УДК 531.383
DOI: 10.22213/2410-9304-2024-1-11-20

# Измерение колебательно-диссипативных характеристик резонаторов твердотельных волновых гироскопов: алгоритмы на основе анализа переходных процессов свободных колебаний

*К. В. Шишаков*, доктор технических наук, доцент, РТУ МИРЭА, Москва, Россия

*Статья посвящена рассмотрению алгоритмов измерения колебательно-диссипативных характеристик резонаторов интегрирующих твердотельных волновых гироскопов. Перечень вариантов таких алгоритмов ограничен только алгоритмами, использующими результаты наблюдения за переходными процессами свободных колебаний после возбуждения в резонаторе выраженной стоячей волны.*

*В перечень измеряемых колебательно-диссипативных характеристик включены величины разночастотности и разнодобротности резонаторов гироскопов, а также угловые положения осей жесткости и добротности.*

*В статье сначала последовательно выполнены: математическое описание режима свободного выбега стоячих волн в резонаторе гироскопа; математическое описание внутренней структуры сигналов, формируемых измерительным устройством гироскопа; предварительный анализ исходных данных и количественные оценки параметров для физического представления особенностей свободных колебаний резонатора. На этой основе обсуждаются разные варианты детализации алгоритмов для оценки жесткостных свойств резонаторов по наблюдению переходных процессов в режиме свободного выбега волновой картины, а также возможные подходы к построению алгоритмов оценки вязкостных свойств резонаторов.*

*Приведенные формулировки алгоритмов ориентированы на использование штатного двухканального измерительного устройства гироскопа, выполняющего при необходимости расчет угла и амплитуд стоячих рабочей и квадратурной волн.*

*Подтверждено, что наблюдение во времени переходных процессов в режиме свободного выбега волновой картины позволяет получить достаточно простые расчетные алгоритмы для оценки жесткостных свойств резонаторов. В то же время для измерения разнодобротности и углового положения осей вязкости резонатора при наблюдении за переходными процессами требуется решение более сложной вычислительной идентификационной задачи.*

*Для практического применения приведенных алгоритмов измерения разночастотности и углового положения осей жесткости интервал времени наблюдения следует выбирать из расчета, чтобы разнофазность резонансных колебаний превысила половину длины волны.*

**Ключевые слова:** твердотельный волновой гироскоп, резонансные колебания, волновая картина, идентификация, свободные колебания, колебательно-диссипативные характеристики, методики измерения.

## Введение

Практическая востребованность в серийном производстве волновых твердотельных гироскопов (ВТГ) повышенной точности отражается в неослабевающем внимании к исследованию тонких факторов, влияющих на точностные характеристики гироскопов [1–4]. Несмотря на достаточную развитость общей теории ВТГ [5–7], прикладные вопросы ее применения к производственным операциям продолжают представлять интерес для заводских инженеров [8–10].

Среди таких тонких факторов для интегрирующих волновых твердотельных гироскопов (серийно выпускаемых часто с аббревиатурой ТВГ) особое значение имеют колебательно-диссипативные характеристики кварцевых резонаторов на вторых угловых гармониках их колебаний. Это связано с тем, что остаточные значения разночастотности и разнодобротности полусферических кварцевых резонаторов в наибольшей мере влияют на величину систематического дрейфа выходного сигнала таких гироскопов [11, 12]. А для его уменьшения с помощью специальных технологических операций требуется измерение не только их значений, но и угловых распределений по поверхности полусферического резонатора.

В настоящее время в технической литературе уже идейно представлены все основные подходы к оценке колебательно-диссипативных характеристик резонаторов. Среди них применительно к измерениям разночастотности широко известны методики, основанные на снятии в различных точках резонатора амплитудно- и фазочастотной характеристик или же фазоугловой характеристики [13 и др.]. Особый интерес на практике представляют алгоритмы, предложенные для режима свободного выбега стоячих волн [14, 15], так как в этом случае отсутствует влияние на результаты измерений дополнительных факторов работы внутренних контуров управления волновыми процессами в гироскопе. Так, широко известна методика оценки разночастотности через период наблюдаемых пульсаций (биений) сигнала [16]. А применительно к одновременному нахождению разночастотности и разнодобротности с их угловыми распределениями – алгоритмы комплексной идентификации коэффициентов дифференциальных уравнений, описывающих волновые процессы в резонаторе гироскопа [17, 18 и др.].

