатора в резонансных переменных. В ней для учета малых остаточных погрешностей изготовления резонатора введены функции пространственного неоднородного распределения толщины оболочки, а также плотности и вязкости материала.

В полученной полной аналитической модели широкополосной динамики резонатора гироскопа использовано разложение его деформируемой формы по спектру резонансных форм колебаний. При этом для рассматриваемых резонаторов с малыми остаточными дефектами, сравнимыми с погрешностями конечно-элементных схем программ моделирования, резонансные моды их цифровых двойников предполагается рассчитывать численно на осесимметричных моделях резонаторов. А остаточные погрешности изготовленной формы учитываются интегрально в аналитических моделях через введение малых параметров разночастотности и разnodобротности.

Далее из полной модели выделена рабочая модель узкополосной динамики гироскопа, которая приведена в разных формах представления в зависимости от удобства решения поставленных задач. При этом использованы фиксированные оси систем координат (оси жесткости резонатора, приборные оси измерительного устройства и другие), а также подвижные оси, следящие за волновым процессом.

Чтобы исключить влияние схемной вязкости в численных программах интегрирования, выполнен переход от первоначальной записи моделей в быстрых переменных к моделям в медленных переменных.

Основное применение приведенные математические зависимости и модели могут найти при совершенствовании методик внутрипроизводственного контроля и диагностики дефектов производимых резонаторов.

Ключевые слова: математическая модель, цифровой двойник, резонатор, твердотельный волновой гироскоп, механические дефекты.

Введение

В нашей стране все базовые теоретические основы анализа волновой динамики волновых твердотельных гироскопов (ВТГ \equiv ТВГ) были исчерпывающе разработаны к началу этого века, а полученные основные результаты многократно переизданы в монографиях [1–5] (и в других похожих). Одновременно были сформированы основные научные школы в этой области, а продолжение теоретических и практических исследований сместилось в прикладную область анализа тонкого влияния разных факторов и погрешностей. Это видно из многочисленных публикаций в центральных научных журналах и в первом десятилетии нашего века [6–10 и др.], и во втором десятилетии [11–18 и др.], и в последние годы [19–25 и др.]. Активность проводимых исследований по повышению точности гироскопов и производственного интереса к ним в разных технических приложениях подтверждается в том числе неубывающими многочисленными выступлениями на междуна-

родной конференции по интегрированным навигационным системам, ежегодно проводимой в Санкт-Петербурге.

В то же время для конкретных производственных нужд не всегда оказывается достаточным применение приведенных в отмеченной технической литературе конечных форм основополагающих уравнений и итоговых зависимостей, полученных целенаправленно для исследования разных выделенных там факторов. К таким повседневно актуальным задачам можно отнести разработку и совершенствование разнообразных методик контроля и диагностики дефектов и остаточных погрешностей, сопровождающих реальное производство гироскопов, а также для предэксплуатационной настройки его рабочих режимов. В таких случаях для учета и анализа тонких производственных погрешностей иногда удобнее использовать более ориентированные на реальную конструкцию и несколько отличающиеся по конечной форме представления уравнения. Их получение, сис-

темная увязка с выделением тонких факторов, обсуждение и использование для прикладного анализа является целью настоящей статьи.

Материал статьи развивает подход к формированию механических моделей резонатора ТВГ, описанный в более ранней статье автора, опубликованной в журнале «Вестник ИжГТУ» (№ 3 за 2010 г.). В частности, в представленные уравнения колебаний дополнительно введено неравномерное пространственное распределение конструкционной вязкости в материале резонатора, которое обычно учитывается в отмеченных выше публикациях. При этом основные полученные результаты статьи согласуются с известными и опубликованными в технической литературе зависимостями. Однако использованная для их получения единая платформа более удобно подходит для формирования цифровых двойников производимых твердотельных волновых гироскопов.

Приводимые ниже варианты представления моделей могут найти применение при совершенствовании тонких процессов контроля, диагностики и настройки характеристик твердотельных волновых гироскопов в производственном цикле их высокоточного изготовления. Это необходимо, во-первых, для уменьшения себестоимости изготовления гироскопов за счет укорочения ряда производственных цепочек доведения гироскопов до нужных точностей. Во-вторых, они могут оказаться полезными при перенастройке производства на выпуск новой продукции уменьшенных размеров.

При изложении материала статьи в некоторых случаях будут опущены подробные математические выкладки и доказательства, которые при желании можно в деталях найти в первой главе книги автора (Твердотельные волновые гироскопы: волновые процессы, управление, системная интеграция. Ижевск : Изд-во ИжГТУ, 2018. 264 с.).

Общая (широкополосная, многочастотная) механическая модель резонатора гироскопа в резонансных переменных

Резонаторы производимых в настоящее время твердотельных волновых гироскопов обычно представляют собой почти идеально осесимметричную тонкую механическую оболочку (кварцевую или металлическую) выбранной формы, в которой возбуждается стоячая волна. Обычно это удобная при технологическом изготовлении кварцевая полусфера, закрепленная через ножку в вершине на оси z (типа «юбка» с $R = \text{const}$; рис. 1), но встречаются и металлические резонаторы цилиндрической формы.

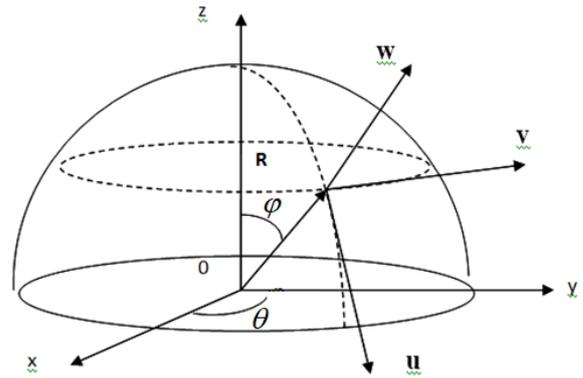


Рис. 1. Переменные и координаты для модели
Fig. 1. Variables and coordinates for the model

Общие уравнения механических колебаний такого резонатора можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \partial^2 W / \partial t^2 + 2[\Omega \times (\partial W / \partial t)] = \\ = [1 + \mu \cdot (\partial / \partial t)] \cdot L_y(\mathbf{R}) W + \Phi; \end{aligned} \quad (1)$$

$$W(\mathbf{R}, t) = U(\mathbf{R}, t) \mathbf{u}^0 + V(\mathbf{R}, t) \mathbf{v}^0 + W(\mathbf{R}, t) \mathbf{w}^0,$$

где $\mathbf{W} = (U, V, W)$ – вектор упругих деформаций с проекциями на единичные векторы $\mathbf{u}^0, \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0$ связанной с резонатором системы координат (рис. 1); $\mathbf{R} = (\theta, \phi, R)$ – сферические координаты, в которых угловая зависимость радиуса $R(\theta, \phi)$ задается формой резонатора; Ω – проекция угловой скорости вращения резонатора на ось z .

При этом для упрощения записи в векторе абсолютного ускорения (левая часть уравнения) оставлены только относительная (отвечает за колебательный процесс) и кориолисова (отвечает за гироскопический эффект) составляющие. А в функции $\Phi(\mathbf{R}, t) \equiv (\mathbf{F} + \xi) / (\rho h)$ собраны векторы управляющих распределенных нагрузок (\mathbf{F}), а также возмущающих воздействий и неучтенных малых составляющих абсолютного ускорения (ξ).

Кроме этого, для учета малых остаточных погрешностей изготовления резонатора введем функции пространственного распределения толщины оболочки $h(\mathbf{R})$, плотности $\rho(\mathbf{R})$ и вязкости $\mu(\mathbf{R})$ материала, где $\mathbf{R} = (\theta, \phi)$. В уравнении они учтены в операторе упругих деформаций $L_y(\mathbf{R})$ с использованием распределенной модели внутреннего конструкционного демпфирования Кельвина – Фойгта. Для этого в операторе $L_y(\mathbf{R})$ выполнена следующая формальная замена модуля Юнга E на функцию:

$$E \rightarrow \{E(\mathbf{R}) / [\rho(\mathbf{R})h(\mathbf{R})]\} \cdot [1 + \mu(\mathbf{R}) \cdot (\partial / \partial t)].$$

Для описания процессов резонансных колебаний векторную функцию перемещений

$W(\mathbf{R}, t)$ разложим по ортонормированным резонансным формам (модам) колебаний $W_i(\mathbf{R})$:

$$W(\mathbf{R}, t) = \sum_i f_i(t) W_i(\mathbf{R}); \Phi(\mathbf{R}, t) = \sum_i \Phi_i(t) W_i(\mathbf{R});$$

$$\omega_i^2 W_i = L_y W_i;$$

$$W_i(\mathbf{R}) = U_i(\mathbf{R}) \mathbf{u}^0 + V_i(\mathbf{R}) \mathbf{v}^0 + W_i(\mathbf{R}) \mathbf{w}^0,$$

где $(W_i, W_j) \equiv \iint W_i W_j d^2\mathbf{R} = \delta_{ij}$; δ_{ij} – дельта-символы Кронекера ($\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$); ω_i – резонансные частоты; интегрирование выполняется по форме оболочки резонатора $\mathbf{R} = (\theta, \varphi)$.