В настоящей статье основное внимание уделено измерениям, выполняемым в режиме продолжительных свободных колебаний резонатора после возбуждения и установления в нем выраженной рабочей стоячей волны. При этом содержание статьи ограничено рассмотрением только тех алгоритмов, в которых наблюдают за эволюцией переходных процессов при свободных резонансных колебаниях.

Основной целью выбрано системное рассмотрение с проведением вычислительной детализации и выявлением дополнительных возможностей известных методических подходов для случаев использования измерительного устройства интегрирующего ТВГ, аналогичного штатному (т. е. выполняющего обработку аналоговых и цифровых сигналов по тем же алгоритмам, как и в рабочем ТВГ). А в качестве результата измерений выбраны представляющие наибольший интерес для производства следующие колебательно-диссипативные характеристики: величина разночастотности и угол расположения осей жесткости, а также значения добротностей, величина разнодобротности и угол расположения осей вязкости резонатора.

Предполагается, что исследуемые кварцевые резонаторы имеют достаточно высокую добротность. Поэтому режим их свободных колебаний получается достаточно продолжительным, чтобы успеть провести необходимые измерения характеристик резонансных колебаний.

По своему содержанию данная статья дополняет более раннюю статью авторов в журнале «Интеллектуальные системы в производстве» (в дальнейшем кратко «ИСП»), 2022, № 2, с. 4. Поэтому при изложении последующего материала будем широко пользоваться принятой нами ранее формой представления известных зависимостей и уравнений из предыдущих статей авторов в журнале «ИСП» за 2020–2023 гг.

## 1. Математическое описание режима свободного выбега стоячих волн в резонаторе гироскопа

Режим свободного выбега стоячих волн в резонаторе интегрирующего ТВГ после возбуждения рабочей стоячей волны $A(t)$ в выбранном угловом положении $\theta_A$ относительно приборной системе координат $(x,y)$ представляет собой суперпозицию свободных резонансных колебаний $(p, q)$ с близкими постоянными частотами $\omega_p \approx \omega_q$ «полусферической рюмки» резонатора в своих осях жесткости.

Такие колебания после выключения активного режима возбуждения стоячей волны описываются известными дифференциальными уравнениями свободных колебаний следующего вида (ИСП, 2022, № 3, с. 12):

$$\begin{aligned} &\ddot{p} + 2\nu_p\,\dot{p} + \omega_p^2\,p + 2(\nu_{pq} - \Omega K)\dot{q} = 0, \\ &\ddot{q} + 2\nu_q\,\dot{q} + \omega_q^2\,q + 2(\nu_{qp} + \Omega K)\dot{p} = 0\,; \end{aligned} \qquad (1)$$

где $2\nu_p = \mu_0\,\omega_p^2\,[1 + \delta\mu \cdot \cos 4\Delta\theta_{\mu\omega}]$; $2\nu_{pq} = \mu_0\,\omega_q^2\,\delta\mu\,\sin 4\Delta\theta_{\mu\omega}$; $2\nu_q = \mu_0\,\omega_q^2\,[1 - \delta\mu \cdot \cos 4\Delta\theta_{\mu\omega}]$; $2\nu_{qp} = \mu_0\,\omega_p^2\,\delta\mu \cdot \sin 4\Delta\theta_{\mu\omega}$; $\Omega$ – угловая скорость поворота гироскопа вокруг его оси симметрии; $K$ – известный масштабный коэффициент; $\Delta\theta_{\mu\omega} \equiv \theta_\mu - \theta_\omega$.