При работе с конкретными механическими конструкциями резонатора получить теоретические формулы представления резонансных мод $W_i = (U_i, V_i, W_i)$ оказывается обычно чрезмерно трудоемко. Поэтому на практике резонансные моды и соответствующие им частоты рассчитывают с помощью программ конечно-элементного моделирования (например, программы ANSYS). Однако учет крайне малых достигаемых на производстве гироскопов остаточных технологических точностей, которые в конечном счете и влияют на их точность, не всегда удается корректно описать такими конечно-элементными моделями из-за имеющейся схемной погрешности последних.

В таких ситуациях приходится идти на следующий компромисс: резонансные моды рассчитывать численно на осесимметричных конечно-элементных моделях резонатора, а остаточные погрешности изготовленной формы учитывать интегрально в аналитических моделях (приводятся далее) через введение малых параметров разночастотности и разnodобротности.

При таком подходе основной анализ переносится на исследование изменения во времени комплексных амплитуд колебаний f_i для резонансных мод, которые в общем случае будут описываться связанной системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\ddot{f}_i + 2 \sum_j \nu_{ij} \dot{f}_j + \omega_i^2 f_i + 2\Omega \sum_j K_{ij} \dot{f}_j = \Phi_i, \quad (2)$$

где ν_{ii} – коэффициенты собственного демпфирования; ν_{ij} ($i \neq j$) – коэффициенты перекрестного демпфирования (появляются в случаях, когда оси вязкости не совпадают с осями жесткости); K_{ij} ($K_{ii} = 0, K_{ij} = -K_{ji}$) – постоянные масштабные коэффициенты влияния кориолисовых сил, которые на практике обычно измеряют экспериментально в виде калибровочных функций (так как часто наблюдается слабая нелинейная зависимость таких коэффициентов от углового положения рабочей стоячей волны).

Здесь для теоретических оценок влияния формы и параметров резонатора на значения K_{ij} можно воспользоваться следующей формулой:

$$K_{ij} = \int [\sin\varphi (W_j V_i - V_j W_i) + \cos\varphi (U_j V_i - V_j U_i)] d^2\mathbf{R}.$$

Заметим, что в случае отсутствия перекрестного демпфирования ($\nu_{ij} = 0, i \neq j$) диагональные коэффициенты ν_{ii} будут представлять собой логарифмические декременты затухания соответствующих резонансных мод. С учетом известных формул $\mu = 2\nu / \omega^2 = 1 / \omega Q$ через них вычисляются модальные добротности: $Q_i = \omega_i / 2\nu_{ii}$, которые характеризуют отношение динамического отклика на резонансе к статическому отклику для соответствующих форм резонансных колебаний.

Так как изготавливаемые на производстве резонаторы имеют очень высокую степень осевой симметрии, поэтому в моделях их резонансных мод традиционно выделяют гармонические составляющие по углу θ :

$$W(\mathbf{R}, t) = \sum_m f_m(t) W_m(\mathbf{R}); \quad f_m = p_m + j q_m;$$

$$W_m(\mathbf{R}) \approx \exp[-j m(\theta - \theta_{\omega m})] \times$$

$$\times \{U_m(\varphi) \mathbf{u}^0 + j \cdot V_m(\varphi) \mathbf{v}^0 + W_m(\varphi) \mathbf{w}^0\};$$

$$W(\mathbf{R}, t) = \sum_m \{ [p_m(t) \cdot \cos \Delta\theta_{\omega m} + q_m(t) \cdot \sin \Delta\theta_{\omega m}] \times \\ \times [W_m(\varphi) \mathbf{w}^0 + U_m(\varphi) \mathbf{u}^0] + \\ + [p_m(t) \cdot \sin \Delta\theta_{\omega m} - q_m(t) \cdot \cos \Delta\theta_{\omega m}] \cdot [V_m(\varphi) \mathbf{v}^0] \},$$

где для краткости записи обозначены: $\Delta\theta_{\omega m} \equiv m(\theta - \theta_{\omega m})$; $\theta_{\omega m}$ – углы ориентации соответствующих резонансных осей, причем за начало отсчета угла θ выбрана приборная ось гироскопа (одна из осей конструкции его измерительного устройства).

А из-за того, что резонансное возбуждение и измерение создаваемых колебаний формы тонкой гибкой полусферы производится по ее нижней кромке «сбоку» (рис. 1), поэтому при анализе обычно ограничиваются доминирующей составляющей деформаций вдоль направления вектора \mathbf{w}^0 :

$$W_m(\varphi) \gg U_m(\varphi), V_m(\varphi) \Rightarrow W_m(\varphi) \approx W_m(\varphi) \mathbf{w}^0;$$

$$W(\mathbf{R}, t) \approx \sum_m \{ p_m(t) \cdot \cos \Delta\theta_{\omega m} + \\ + q_m(t) \cdot \sin \Delta\theta_{\omega m} \} \cdot W_m(\varphi) \mathbf{w}^0.$$

Заметим, что если измерение деформаций кромки полусферы выполняется «снизу», тогда для измерительного устройства будет иметь доминирующее значение направление \mathbf{u}^0 :

$$W_m(\varphi) \sim U_m(\varphi) \mathbf{u}^0;$$

$$W(\mathbf{R}, t) \sim \sum_m [p_m(t) \cdot \cos \Delta\theta_{\omega m} + \\ + q_m(t) \cdot \sin \Delta\theta_{\omega m}] \cdot U_m(\varphi) \mathbf{u}^0.$$

А так как структуры этой и предыдущей зависимостей очень похожи, поэтому для определенности будем рассматривать более часто используемый предыдущий вариант.

Тогда после умножения исходных уравнений (1) на $\exp[-jm(\theta - \theta_{\omega m})]$ и интегрирования по полному обороту, уравнения (2) в резонансных осях жесткости преобразуются к системе следующих пар уравнений (для каждого значения $m = 1, 2, 3, 4, \dots$):

$$\begin{aligned} \ddot{p}_m + 2\nu_{pm} \dot{p}_m + \omega_{pm}^2 p_m + 2(\nu_{pqt} - \Omega K_m) \dot{q}_m &= \Phi_{pm}, \\ \ddot{q}_m + 2\nu_{qm} \dot{q}_m + \omega_{qm}^2 q_m + 2(\nu_{qpt} + \Omega K_m) \dot{p}_m &= \Phi_{qm}. \end{aligned} \quad (3)$$

При этом наблюдаемая емкостными датчиками функция деформации области нижней кромки резонатора на каждой из резонансных частот будет характеризоваться следующими своими составляющими:

$$W_m(\theta, t) = p_m(t) \cdot \cos m(\theta - \theta_{\omega m}) + q_m(t) \cdot \sin m(\theta - \theta_{\omega m}).$$

В уравнениях (3) учтена наблюдаемая на практике обычно очень малая разночастотность (малое отличие $\omega_{pm} \neq \omega_{qm}$), которая может вызываться оставшимися угловыми дефектами $\rho(\theta)$, $h(\theta)$ и $E(\theta)$. Также учтен не менее важный фактор – остаточная неоднородность резонатора. Последняя проявляется в отличии логарифмических декрементов затухания $\nu_{pm} \neq \nu_{qm}$ по осям жесткости резонатора, что с учетом зависимости $2\nu = \omega/Q$ может вызываться как отличающимися резонансными частотами ω , так и отличающимися добротностями Q .

Кроме этого, во встречающихся на практике случаях углового разворота осей добротности относительно осей жесткости (из-за независимой специфики распределения микротрещин в материале резонатора, а также из-за особенностей закрепления его ножки для плохо сбалансированных резонаторов) могут проявиться и малые коэффициенты $\nu_{pqt} \neq \nu_{qpt}$ перекрестного демпфирования. Их значения можно вычислить после разложения угловой зависимости функции $\mu(\theta)$ в гармонический ряд Фурье с учетом малости нелинейных коэффициентов $|\Delta\mu_m|/\mu_0 \ll 1$:

$$\begin{aligned} \mu(\theta) &= \mu_0 + 2\sum_m \Delta\mu_m \cos m(\theta - \theta_{\mu m}) = \\ &= \mu_0 + 2\sum_m \Delta\mu_m \cos m(\theta - \theta_{\omega m} - \Delta\theta_{\mu\omega m}) = \\ &= \mu_0 + 2\sum_m \Delta\mu_m \cdot [\cos m \Delta\theta_{\mu\omega m} \cos \Delta\theta_{\omega m} + \\ &\quad + \sin m \Delta\theta_{\mu\omega m} \sin \Delta\theta_{\omega m}], \end{aligned}$$

где $\Delta\theta_{\mu\omega m} \equiv \theta_{\mu m} - \theta_{\omega m}$; $\theta_{\mu m}$ – углы ориентации соответствующих осей вязкости (добротности); $\Delta\theta_{\omega m} \equiv m(\theta - \theta_{\omega m})$.

В целом, выписанная модель (3) ориентирована на независимость колебаний разных мод с отличающимися номерами m . В то же время, если выбрать более общую угловую зависимость функции вязкости $\mu(\theta, \varphi)$, то может проявиться и перекрестное демпфирование между разными резонансными парами (с разными номерами m). Кроме этого, очень слабая связанность разных мод колебаний с отличающимися номерами m может возникнуть из-за отличия их форм от идеальных гармонических функций по углу θ (см. (2)).

Также заметим, что по своему определению собственные моды колебаний резонатора рассчитываются при отсутствии демпфирования. И при отсутствии перекрестного демпфирования ($\nu_{pqt} = \nu_{qpt} = 0$) для неподвижного резонатора ($\Omega = 0$) уравнения (3) будут взаимно независимы. Однако при наличии углового расхождения осей жесткости и добротности будем иметь уже ненулевые коэффициенты перекрестного демпфирования и вытекающую отсюда связанность резонансных колебаний. А их автономность будет возникать только в моменты прохождения рабочей стоячей волной углового положения соответствующей моды (когда $p_m(t) \approx 0$ или $q_m(t) \approx 0$).

Рабочая (узкополосная, одночастотная) механическая модель резонатора гироскопа в резонансных переменных

В выпускаемых в настоящее время промышленностью твердотельных волновых гироскопах рабочими резонансными модами традиционно выбирают две формы собственных колебаний упругой оболочки с почти совпадающими частотами, соответствующие по углу θ вторым гармоникам ($m = 2$). При этом для исключения возбуждения других резонансных мод применяют эффективную частотную фильтрацию в каналах измерения и в контурах управления волновыми процессами. В результате из системы уравнений (2) в узкополосной модели остаются только следующие два уравнения (индекс $m = 2$ везде в дальнейшем для упрощения записи будем опускать):

$$\begin{aligned} \ddot{p} + 2\nu_p \dot{p} + \omega_p^2 p + 2(\nu_{pq} - \Omega K) \dot{q} &= \Phi_p, \\ \ddot{q} + 2\nu_q \dot{q} + \omega_q^2 q + 2(\nu_{qp} + \Omega K) \dot{p} &= \Phi_q. \end{aligned} \quad (4)$$

В них значение масштабного коэффициента K обычно можно предварительно оценить (его значение расположено вблизи величины 0,6). Далее при предэксплуатационной калибровке каждого изготовленного гироскопа значения K уточняют в специальном эксперименте с парал-

лельным выявлением слабой угловой зависимости $K(\theta)$.

При этом деформации рабочей кромки резонатора и распределение управляющего воздействия описываются следующими функциями:

$$\begin{aligned} W(\theta, t) &= p(t) \cdot \cos 2(\theta - \theta_\omega) + q(t) \cdot \sin 2(\theta - \theta_\omega), \\ \Phi(\theta, t) &= \Phi_p(t) \cdot \cos 2(\theta - \theta_\omega) + \Phi_q(t) \cdot \sin 2(\theta - \theta_\omega). \end{aligned} \quad (5)$$

Приведенные уравнения (4), (5) выберем в качестве базовой механической модели колебаний резонатора в резонансных переменных.

Уточним в ней параметрические зависимости для коэффициентов демпфирования, используя разложение $\mu(\theta)$ и обозначение $\Delta\theta_{\mu\omega} \equiv \theta_\mu - \theta_\omega$. После подстановки (5) в уравнение (1) и интегрирования по полному обороту, ненулевой вклад дадут только постоянная составляющая и четвертая угловая гармоника:

$$\begin{aligned} \mu(\theta) &= \mu_0 + 2\Delta\mu \cdot \cos 4(\theta - \theta_\omega - \Delta\theta_{\mu\omega}) = \\ &= \mu_0 + 2\Delta\mu \cdot [\cos 4\Delta\theta_{\mu\omega} \cos 4(\theta - \theta_\omega) + \\ &\quad + \sin 4\Delta\theta_{\mu\omega} \sin 4(\theta - \theta_\omega)]. \end{aligned}$$

Тогда с учетом использованного обозначения $2\nu = \mu \omega^2$ имеем:

$$\begin{aligned} 2\nu_p &= (\mu_0 + \Delta\mu \cdot \cos 4\Delta\theta_{\mu\omega}) \cdot \omega_p^2; \\ 2\nu_{pq} &= \Delta\mu \cdot \sin 4\Delta\theta_{\mu\omega} \cdot \omega_q^2; \\ 2\nu_q &= (\mu_0 - \Delta\mu \cdot \cos 4\Delta\theta_{\mu\omega}) \cdot \omega_q^2; \\ 2\nu_{qp} &= \Delta\mu \cdot \sin 4\Delta\theta_{\mu\omega} \cdot \omega_p^2, \end{aligned} \quad (6)$$

где для частного случая изотропного резонатора:

$$\begin{aligned} \Delta\mu = 0 &\Rightarrow \nu_{pq} = \nu_{qp} = 0, \\ 2\nu_p &= \mu_0 \omega_p^2, \quad 2\nu_q = \mu_0 \omega_q^2, \end{aligned}$$

а при совпадении осей жесткости и добротности анизотропного резонатора:

$$\begin{aligned} \Delta\theta_{\mu\omega} = 0 &\Rightarrow \nu_{pq} = \nu_{qp} = 0, \\ 2\nu_p &= (\mu_0 + \Delta\mu) \omega_p^2, \quad 2\nu_q = (\mu_0 - \Delta\mu) \omega_q^2. \end{aligned}$$

Перейдем с учетом (6) к средним значениям параметров (ω, ν) и малым отклонениям от них (знаки $\Delta\omega, \Delta\nu$ могут быть произвольными):

$$\begin{aligned} \omega^2 &\equiv (\omega_p^2 + \omega_q^2)/2, \quad \nu \equiv (\nu_p + \nu_q)/2 = \mu_0 \omega^2/2, \\ \Delta\omega^2 &\equiv (\omega_p^2 - \omega_q^2)/2 = (\omega_p - \omega_q) \cdot (\omega_p + \omega_q)/2; \\ \delta\mu &\equiv \Delta\mu / \mu_0, \\ \Delta\nu_{\mu\omega} &\equiv (\nu_{pq} + \nu_{qp})/2 = \nu \delta\mu \sin 4\Delta\theta_{\mu\omega}, \\ \Delta\nu_{\mu\omega} &\equiv (\nu_p - \nu_q)/2 = \nu \delta\mu \cos 4\Delta\theta_{\mu\omega} \end{aligned}$$

и будем принимать $\Delta\nu_0 \equiv (\nu_{pq} - \nu_{qp}) / 2 = -\Delta\mu \cdot \Delta\omega^2 \cdot \sin 4(\theta_\mu - \theta_\omega) / 2 \approx 0$.

В таких коэффициентах уравнения (4) преобразуются в следующие:

$$\begin{aligned} \ddot{p} + 2(\nu + \Delta\nu_{\mu\omega})\dot{p} + 2\Delta\nu_{\mu\omega}\dot{q} + (\omega^2 + \Delta\omega^2)p - 2\Omega K\dot{q} &= \Phi_p, \\ \ddot{q} + 2(\nu - \Delta\nu_{\mu\omega})\dot{q} + 2\Delta\nu_{\mu\omega}\dot{p} + (\omega^2 - \Delta\omega^2)q + 2\Omega K\dot{p} &= \Phi_q. \end{aligned} \quad (7)$$

Важно отметить, что при физической интерпретации наблюдаемых (измеряемых) волновых процессов модель (4) не всегда удобна. Особенно это относится к выпускаемым резонаторам с малой остаточной разночастотностью рабочих резонансных колебаний (когда оси жесткости почти вырождаются или могут терять свою позиционную устойчивость под воздействием слабо изменяемых факторов). В этих случаях наглядность модели в резонансных переменных теряется, так как угол $\theta_\omega(t)$ может стать непредсказуемой функцией (изменяющейся под действием температуры или включенного контура управления дополнительно создаваемой электрической пружины).

Поэтому далее получим более удобные для использования другие формы модели с привязкой к конкретным фиксированным приборным и другим осям координат или же с лучшей наглядностью описывающие волновые процессы в резонаторе гироскопа.