Здесь считается, что в функции вязкости $\mu(\theta)$ оси добротности расположены под углом $\theta_\mu$ к приборным осям:

$$\mu(\theta) = \mu_0\,[1 + 2\delta\mu \cdot \cos 4(\theta - \theta_\mu)],\ \delta\mu \to 0$$

и в общем случае не совпадают с осями жесткости, расположенными под углом $\theta_\omega$ к приборным осям. Заметим, что на практике угловое расхождение осей добротности и осей жесткости может быть вызвано особенностями распределения микротрещин по поверхности кварцевого резонатора, возникающих в процессе его изготовления и полировки.

Из уравнений (1) для неподвижного гироскопа (когда $\Omega = 0$, а ось ТВГ выставлена ортогонально оси вращения Земли) с учетом малости вклада $\delta\mu$ следует почти независимость резонансных переменных $(p, q)$:

$$\begin{aligned} &\ddot{p} + 2\nu_p\,\dot{p} + \omega_p^2\,p \approx 0, \\ &\ddot{q} + 2\nu_q\,\dot{q} + \omega_q^2\,q \approx 0\,. \end{aligned} \qquad (2)$$

Видно, что из-за своей остаточной разночастотности резонансные колебания (2) во времени будут описывать затухающие кривые Лиссажу:

$$p(t) = a_p(t)\cos\varphi_p(t),\ q(t) = a_q(t)\cos\varphi_q(t);\ \varphi_p(t) = \varphi_q(t) + \Delta\varphi_{pq}(t), \qquad (3)$$

где $(a_p, a_q)$ – амплитуды колебаний ($\geq 0$); $\varphi_p(t) \equiv \omega_p t - \varphi_{p0}$, $\varphi_q(t) \equiv \omega_q t - \varphi_{q0}$; $\Delta\varphi_{pq}(t) = \varphi_p(t) - \varphi_q(t) = \Delta\omega_{pq}\,t - \Delta\varphi_{pq0}$; $(\varphi_{p0}, \varphi_{q0})$ – некоторые начальные фазы $\Delta\varphi_{pq0} \equiv \varphi_{p0} - \varphi_{q0} = \mathrm{const}$ – начальная разнофазность; $\Delta\omega_{pq} \equiv \omega_p - \omega_q = \mathrm{const}$ – величина разночастотности.

Так как в момент $t = 0$ отключения активной подкачки стоячей волны резонансные колебания синхронизированы (являются проекциями рабочей стоячей волны на оси жесткости), поэтому: $\Delta\varphi_{pq}(t) \approx \Delta\omega_{pq}\,t$; $\Delta\varphi_{pq0} \approx 0$.

В результате резонансных колебаний (1) или (2) функция деформации кромки полусферического резонатора $W(\theta,t)$ представляется зависимостью:

$$W(\theta,t) = p(t)\cdot\cos 2(\theta - \theta_\omega) + q(t)\cdot\sin 2(\theta - \theta_\omega). \qquad (4)$$

Эта функция наблюдается емкостным измерительным устройством гироскопа в двух приборных осях $(x,y)$.

## 2. Математическое описание внутренней структуры сигналов, формируемых измерительным устройством гироскопа

В результате измерения функции (4) в приборных осях $(x,y)$ формируются два сигнала $S_C(t)$ и $S_D(t)$ с шумами $\varepsilon_C$ и $\varepsilon_D$:

$$S_C(t) = C(t) + \varepsilon_C,\ S_D(t) = D(t) + \varepsilon_D; \qquad (5)$$

$$W(\theta,t) = C(t)\,\cos 2\theta + D(t)\,\sin 2\theta;$$

$$C = p\cos 2\theta_\omega - q\sin 2\theta_\omega,\quad D = p\sin 2\theta_\omega + q\cos 2\theta_\omega.$$

Если бы угол $\theta_\omega$ был известен, можно было бы сразу перейти от (5) к наблюдению резонансных переменных, используя обратные зависимости:

$$p = C\cos 2\theta_\omega + D\sin 2\theta_\omega,\ q = -C\sin 2\theta_\omega + D\cos 2\theta_\omega. \qquad (6)$$

Так как на практике угол $\theta_\omega$ обычно заранее не известен, а также может сдвигаться в результате изменения внутреннего напряженно деформированного состояния гироскопа, поэтому в измерительном устройстве ТВГ традиционно выделяют ортогональные во времени и по углу стоячие волны $(A, B)$, имеющие одинаковую частоту:

$$W(\theta,t) = A(t)\cdot \cos 2(\theta - \theta_A(t)) + B(t)\cdot \sin 2(\theta - \theta_A(t)); \quad (7)$$
$$A(t) = a_A(t) \cos \varphi_A(t),\ B(t) =$$
$$= a_B(t) \sin \varphi_A(t);\ \varphi_A(t) \equiv \omega(t)\cdot t - \alpha(t),$$
где $\alpha(t)$ – медленно изменяемая фаза стоячих волн; частоты $\omega(t)$ стоячих волн $(A, B)$ совпадают; $a_A$ – положительная амплитуда рабочей волны; $a_B$ – амплитудная функция (может быть как положительной, так и отрицательной) квадратурной волны.

Такая замена колебательного процесса (4) на волновой процесс (7) объясняется тем, что угловое перемещение сильно выраженной рабочей стоячей волны $A(t)$ по углу $\theta_A$ относительно приборной системе координат $(x,y)$ является выходным сигналом интегрирующего гироскопа, так как оно оказывается пропорциональным угловой скорости вращения $\Omega$**.**

Так, из решения дифференциальных уравнений (1) в медленных переменных можно найти их следующую связь с учетом функции систематического дрейфа $D_\theta$ нулевого сигнала гироскопа (ИСП, 2022, № 4, с. 37):
$$2\dot\theta_A = -\Omega K + D_\theta, \quad D_\theta \approx \nu\delta\mu \sin 4(\theta_A - \theta_\mu) -$$
$$-(a_B / a_A)\Delta\omega_{pq} \cos 4(\theta_A - \theta_\omega), \quad (8)$$
которое наглядно показывает оценку мер вклада характеристик $\nu, \delta\mu, (a_B / a_A), \Delta\omega_{pq}$ в функцию $D_\theta$ (видно, что появляющаяся в (7) из-за малой остаточной разночастотности резонансных колебаний (1) слабо выраженная малая квадратурная волна $B(t)$ ухудшает точностные свойства выходного сигнала гироскопа).

Для нахождения ортогональных волновых функций $(A, B)$ используют их проекции на оси измерительного устройства:
$$W(\theta,t) = C \cos 2\theta + D \sin 2\theta =$$
$$= A \cos 2(\theta - \theta_A) + B \sin 2(\theta - \theta_A); \quad (9)$$
$$C = A \cos 2\theta_A - B \sin 2\theta_A, \quad D = A \sin 2\theta_A + B \cos 2\theta_A;$$
$$A = C \cos 2\theta_A + D \sin 2\theta_A, \quad B = - C \sin 2\theta_A + D \cos 2\theta_A,$$
где $C(t) = a_C(t) \cos [\omega(t)\cdot t - \varphi_C(t)]$, $D(t) = a_D(t) \times \cos [\omega(t)\cdot t - \varphi_D(t)]$, $a_C(t)$, $a_D(t)$ и $\varphi_C(t)$, $\varphi_D(t)$ – соответственно медленно изменяющиеся амплитудные функции (могут иметь произвольный знак) и фазы.