Преобразование уравнений колебаний резонатора гироскопа для наблюдения в новых фиксированных осях

Сначала выпишем вспомогательную общую модель в выбранных зафиксированных неподвижных осях (X, Y) , которые в общем случае развернуты относительно приборных осей (C, S) на угол θ_x :

$$\begin{aligned} X(t) &= C(t) \cos 2\theta_x + S(t) \sin 2\theta_x, \\ Y(t) &= -C(t) \sin 2\theta_x + S(t) \cos 2\theta_x. \end{aligned} \quad (8)$$

При этом будем иметь следующую взаимную связь осей (X, Y) с резонансными осями (p, q) через разворот на удвоенный угол $\Psi_x \equiv 2(\theta_x - \theta_\omega)$:

$$\begin{aligned} X(t) &= p(t) \cos \Psi_x + q(t) \sin \Psi_x, \\ Y(t) &= -p(t) \sin \Psi_x + q(t) \cos \Psi_x. \end{aligned}$$

В качестве выбираемых осей (X, Y) в зависимости от решаемой задачи особый интерес представляют следующие четыре варианта:

1. Оси жесткости резонатора: $\theta_x = \theta_\omega$, $(X, Y) = (p, q)$. Они удобны для случаев значительной разночастотности, когда их угловое положение стабильно.

2. Приборные оси измерительного устройства, в которых непосредственно наблюдаются колебательные процессы: $\theta_x = 0$, $(X, Y) = (C, S)$. Они удобны для случаев малой остаточной разночастотности, когда угловое положение осей жесткости может изменяться при эксплуатации.

3. Вспомогательные, временно зафиксированные по углу оси стоячих волн: $\theta_x \approx \theta_A$, $(X, Y) \approx (A, B)$, дискретно отслеживающие положение рабочей стоячей волны. Их можно использовать для случаев $\Omega = 0$ при замороженном (или очень малом) угловом дрейфе рабочей стоячей волны. Также они могут быть удобны для наглядного физического объяснения свойств волновых процессов. В этих осях будет приближенно наблюдаться временная ортогональность колебаний рабочей и квадратурной стоячих волн, а их разность амплитуд будет почти максимальна.

4. Приборные оси двухканального управления волновыми процессами. Этот вариант может стать удобным для анализа специального режима возбуждения рабочего волнового процесса в резонаторе с помощью двух крестообразно расположенных четверок электродов в восьмиэлектродной схеме управления резонансными колебаниями.

Для записи в новых переменных (X, Y) умножим (7) последовательно на $\cos \Psi_x$ и $\sin \Psi_x$, взаимно сложим и вычтем. Дополнительно учтем:

$$\begin{aligned} p &= X \cos \Psi_x - Y \sin \Psi_x, q = X \sin \Psi_x + Y \cos \Psi_x \Rightarrow \\ &\Rightarrow p \cos \Psi_x + q \sin \Psi_x = X, p \cos \Psi_x - q \sin \Psi_x = \\ &= X \cos 2\Psi_x - Y \sin 2\Psi_x, \\ & p \sin \Psi_x + q \cos \Psi_x = \\ &= X \sin 2\Psi_x + Y \cos 2\Psi_x, -p \sin \Psi_x + q \cos \Psi_x = Y. \end{aligned}$$

В итоге вместо (5), (7) после преобразований получим:

$$\begin{aligned} \ddot{X} + 2v_x \dot{X} + \omega_x^2 X - 2\Omega K \dot{Y} &= \Phi_x + \Delta\omega_{xy}^2 Y + 2\Delta v_{xy} \dot{Y}, \\ \ddot{Y} + 2v_y \dot{Y} + \omega_y^2 Y + 2\Omega K \dot{X} &= \Phi_y + \Delta\omega_{xy}^2 X + 2\Delta v_{xy} \dot{X}; \end{aligned} \quad (9)$$

$$W(\theta, t) = X(t) \cdot \cos 2(\theta - \theta_x) + Y(t) \cdot \sin 2(\theta - \theta_x),$$

$$\Phi(\theta, t) = \Phi_x(t) \cdot \cos 2(\theta - \theta_x) + \Phi_y(t) \cdot \sin 2(\theta - \theta_x),$$

где $\Psi_x \equiv 2(\theta_x - \theta_\omega)$ и имеем следующие зависимости:

$$\omega_x^2 = \omega^2 + \Delta\omega^2 \cos 2\Psi_x = \omega_p^2 \cos^2 \Psi_x + \omega_q^2 \sin^2 \Psi_x,$$

$$\omega_y^2 = \omega^2 - \Delta\omega^2 \cos 2\Psi_x = \omega_p^2 \sin^2 \Psi_x + \omega_q^2 \cos^2 \Psi_x,$$

$$\Delta\omega_{xy}^2 = \Delta\omega^2 \sin 2\Psi_x;$$

$$v_x = v + \Delta v_{\mu c} \cos 2\Psi_x + \Delta v_{\mu s} \sin 2\Psi_x =$$

$$= v[1 + \delta\mu \cos 4(\theta_x - \theta_\mu)],$$

$$v_y = 2v - v_x,$$

$$\Delta v_{xy} = \Delta v_{\mu c} \sin 2\Psi_x - \Delta v_{\mu s} \cos 2\Psi_x =$$

$$= v\delta\mu \sin 4(\theta_x - \theta_\mu). \quad (10)$$

(10)

В этой модели изменение углового положения осей жесткости (угла $\theta_\omega(t)$) можно учитывать только через изменение коэффициентов (10), не требуя пересчета волнового процесса (4), (5) в новые резонансные оси.

Также заметим, что погрешность записи моделей (4), (9) может слабо зависеть от погрешности «чистоты» вторых угловых гармоник в резонансных модах колебаний, то есть от погрешности представления (5). А процесс вывода (9), (10) можно было бы упростить с использованием комплексных переменных для описания гармонических по углу функций. Однако примененное здесь непосредственное преобразование модальных резонансных колебаний имеет большую наглядность с точки зрения понимания используемых физических проекций переменных.

Переход к медленным переменным в модели динамики резонатора гироскопа, записанной для фиксированных осей координат

Современные резонаторы твердотельных волновых гироскопов имеют очень высокую добротность (порядка 10^6 и выше). В этом случае при непосредственном численном интегрировании уравнений (9) появляющееся «схемное демпфирование» может стать сравнимым со сверхмалым конструкционным демпфированием. Поэтому при построении моделей динамики резонаторов традиционно переходят к механическим моделям в медленных переменных (их будем обозначать нижним индексом «0»).

В нашем случае выполним следующую приближенную замену, выделяя высокочастотные колебания на средней резонансной частоте ω :

$$X(t) = X_0(t) \exp[-j\omega t],$$

$$\dot{X} = (\dot{X}_0 - j\omega X_0) \exp[-j\omega t] \approx -j\omega X;$$

$$\ddot{X} = (\ddot{X}_0 - 2j\omega \dot{X}_0 - \omega^2 X_0) \exp[-j\omega t] \approx$$

$$\approx -(2j\omega \dot{X}_0 + \omega^2 X_0) \exp[-j\omega t];$$

$$Y(t) = Y_0(t) \exp[-j\omega t],$$

$$\dot{Y} \approx -j\omega Y; \quad \ddot{Y} \approx -(2j\omega \dot{Y}_0 + \omega^2 Y_0) \exp[-j\omega t].$$

Подставляя их в (9), запишем уравнения изменения медленных переменных (огibaющих амплитуд):

$$\begin{aligned} \dot{X}_0 + (v_x - j\delta\omega_c)X_0 - \Omega KY_0 &= \\ = -j\Phi_{x0}/2\omega + (-j\delta\omega_s + \Delta v_{xy})Y_0, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \dot{Y}_0 + (v_y + j\delta\omega_c)Y_0 + \Omega KX_0 &= \\ = -j\Phi_{y0}/2\omega + (-j\delta\omega_s + \Delta v_{xy})X_0, \end{aligned}$$

где $\Phi_x(t) = \Phi_{x0}(t) \exp[-j\omega t]$, $\Phi_y(t) = \Phi_{y0}(t) \exp[-j\omega t]$.

$$\delta\omega_c \equiv \omega(\Delta\omega^2/\omega^2)\cos 2\Psi_x/2, \delta\omega_s \equiv \omega(\Delta\omega^2/\omega^2)\sin 2\Psi_x/2.$$

Выделим в комплексных амплитудах действительные и мнимые составляющие:

$$X_0 = X_c + jX_s, Y_0 = Y_c + jY_s;$$

$$\Phi_{x0}/2\omega = \Phi_{xc} + j\Phi_{xs}, \Phi_{y0}/2\omega = \Phi_{yc} + j\Phi_{ys},$$

где $X(t) = X_c(t) \cos \omega t + X_s(t) \sin \omega t$; $\Phi_x(t)/2\omega = \Phi_{xc}(t) \cos \omega t + \Phi_{xs}(t) \sin \omega t$; $Y(t) = Y_c(t) \cos \omega t + Y_s(t) \sin \omega t$; $\Phi_y(t)/2\omega = \Phi_{yc}(t) \cos \omega t + \Phi_{ys}(t) \sin \omega t$.