Раскрывая взаимосвязь (9), можно записать следующие формулы (ИСП, 2022, № 2, с. 4):
$$\mathrm{tg}\, 4\theta_A = 2\, a_C\, a_D \cos\Delta\varphi_{CD} / (a_C^2 - a_D^2) \approx$$
$$\approx 2 < C\cdot D > / [<C^2> - <D^2>];$$
$$a_A\, a_B = a_D\, a_C \sin \Delta\varphi_{CD} \approx$$
$$\approx 2 <C(t)\cdot D(t - t_3)>, \ (\omega t_3 = \pi/2); \quad (10)$$
$$a_A^2 = a_C^2 \cos^2 2\theta_A + a_D^2 \sin^2 2\theta_A +$$
$$+ a_C\, a_D \cos\Delta\varphi_{CD} \sin 4\theta_A,$$
$$a_B^2 = a_C^2 \sin^2 2\theta_A + a_D^2 \cos^2 2\theta_A -$$
$$- a_C\, a_D \cos\Delta\varphi_{CD} \sin 4\theta_A,$$
где $\Delta\varphi_{CD} \equiv \varphi_C - \varphi_D$; $<f> \equiv (1/T) \int_0^T f(t)\, dt \approx \sum_i^n f / n$; $n$ – число тактов усреднения.

Разные алгоритмы для расчета медленно изменяющихся во времени характеристик $\{\theta_A(t), a_A(t), a_B(t), \alpha(t), \omega(t)\}$ стоячих волн по результатам измерений (5) для разных случаев применения подробно описаны в статьях авторов в журнале ИСП: 2020, № 3; 2021, № 3, 4.

При этом формирование волновых функций (7) производится через суперпозиции резонансных колебаний в (4) по формулам:
$$A = p \cos \Psi + q \sin \Psi,\ B = -p \sin \Psi + q \cos \Psi; \quad (11)$$
$$p = A \cos \Psi - B \sin \Psi,\ q = A \sin \Psi + B \cos \Psi;\ \Psi \equiv$$
$$\equiv 2(\theta_A - \theta_\omega).$$

После раскрытия выражений (11) с учетом (3), (7) получаются следующие важные связи (ИСП, 2022, № 2, С. 4):
$$a_A\, a_B = a_p a_q \sin \Delta\varphi_{pq};\ \sin 2\Psi =$$
$$= 2\, a_A\, a_B\, \mathrm{ctg}\Delta\varphi_{pq} / (a_A^2 - a_B^2);$$
$$\mathrm{tg}\, 2\Psi = 2a_p a_q \cos \Delta\varphi_{pq} / (a_p^2 - a_q^2); \quad (12)$$
$$a_A^2 = a_p^2 \cos^2\Psi + a_q^2 \sin^2\Psi + a_p a_q \cos \Delta\varphi_{pq} \sin 2\Psi,$$
$$a_B^2 = a_p^2 \sin^2\Psi + a_q^2 \cos^2\Psi - a_p a_q \cos \Delta\varphi_{pq} \sin 2\Psi,$$
где разнофазность в режиме свободных колебаний: $\Delta\varphi_{pq}(t) \approx \Delta\omega_{pq} t$.

Они помогают понять физический смысл параметрической зависимости функции дрейфа (8) нулевого сигнала гироскопа. Так, остаточная разночастотность резонансных колебаний (второе слагаемое в функции дрейфа (8)) приводит к линейному увеличению во времени разнофазности $\Delta\varphi_{pq}(t)$, которая в соответствии с третьим выражением (12) будет изменять угол рабочей стоячей волны $\theta_A(t)$.

С другой стороны остаточная разновязкость (первое слагаемое в функции дрейфа (8)) приведет к разной скорости уменьшения медленных амплитуд $(a_p, a_q)$, что также будет изменять угол рабочей стоячей волны $\theta_A(t)$ в соответствии с третьим выражением (12).

Также важно отметить, что вклады разновязкости и разночастотности в (8) получились независимыми. Это позволяет в производстве резонаторов сбалансированно выполнять их уменьшение. Так, если не удается существенно уменьшить остаточную разнодобротность (разновязкость) колебаний, тогда пропадает практический смысл чрезмерного уменьшения остаточной разночастотности (с учетом достаточно длительных и затратных соответствующих производственных операций), и наоборот.

## 3. Предварительный анализ исходных данных. Количественные оценки параметров для физического представления особенностей свободных колебаний резонатора

Чтобы лучше физически понимать приводимые далее алгоритмы измерения колебательно-диссипативных характеристик твердотельных волновых гироскопов в режиме свободных колебаний, приведем несколько простых количественных оценок важных параметров условий наблюдения.

В качестве предварительных оценок для обрабатываемых технологических образцов резонаторов гироскопов примем: среднюю резонансную частоту $f = 5000$ Гц; разночастотность $\Delta f = 10^{-7}\cdot f = 5 \cdot 10^{-4}$ Гц; среднюю добротность $Q = 5 \cdot 10^6$; разнодобротность $\Delta Q = 10^{-2} \cdot Q = 5 \cdot 10^4$.

Отсюда вычисляем круговую частоту $\omega = 2\pi f = \pi \times \times 10^4$ рад/с, период колебаний $T = 1 / f = 2 \cdot 10^{-4}$ с; функцию набега разнофазности $\Delta\varphi(t) = \Delta\omega \cdot t = 2\pi \times \times \Delta f \cdot t = \pi \cdot t$ (c) $\cdot 10^{-3}$ рад. Так, за 300 с набег фазы составит $\Delta\varphi(300) \approx 1$ рад, а за 30 минут – примерно $2\pi$.

В свою очередь, из диссипативных свойств оцениваем среднюю вязкость: $\nu = \omega / 2Q = \pi \cdot 10^{-3}$ с$^{-1}$. Тогда время затухания амплитуды колебаний в $e$ раз составит: $\tau = 1 / \nu = 1000 / \pi \approx 300$ с = 5 мин (т. е. за 20 мин амплитуда колебаний уменьшится примерно в $e^4 \approx 65$ раз).

Кроме этого, из $\tau = 1 / \nu = 2Q / \omega$ имеем линейную связь приращений:

$$\Delta\tau / \tau = \Delta Q / Q, \Delta\tau = 2\Delta Q / \omega = \Delta Q / (\pi f) \approx 10 / \pi \approx 3 \text{ с.}$$

При этом амплитуды колебаний в (3) будут уменьшаться в пропорции:

$$a_p(t) = a_{p0} \exp[-t / \tau], a_q(t) = a_{q0} \exp[-t / (\tau - \Delta\tau)] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a_p(t) / a_q(t) = (a_{p0} / a_{q0}) \exp[(\Delta\tau / \tau) \cdot (t / \tau)].$$

Видно, что относительное изменение амплитуд резонансных колебаний будет существенным только для большой разнодобротности: $\Delta Q / Q \sim 0{,}1$.

Таким образом, на достаточно длительных интервалах свободных колебаний (порядка 30 минут) наиболее явно проявляющимся фактором будет разночастотность резонансных колебаний, которая приводит к почти полнооборотному набегу их разнофазности. Это отличает режим свободного выбега волновой картины от рабочего режима вынужденных колебаний на близкой к резонансной частоте, в котором производится принудительная синхронизация переменных $(p, q)$, и поэтому их разнофазность обычно мала.

Приведем также количественную оценку функции дрейфа в (8) для рассматриваемых параметров технологических образцов резонаторов. Так как $\nu \equiv \equiv (\nu_p + \nu_q) / 2$ и $\omega^2 \equiv (\omega_p^2 + \omega_q^2) / 2$, поэтому с учетом (1) будем иметь: $\nu \approx \mu_0 \omega^2 / 2$, $\Delta\nu \equiv \nu_p - \nu_q \approx \mu_0 \omega^2 \delta\mu \times \times \cos 4\Delta\theta_{\mu\omega} \approx 2\nu\delta\mu \cos 4\Delta\theta_{\mu\omega}$.

Отсюда получаем: $\nu\delta\mu \approx \Delta\nu / (2\cos 4\Delta\theta_{\mu\omega})$, где разновязкость $\Delta\nu$ можно выразить через разнодобротность: $\Delta\nu \approx -(\Delta Q / Q) \cdot \nu$.