Тогда, разделяя в (11) действительные и мнимые части, будем иметь:

$$\begin{aligned} \dot{X}_c + v_x X_c + \delta\omega_c X_s - \Omega K Y_c &= \Phi_{xs} + \Delta v_{xy} Y_c + \delta\omega_s Y_s, \\ \dot{X}_s + v_x X_s - \delta\omega_c X_c - \Omega K Y_s &= -\Phi_{xc} + \Delta v_{xy} Y_s - \delta\omega_s Y_c, \\ \dot{Y}_c + v_y Y_c - \delta\omega_c Y_s + \Omega K X_c &= \Phi_{ys} + \Delta v_{xy} X_c + \delta\omega_s X_s, \\ \dot{Y}_s + v_y Y_s + \delta\omega_c Y_c + \Omega K X_s &= -\Phi_{yc} + \Delta v_{xy} X_s - \delta\omega_s X_c. \end{aligned} \quad (12)$$

Для записи модели (12) в приборных или резонансных осях следует воспользоваться зависимостями, вытекающими из единого представления функции деформации в таких осях:

$$\begin{aligned} W(\theta, t) &= X(t) \cos 2(\theta - \theta_x) + Y(t) \sin 2(\theta - \theta_x) = \\ &= C(t) \cos 2\theta + S(t) \sin 2\theta = \\ &= p(t) \cos 2(\theta - \theta_\omega) + q(t) \sin 2(\theta - \theta_\omega). \end{aligned}$$

Как уже ранее отмечалось, если угловое положение осей жесткости стабильно, тогда удобно выбирать модель в резонансных осях, полагая: $(X, Y) = (p, q)$, $\theta_x = \theta_\omega$. Она наиболее подходит для численного моделирования колебаний резонатора, так как непосредственно объединяется с конечно-элементной моделью его резонансных пространственных мод колебаний.

В свою очередь, при преимущественной работе с измерительными сигналами лучше работать в приборных осях, принимая: $(X, Y) = (C, S)$, $\theta_x = 0$.

А при анализе контуров управления неподвижным резонатором (при $\Omega = 0$) иногда можно приближенно полагать: $(X, Y) \approx (A, B)$, $\theta_x \approx \theta_A$. Здесь различие амплитуд стоячих волн достигает максимума, причем они становятся хорошо различимы из-за своей временной ортогональности. В то же время для случая подвижного основания следует использовать несколько модифицированные уравнения, которые приведем в следующем пункте.

В целом, выписанные уравнения (12) из-за линейности своей структуры наиболее удобны для численного моделирования волновых процессов в резонаторе с учетом синтеза контуров

управления ими. При этом медленные переменные (оггибающие высокочастотных колебаний) не сложно наблюдать, используя стандартные процедуры обработки измерительных сигналов.

Однако эти уравнения имеют плохую наглядность при физической интерпретации волновых процессов. Поэтому на практике их желательно дополнять переходом к традиционному для колебательных процессов амплитудно-фазовому представлению переменных состояния и управления:

$$\begin{aligned} X(t) &= a_X \cos(\omega t - \varphi_X), X_0 = a_X \exp[j\varphi_X]; \\ Y(t) &= a_Y \cos(\omega t - \varphi_Y), Y_0 = a_Y \exp[j\varphi_Y]; \\ \Phi_x(t)/2\omega &= a_{\varphi_x} \cos(\omega t - \varphi_{\varphi_x}), \\ \Phi_{x0}/2\omega &= a_{\varphi_x} \exp[j\varphi_{\varphi_x}]; \\ \Phi_y(t)/2\omega &= a_{\varphi_y} \cos(\omega t - \varphi_{\varphi_y}), \\ \Phi_{y0}/2\omega &= a_{\varphi_y} \exp[j\varphi_{\varphi_y}], \end{aligned}$$

используя для этого известные связи этих двух представлений;

$$\begin{aligned} X_c &= a_X \cos \varphi_X, X_s = a_X \sin \varphi_X; \\ Y_c &= a_Y \cos \varphi_Y, Y_s = a_Y \sin \varphi_Y, \\ \text{а также } a_X^2 &= X_c^2 + X_s^2, a_Y^2 = Y_c^2 + Y_s^2; \\ \text{tg } \varphi_X &= X_s / X_c, \text{tg } \varphi_Y = Y_s / Y_c; \\ a_X a_Y \sin(\varphi_X - \varphi_Y) &= X_s Y_c - X_c Y_s; \\ a_X a_Y \cos(\varphi_X - \varphi_Y) &= X_c Y_c + X_s Y_s. \end{aligned}$$

В свою очередь, при теоретическом параметрическом анализе волновых процессов в резонаторе гироскопа удобнее сразу использовать амплитудно-фазовое представление модели (11). В этом случае после разделения действительных и мнимых частей будем иметь:

$$\begin{aligned} \dot{a}_X + v_x a_X - \Omega K \cos(\varphi_X - \varphi_Y) \cdot a_Y &= \\ = a_{\varphi_x} \sin(\varphi_{\varphi_x} - \varphi_X) + [\Delta v_{xy} \cos(\varphi_X - \varphi_Y) - \\ - \delta\omega_s \sin(\varphi_X - \varphi_Y)] \cdot a_Y, \\ \dot{a}_Y + v_y a_Y + \Omega K \cos(\varphi_X - \varphi_Y) \cdot a_X &= \\ = a_{\varphi_y} \sin(\varphi_{\varphi_y} - \varphi_Y) + [\Delta v_{xy} \cos(\varphi_X - \varphi_Y) + \\ + \delta\omega_s \sin(\varphi_X - \varphi_Y)] \cdot a_X, \\ (\dot{\varphi}_X - \delta\omega_c) \cdot a_X + \Omega K \sin(\varphi_X - \varphi_Y) \cdot a_Y &= \\ = -a_{\varphi_x} \cos(\varphi_{\varphi_x} - \varphi_X) - [\Delta v_{xy} \sin(\varphi_X - \varphi_Y) + \\ + \delta\omega_s \cos(\varphi_X - \varphi_Y)] \cdot a_Y, \\ (\dot{\varphi}_Y + \delta\omega_c) \cdot a_Y + \Omega K \sin(\varphi_X - \varphi_Y) \cdot a_X &= \\ = -a_{\varphi_y} \cos(\varphi_{\varphi_y} - \varphi_Y) + [\Delta v_{xy} \sin(\varphi_X - \varphi_Y) - \\ - \delta\omega_s \cos(\varphi_X - \varphi_Y)] \cdot a_X, \end{aligned} \quad (13)$$

где с учетом ранее введенных обозначений коэффициентов:

$$\begin{aligned}\delta\omega_c &\equiv \omega(\Delta\omega^2/\omega^2)\cos 4(\theta_x - \theta_\omega)/2, \\ \delta\omega_s &\equiv \omega(\Delta\omega^2/\omega^2)\sin 4(\theta_x - \theta_\omega)/2; \\ v_{x,y} &= v[1 \pm \delta\mu\cos 4(\theta_x - \theta_\mu)], \\ \Delta v_{xy} &= v\delta\mu\sin 4(\theta_x - \theta_\mu).\end{aligned}$$

На практике такая модель будет удобна при обработке внутренних измерительных сигналов $(X, Y) = (C, S)$, $\theta_x = 0$, так как проясняет их амплитудно-фазовые внутренние структуры.

В то же время для формирования выходных измерительных сигналов гироскопов обычно работают с ортогональными по времени и в пространстве результирующими стоячими волнами $(X, Y) \approx (A, B)$, $\theta_x \approx \theta_A$. Для перехода к ним с учетом изменчивости углового положения $\theta_A(t)$ требуется несколько подправить вывод уравнений типа (13), чему посвящен следующий пункт.

Переход к медленным переменным в следящей подвижной системе координат для получения модели динамики стоячих волн

Напомним, что основным выходным измерительным сигналом интегрирующих твердотельных волновых гироскопов является угловое положение $\theta_A(t)$ рабочей стоячей волны (т. к. имеет место пропорциональность его изменения углу поворота основания гироскопа). В свою очередь, рабочая стоячая волна создается синфазным возбуждением резонансных мод (p, q) . В случаях даже малого нарушения их синфазности создаваемый колебательный процесс визуально разлагается на две одновременно ортогональные по углу и во времени стоячие волны: рабочую с комплексной амплитудой $A t$ и квадратурную – с почти незаметной комплексной амплитудой $B t$. Из них рабочая стоячая волна создается наилучшей синхронизацией резонансных мод, а квадратурная волна появляется из-за ошибок синхронизации:

$$\begin{aligned}W &\approx A \cos 2(\theta - \theta_A) + B \sin 2(\theta - \theta_A). \quad (14) \\ A &= p \cos \Psi + q \sin \Psi, \\ B &= -p \sin \Psi + q \cos \Psi; \\ \Psi &\equiv 2(\theta_A - \theta_\omega);\end{aligned}$$

где $A(t) = A_0(t) \exp[-j\omega t] = a_A(t) \exp[j(\varphi_A - \omega t)]$; $a_B / a_A \rightarrow 0$; $B(t) = B_0(t) \exp[-j\omega t] = a_B(t) \times \exp[j(\varphi_B - \omega t)]$; $\varphi_A - \varphi_B = \pm\pi/2$.

Так как всегда имеет место временная ортогональность стоячих волн $(\varphi_A - \varphi_B = \pm\pi/2)$, поэтому перейдем в уравнениях состояния (13) от переменных $(a_X, a_Y, \varphi_X, \varphi_Y)$ к переменным $\{a_A(t), a_B(t), \varphi_A(t), \theta_A(t)\}$. Кроме этого, требуется дополнительный учет скорости изменения угла $\theta_A(t)$:

$$\begin{aligned}\dot{p}_0 \cos \psi + \dot{q}_0 \sin \psi &= \dot{A}_0 - \dot{\psi} B_0, \\ -\dot{p}_0 \sin \psi + \dot{q}_0 \cos \psi &= \dot{B}_0 + \dot{\psi} A_0.\end{aligned}$$

В результате уравнения (11) преобразуются к следующим:

$$\begin{aligned}\dot{A}_0 + (v_x - j\delta\omega_c)A_0 - (\Omega K + 2\dot{\theta}_A)B_0 &= \\ = -j\Phi_{A0} / 2\omega + (-j\delta\omega_s + \Delta v_{xy})B_0, \\ \dot{B}_0 + (v_y + j\delta\omega_c)B_0 + (\Omega K + 2\dot{\theta}_A)A_0 &= \\ = -j\Phi_{B0} / 2\omega + (-j\delta\omega_s + \Delta v_{xy})A_0,\end{aligned} \quad (15)$$

а уравнения (13) с учетом $\cos(\varphi_A - \varphi_B) = 0$ примут вид:

$$\begin{aligned}\dot{a}_A + v_A a_A &= a_{\varphi_A} \sin(\varphi_{\varphi_A} - \varphi_A) - \delta\omega_s \text{Sgn}_{AB} \cdot a_B, \\ \dot{a}_B + v_B a_B &= a_{\varphi_B} \sin(\varphi_{\varphi_B} - \varphi_B) + \delta\omega_s \text{Sgn}_{AB} \cdot a_A, \\ (\dot{\varphi}_A - \delta\omega_c) \cdot a_A + (\Omega K + 2\dot{\theta}_A) \text{Sgn}_{AB} \cdot a_B &= \\ = -a_{\varphi_A} \cos(\varphi_{\varphi_A} - \varphi_A) - \Delta v_{xy} \text{Sgn}_{AB} \cdot a_B, \\ (\dot{\varphi}_A + \delta\omega_c) \cdot a_B + (\Omega K + 2\dot{\theta}_A) \text{Sgn}_{AB} \cdot a_A &= \\ = -a_{\varphi_B} \cos(\varphi_{\varphi_B} - \varphi_B) + \Delta v_{xy} \text{Sgn}_{AB} \cdot a_A.\end{aligned}$$

Здесь будем иметь уже зависящие от времени параметры (через $\theta_A(t)$):

$$\begin{aligned}\delta\omega_c &\equiv \omega(\Delta\omega^2/\omega^2)\cos 4(\theta_A - \theta_\omega)/2, \\ \delta\omega_s &\equiv \omega(\Delta\omega^2/\omega^2)\sin 4(\theta_A - \theta_\omega)/2; \\ v_{A,B} &= v[1 \pm \delta\mu\cos 4(\theta_A - \theta_\mu)], \\ \Delta v_{xy} &= v\delta\mu\sin 4(\theta_A - \theta_\mu),\end{aligned}$$

а введенный знак $\text{Sgn}_{AB} \equiv \sin(\varphi_A - \varphi_B) = \pm 1$ важен для организации контура подавления квадратурной волны.

В первом из приведенных уравнений для эффективного управления амплитудой рабочей стоячей волны обычно принимают:

$$\Delta\varphi_{\varphi_A} \equiv \pi/2 - (\varphi_{\varphi_A} - \varphi_A) \rightarrow 0.$$

При этом во втором уравнении для варианта одноканальной (одноэлектродной) системы параметрического возбуждения в идеальном случае следует полагать: $a_{\varphi_B} \approx 0$. А для варианта двухканальной системы возбуждения резонатора с целью повышения эффективности погашения амплитуды квадратурной волны следует аналогично выбрать фазу управления:

$$\Delta\varphi_{\varphi_B} \equiv \pi/2 - (\varphi_{\varphi_B} - \varphi_B) \rightarrow 0.$$

С учетом сказанного в дальнейшем будем полагать:

$$\begin{aligned}\cos(\varphi_{\varphi_A} - \varphi_A) &= \sin \Delta\varphi_{\varphi_A} \approx \Delta\varphi_{\varphi_A}; \\ \cos(\varphi_{\varphi_B} - \varphi_B) &\approx \Delta\varphi_{\varphi_B}; \\ \sin(\varphi_{\varphi_A} - \varphi_A) &= \cos \Delta\varphi_{\varphi_A} \approx 1 - \Delta\varphi_{\varphi_A}^2/2 \rightarrow 1, \\ \sin(\varphi_{\varphi_B} - \varphi_B) &\rightarrow 1.\end{aligned}$$

Кроме этого, для удобства записи формул разрешим произвольные знаки амплитуды квадратурной волны:

$$a_B := \text{Sgn}_{AB} \cdot a_B; \quad a_{\Phi B} := \text{Sgn}_{AB} \cdot a_{\Phi B}.$$

В итоге будем иметь более простую запись модели:

$$\begin{aligned} \dot{a}_A + v_A a_A &= a_{\Phi A} - \delta\omega_s \cdot a_B, \\ \dot{a}_B + v_B a_B &= a_{\Phi B} + \delta\omega_s \cdot a_A. \end{aligned} \quad (16)$$

$$(\dot{\varphi}_A - \delta\omega_c) \cdot a_A + (\Omega K + 2\dot{\theta}_A + \Delta v_{xy}) \cdot a_B = -a_{\Phi A} \Delta\varphi_{\Phi A},$$

$$(\dot{\varphi}_A + \delta\omega_c) \cdot a_B + (\Omega K + 2\dot{\theta}_A - \Delta v_{xy}) \cdot a_A = -a_{\Phi B} \Delta\varphi_{\Phi B}.$$

Входящие сюда амплитудно-фазовые переменные можно связать с амплитудами и фазами сигналов в выбранных неподвижных осях (X, Y) через использование (14). Выпишем некоторые из таких связей:

$$\begin{aligned} a_A^2 + a_B^2 &= a_X^2 + a_Y^2; \quad a_A a_B = a_X a_Y \sin(\varphi_X - \varphi_Y); \\ (a_A^2 - a_B^2) \cos 4(\theta_A - \theta_X) &= a_X^2 - a_Y^2; \\ (a_A^2 - a_B^2) \sin 4(\theta_A - \theta_X) / 2 &= a_X a_Y \cos(\varphi_X - \varphi_Y); \\ \text{tg } 4(\theta_A - \theta_X) &= 2a_X a_Y \cos(\varphi_X - \varphi_Y) / (a_X^2 - a_Y^2). \end{aligned}$$

Формирование выходного измерительного сигнала гироскопа

Так как первые два уравнения (16) получились относительно независимыми, поэтому они удобны для синтеза контура стабилизации амплитуды рабочей стоячей волны ($a_A \rightarrow \text{const}$) и контура подавления квадратурной волны ($a_B \rightarrow 0$). При этом можно принимать:

$$v_{A,B} = v[1 \pm \delta\mu \cos 4(\theta_A - \theta_\mu)] \approx v.$$

В свою очередь, на основе второй пары уравнений (16) раскрывается зависимость измеряемой угловой скорости Ω от скорости изменения углового положения рабочей стоячей волны. Для этого умножим эти уравнения сначала на a_B , a_A и сложим. Потом умножим на a_A , a_B и вычтем:

$$\begin{aligned} \Omega K + 2\dot{\theta}_A &\approx \Delta v_{xy} - 2\dot{\varphi}_A \cdot (a_B / a_A) - (a_{\Phi B} / a_A) \Delta\varphi_{\Phi B} + \\ &+ (a_B / a_A) \cdot (a_{\Phi A} / a_A) \Delta\varphi_{\Phi A}, \\ \dot{\varphi}_A &\approx \delta\omega_c - (a_{\Phi A} / a_A) \Delta\varphi_{\Phi A} + (a_B / a_A) \cdot (a_{\Phi B} / a_A) \Delta\varphi_{\Phi B}, \\ \delta\omega_c &= \delta\omega \cos 4(\theta_A - \theta_\omega). \end{aligned}$$

Здесь второе уравнение характеризует изменение частоты рабочей стоячей волны в зависимости от ее углового положения. А из первого уравнения выделяется функция систематического дрейфа сигнала гироскопа, обусловленная остаточными разночастотностью и разнодобротностью, которая при малых $a_B / a_A \rightarrow 0$ примет вид:

$$2\dot{\theta}_A = -\Omega K + D,$$

$$\begin{aligned} D &\approx \Delta v_{xy} - 2\dot{\varphi}_A \cdot (a_B / a_A) - (a_{\Phi B} / a_A) \Delta\varphi_{\Phi B} \approx \\ &\approx v\delta\mu \sin 4(\theta_A - \theta_\mu) - \\ &- 2(a_B / a_A) \delta\omega \cos 4(\theta_A - \theta_\omega) - (a_{\Phi B} / a_A) \Delta\varphi_{\Phi B}. \end{aligned} \quad (17)$$

Если же говорить о систематическом дрейфе угла θ_A рабочей стоячей волны, тогда следует дополнительно проинтегрировать (17) по времени.

Заметим, что рассмотрение влияния угловых и временных погрешностей управляющих усилий является отдельной большой задачей анализа.

Замечания о неучтенных факторах

Применительно к узкополосным моделям отдельный интерес могут представлять погрешности представления зависимостей (5). Для их оценки рекомендуется выполнять конечно-элементное моделирование 3D-модели механической конструкции резонатора в составе всей конструкции гироскопа. Форма получаемых рабочих мод покажет меру доминирования второй угловой гармоники в них по сравнению с присутствием нежелательных первой, третьей и остальных угловых гармоник.

Заметим, что физически наличие первой угловой гармоники будет характеризовать наклонные колебания резонатора на ножке. В этом случае не только может изменяться равномерность зазора между резонатором и корпусом, но и усиливаться рассеяние колебательной энергии через ножку (что приводит к уменьшению добротности резонатора гироскопа).

В свою очередь, при работе гироскопа в условиях широкополосных инерционных возмущений дополнительный интерес будут представлять широкополосные модели резонаторов гироскопов в более общей форме (2) или (3). На практике к их имитационному моделированию следует переходить после отладки детально рассмотренных узкополосных имитационных моделей (так как они будут похожи в рамках использованного модального подхода их построения).

Анализ результатов

В ряде случаев построение цифровых двойников выпускаемых твердотельных волновых гироскопов может являться полезным дополнением к их рабочей документации. При этом в их состав могут быть включены: 1) 3D-модель механической конструкции резонатора в составе всей конструкции гироскопа; 2) модальный конечно-элементный анализ этой конструкции с целью формирования «частотного рисунка» гироскопа и оценки частотных взаимовлияний

пассивных и активных элементов; 3) сопровождающие модели волновой динамики.

В приведенной статье рассмотрена увязка этих трех задач. Основное внимание уделено получению разных удобных форм математических моделей механических резонаторов для формирования цифровых двойников резонаторов твердотельных волновых гироскопов с механическими дефектами. Выписанные математические зависимости предназначены для разработки и совершенствования методик внутрипроизводственного контроля и диагностики остаточных механических погрешностей производимых резонаторов гироскопов.

В общей широкополосной механической модели резонатора гироскопа в резонансных переменных учтены функции пространственного распределения толщины оболочки, плотности и вязкости со слабо выраженными неравномерностями. Поэтому резонансные моды рассчитываются численно на осесимметричных конечно-элементных моделях резонатора, а остаточные погрешности изготовленной формы учтены интегрально в аналитических моделях через введение малых разночастотности и разнодобротности. В результате основной анализ переносится на исследование изменения во времени комплексных амплитуд колебаний для резонансных мод.

В рабочей узкополосной механической модели резонатора гироскопа оставлены две формы собственных колебаний упругой оболочки с почти совпадающими частотами и соответствующие вторым гармоникам по углу. Для исключения условий возбуждения других резонансных мод предполагается эффективная частотная фильтрация в каналах измерения и в контурах управления волновыми процессами. Так как в выпускаемых резонаторах с малой остаточной разночастотностью оси жесткости могут терять свою позиционную устойчивость под воздействием слабо изменяемых факторов (под действием изменения температурного режима или при работе контура квазистатического управления электрической пружиной), поэтому выполнено преобразование модели к другим вариантам угловых осей координат.

Исходные модели выписаны в быстрых переменных. Для практических расчетов с целью исключения влияния схемной вязкости численных методов интегрирования выполнен переход к медленным переменным. При таком переходе получились отличающиеся варианты моделей для случаев фиксированных и следящих за стоячими волнами осей координат.

Несмотря на то что основное внимание было уделено узкополосной динамике волновых процессов в резонаторах гироскопов, однако некоторая похожесть уравнений колебаний для других резонансных частот позволит при необходимости без труда формировать более широкополосные цифровые двойники резонаторов гироскопов, обобщая приведенные зависимости на другие резонансные пары колебаний.

Приведенные формы представления моделей резонаторов будут полезны при совершенствовании методического обеспечения производственных операций контроля, а также диагностики дефектов и остаточных погрешностей, сопровождающих реальное производство гироскопов. На данном уровне развития теории ТВГ можно утверждать, что приведенные модели исчерпывающе описывают механическую модель резонаторов гироскопов для наиболее важных практических случаев их эксплуатации.

Библиографические ссылки

1. Журавлёв В. Ф., Климов Д. М. Волновой твердотельный гироскоп. М.: Наука, 1985. 125 с.
2. Матвеев В. А., Липатников В. И., Алехин А. В. Проектирование волнового твердотельного гироскопа. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1997. 168 с.
3. Климов Д. М., Журавлев В. Ф., Жбанов Ю. К. Кварцевый полусферический резонатор (Волновой твердотельный гироскоп). М.: Ким Л. А., 2017. 194 с.
4. Лунин Б. С., Матвеев В. А., Басараб М. А. Волновой твердотельный гироскоп. Теория и технологии. М.: Радиотехника, 2014. 176 с.
5. Меркурьев И. В., Подалков В. В. Динамика микромеханического и волнового твердотельного гироскопа. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 228 с.
6. Журавлев В. Ф. Задача идентификации погрешностей обобщенного маятника Фуко // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 5. С. 5–9.
7. Жбанов Ю. К., Каленова Н. В. Поверхностный дисбаланс волнового твердотельного гироскопа // Изв. РАН. МТТ. 2001. № 3. С. 11–18.
8. Loveday P.W., Rogers C.A. The influence of control system design on the performance of vibratory gyroscopes // Journal of Sound and Vibration, 2002, № 3, 417-432 p.
9. Журавлев В. Ф. Дрейф несовершенного ВТГ // Изв. РАН. МТТ. 2004. № 4. С. 19–23.
10. Ragon V., Remilleux G. A new control mode for axisymmetrical vibrating gyroscope greatly improving performance // in Proceedings of 18rd Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation System, 2011.
11. Статическая балансировка цилиндрических резонаторов волновых твердотельных гироскопов / М. А. Басараб, Б. С. Лунин, В. А. Матвеев, Е. А. Чуманкин // Гироскопия и навигация. 2014. Т. 85, № 2. С. 43–51.

12. Маслов А. А., Маслов Д. А., Меркурьев И. В. Идентификация параметров волнового твердотельного гироскопа с учетом нелинейности колебаний резонатора // Приборы и системы: управление, контроль, диагностика. 2014. № 5. С. 18–23.

13. Басараб М. А., Матвеев В. А., Лунин В. С. Аппроксимация распределения плотности резонатора волнового твердотельного гироскопа по измеренным параметрам дебаланса // Приборы и системы: управление, контроль, диагностика. 2015. № 10. С. 9–16.

14. Козубняк С. А. Расщепление собственных частот колебаний цилиндрического резонатора волнового твердотельного гироскопа, вызванное возмущением формы // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Серия «Приборостроение». 2015. № 3. С. 39–49.

15. Darvishian A. et al. Anchor loss in Hemispherical Shell Resonator // Journal of Microelectromechanical Systems. 2017. Vol. 26: № 1. P. 51-66.

16. Маслов Д. А. Идентификация параметров гироскопа с цилиндрическим резонатором при учете влияния нелинейности на амплитуду возбуждающего воздействия // Машиностроение и инженерное образование. 2017. № 1 (50). С. 24–31.

17. Чуманкин Е. А., Лунин Б. С., Басараб М. А. Особенности балансировки металлических резонаторов волновых твердотельных гироскопов // Динамика сложных систем – XXI век. 2018. Т. 12, № 4. С. 85–95.

18. Расчет расщепления собственной частоты цилиндрического резонатора твердотельного волнового гироскопа на основе численного интегрирования высокой точности / О. С. Нарайкин, Ф. Д. Сорокин, А. М. Гуськов, С. А. Козубняк, Д. С. Вахлярский // Инженерный журнал: наука и инновации. 2019. № 5 (89). С. 4.

19. Zhuravlev V.Ph., Perebyaev S.E. Current state and scientific and technological forecast of a revolutionary breakthrough in wave solid-state gyroscope technology // Information Innovative Technologies. Materials of the International scientific - practical conference. Prague, 2020. P. 113-119.

20. Журавлёв В. Ф. Пространственный осциллятор Ван-дер-Поля. Технические приложения // Изв. РАН. МТТ. 2020. № 1. С. 158–164.

21. Журавлёв В. Ф. О формировании обратных связей в пространственном осцилляторе Ван-дер-Поля // Прикладная математика и механика. 2020. Т. 84, № 2. С. 151–157.

22. Басараб М. А., Лунин Б. С., Колесников А. В. Численно-аналитическое решение дифференциального уравнения свободных колебаний упругого кольца при произвольном законе поворота основания // Динамика сложных систем – XXI век. 2020. Т. 14, № 2. С. 5–15.

23. Компенсация уходов волнового твердотельного гироскопа, вызванных анизотропией упругих свойств монокристаллического резонатора / А. А. Маслов, Д. А. Маслов, И. В. Меркурьев, В. В. Подалков // Гироскопия и навигация. 2020. Т. 28, № 2 (109). С. 25–36.

24. Маслов Д. А., Меркурьев И. В. Влияние нелинейных свойств электростатических датчиков управ-

ления на динамику цилиндрического резонатора волнового твердотельного гироскопа // Изв. РАН. МТТ. 2021. № 6. С. 88–110.

25. Басараб М. А., Лунин Б. С., Чуманкин Е. А. Балансировка металлических резонаторов волновых твердотельных гироскопов общего применения // Динамика сложных систем – XXI век. 2021. Т. 15, № 1. С. 58–68.

References

1. Juravlev V.F., Klimov D.M. *Volnovoi tverdotel'nyi giroskop* [Wave solid state gyroscope]. Moscow: Science, 1985. 125 p. (in Russ.).

2. Matveev V.A., Lipatnikov V.I., Alehin A.V. *Proektirovanie volnovogo tverdotelnogo giroskopa* [Designing of hemispherical resonator gyroscope]. Moscow: MGTU im. N. E. Bauman, 1997. (in Russ.).

3. Klimov D.M., Zhuravlev V.F., Zhbanov Yu.K. *Proektirovanie volnovogo tverdotel'nogo giroskopa* [Quartz hemispherical resonator (Wave solid-state gyroscope)]. Moscow: Kim L.A., 2017. 194 p. (in Russ.).

4. Lunin B.S., Matveev V.A., Basarab M.A. *Volnovoi tverdotel'nyi giroskop. Teoriya i tekhnologii* [Wave solid state gyroscope. Theory and technology]. Moscow: Radiotekhnika, 2014. 176 p. (in Russ.).

5. Merkuryev I.V., Podalkov V.V. *Dinamika mikromekhanicheskogo i volnovogo tverdotel'nogo giroskopa* [Dynamics of micromechanical and wave solid-state gyroscope]. Moscow: FIZMATLIT, 2009. 228 p. (in Russ.).

6. Zhuravlev V.F. *Zadacha identifikatsii pogreshnostei obobshchennogo mayatnika Fuko* [The problem of identification of errors of the generalized Foucault pendulum]. Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Solid state mechanics. 2000. No. 5. Pp. 5-9 (in Russ.).

7. Zhbanov Yu.K., Kalenova N.V. [Superficial imbalance of wave solid-state gyroscope]. Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Solid state mechanics. 2001. No. 3. Pp. 11-18 (in Russ.).

8. Loveday P.W., Rogers C.A. [The influence of control system design on the performance of vibratory gyroscopes]. Journal of Sound and Vibration. 2002. No. 3. Pp. 417-432 (in Russ.).

9. Zhuravlev V.F. [Drift imperfect VTG]. Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Solid state mechanics. 2004. No. 4. Pp. 19-23.

10. Ragon V., Remilleux G. [A new control mode for axisymmetrical vibrating gyroscope greatly improving performance]. Proceedings of 18rd Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation System, 2011.

11. Basarab M.A., Lunin B.S., Matveev V.A., Chumankin E.A. [Static balancing of cylindrical resonators of wave solid-state gyroscopes]. Gyroscopy and navigation. 2014. Vol. 85, no. 2. Pp. 43-51 (in Russ.).

12. Maslov A.A., Maslov D.A., Merkuryev I.V. [Identification of parameters of wave solid-state gyroscope taking into account the nonlinearity of resonator oscillations]. Devices and systems: control, control, diagnostics. 2014. No. 5. Pp. 18-23 (in Russ.).

13. Basarab M.A., Matveev V.A., Lunin V.S. [Approximation of the density distribution of the resonator of

the wave solid-state gyroscope according to the measured debalance parameters]. Devices and systems: control, control, diagnostics. 2015. No. 10. Pp. 9-16 (in Russ.).

14. Kozubnyak S.A. [Splitting of natural frequencies of oscillations of a cylindrical resonator of a wave solid-state gyroscope caused by perturbation of the form]. Vestnik MSTU named after N.E. Bauman. Series "Instrumentation". 2015. No. 3. P. 39-49.

15. Darvishian A. et al. [Anchor loss in Hemispherical Shell Resonator]. Journal of Microelectromechanical Systems. 2017. Vol. 26, no. 1. Pp. 51-66.

16. Maslov D.A. [Identification of gyroscope parameters with a cylindrical resonator when taking into account the effect of nonlinearity on the amplitude of the excitation effect]. Mechanical Engineering and Engineering Education. 2017. No. 1. P. 24-31.

17. Chumankin E.A., Lunin B.S., Basarab M.A. [Features of balancing metal resonators of wave solid-state gyroscopes]. Dynamics of complex systems - XXI century. 2018. Vol. 12, no. 4. Pp. 85-95 (in Russ.).

18. Naraikin O.S., Sorokin F.D., Guskov A.M., Kozubnyak S.A., Vakhlyarsky D.S. [Calculation of the splitting of the natural frequency of the cylindrical resonator of a solid-state wave gyroscope based on numerical integration of high accuracy]. Journal of Engineering: Science and Innovation. 2019. No. 5. P. 4 (in Russ.).

19. Zhuravlev V.Ph., Perelyaev S.E. Current state and scientific and technological forecast of a revolutionary breakthrough in wave solid-state gyroscope technology. Information Innovative Technologies. Materials of

the International scientific - practical conference. Prague, 2020. P. 113-119.

20. Zhuravlev V.F. Spatial oscillator Van der Pola. [Technical appendices]. Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Solid state mechanics. 2020. No. 1. Pp. 158-164 (in Russ.).

21. Zhuravlev V.F. [On the formation of feedbacks in the spatial oscillator of Van der Pol]. Applied Mathematics and Mechanics. 2020. Vol. 84, no. 2. Pp. 151-157 (in Russ.).

22. Basarab M.A., Lunin B.S., Kolesnikov A.V. [Numerical-analytical solution of the differential equation of free oscillations of the elastic ring at an arbitrary law of rotation of the base]. Dynamics of complex systems - XXI century. 2020. Vol. 14, no. 2. Pp. 5-15 (in Russ.).

23. Maslov A.A., Maslov D.A., Merkuryev I.V., Podalkov V.V. [Compensation for the departures of the wave solid-state gyroscope caused by anisotropy of the elastic properties of the monocrystalline resonator]. Gyroscopy and navigation. 2020. Vol. 28, no. 2. Pp. 25-36 (in Russ.).

24. Maslov D.A., Merkuryev I.V. [Influence nonlinear properties of electrostatic control sensors on the dynamics of a cylindrical resonator of a wave solid-state gyroscope]. Izv. RAN. Solid state mechanics. 2021. No. 6. Pp. 88-110 (in Russ.).

25. Basarab M.A., Lunin B.S., Chumankin E.A. [Balancing of metal resonators of wave solid-state gyroscopes of general application]. Dynamics of complex systems - XXI century. 2021. Vol. T. 15, no. 1. Pp. 58-68 (in Russ.).

Mathematical Models for Nonideal Resonator Digital Twins of Solid-State Wave Gyroscopes

K. V. Shishakov, DSc in Engineering, Professor, Kalashnikov ISTU, Izhevsk, Russia

Various variants of mathematical models for digital twins of solid-state wave gyroscope resonators with mechanical defects is given. The obtained results are designated for gyroscope manufacturing cycle maintenance to improve the quality of the output products.

A general model of resonator in a resonant variable was chosen as the basic one. To take into account small residual errors of resonant manufacturing functions of space non-homogeneous distribution of shell thickness were introduced into it together with density and viscosity of material.

The obtained full analytical model of wide-range gyroscope resonator employs expansion of its strained shape by the resonant form spectrum oscillations. For the considered resonators with small residual defects comparable to errors of finite-element schemes of modelling programs, resonant modes of their digital twins are to be calculated numerically for axially symmetrical resonator models. And residual errors of the manufactured shape are considered integrally in analytical models by introduction of different frequency and Q -values small parameters.

Later, a working model of narrow-range gyroscope dynamics is extracted from the full model, that is presented in different forms depending on the convenience of stated problem solutions. For that purpose, fixed coordinate system axes (resonator stiffness axes, measurement instrument axes and others) were used along with moving axes following the wave process.

A transition from model initial notation via fast variables into slow variable models was done, so as to avoid the effect of scheme viscosity in numerical integration programs.

The presented mathematical relations and models is possible may possibly be applied for improvement of in-process control methods and defect diagnosis of resonators to be produced.

Keywords: mathematical model, digital twin, resonator, solid state wave gyroscope, mechanical defects.

Получено: 12.05.22