Если в качестве примера для необработанного образца резонатора принять: $\Delta\theta_{\mu\omega} \approx 0$, $\Delta Q / Q \approx 0{,}1$, $a_B / a_A \approx 0{,}05$, $\nu \approx \pi \cdot 10^{-3}$ с$^{-1}$, $\Delta\omega = 2\pi \cdot \Delta f \approx \pi \cdot 10^{-3}$ рад /с, тогда будем иметь сбалансированный вклад разнодобротности и разночастотности в функцию (8):

$$\nu\delta\mu \approx (\Delta Q / Q) \cdot \nu / 2 \sim 1.5 \cdot 10^{-4} \text{ рад /с,}$$
$$(a_B / a_A) \Delta\omega \sim 1.5 \cdot 10^{-4} \text{ рад /с} \Rightarrow D_\theta / 2 \sim 300 \text{ угл. град /ч.}$$

Соответственно, чтобы без дополнительной алгоритмической калибровки выходных сигналов ТВГ достичь величину дрейфа $D_\theta / 2 \sim 3$ угл. град/ч, потребуется при технологической обработке уменьшить разнодобротность: $\Delta Q / Q \approx 0{,}001$ (или увеличить добротность), уменьшить разночастотность $\Delta\omega \approx \pi \cdot 10^{-4}$ рад /с и амплитуду квадратурной волны $a_B / a_A \approx 0{,}005$.

## 4. Оценка жесткостных свойств резонаторов на основе анализа переходных процессов в режиме свободного выбега волновой картины

Напомним, что резонансные переменные выполняют свои непрерывные колебания в соответствии с формулами (2), (3). Далее по формулам (5) они проецируются на оси измерительного устройства, проявляясь в сигналах $(S_C, S_D)$. Последние с учетом (9) перераздагаются в волновые функции с параметрами (10).

В предыдущем пункте было показано, что для кварцевых резонаторов режим свободного выбега может продолжаться до 30 минут и более. При этом остаточная разночастотность резонансных колебаний может приводить к набегу фазы $\Delta\varphi \sim 2\pi$ рад.

Наличие остаточной разночастотности будет отражаться в непрерывном увеличении разнофазности $\Delta\varphi_{pq}(t) \approx \Delta\omega_{pq} t$, что будет приводить к повороту информационного угла $\theta_A$ в соответствии с (12):

$$\operatorname{tg} 4[\theta_A(t) - \theta_\omega] = [2a_p a_q / (a_p^2 - a_q^2)] \cdot \cos(\Delta\omega_{qp} t). \quad (13)$$

Заметим, что когда $\Delta\varphi_{pq}(t) \approx \Delta\omega_{pq} t$ достигнет значения $\pi/2$, из (13) получим $\theta_A(t) = \theta_\omega$, то есть наблюдаемые измерительным устройством рабочая и квадратурная волны $(A, B)$ совместятся с осями жесткости (углами резонансных колебаний $(p, q)$ полусферической юбки резонатора).

Одновременно с этим будет меняться амплитудная функция квадратурной волны по следующей зависимости (12):

$$a_B(t) = (a_p a_q / a_A) \cdot \sin(\Delta\omega_{qp} t), \quad (14)$$

которая проходит через нулевые значения в моменты полной синхронизации резонансных колебаний (при $\Delta\varphi_{pq} = 0, \pi, 2\pi$ и т. д.).

Из (14) видно, что, измеряя два соседних момента времени ($t_1$ и $t_2$) обнуления $a_B(t)$, легко найти величину остаточной разночастотности резонансных колебаний по формуле

$$a_B(t_1) = 0, \ a_B(t_2) = 0 \ \Rightarrow \ \Delta\omega_{qp} = \pi / \Delta t, \quad \Delta t \equiv (t_2 - t_1), \quad (15)$$

где в качестве первого момента времени обычно можно принять: $t_1 \approx 0$.

Ясно, что такой алгоритм (15) будет иметь ограничения для случая очень малой разночастотности ($\Delta\omega_{qp} \to 0$, что означает длительность интервала $t_2 - t_1$) или в случае значительного конструкционного демпфирования, когда интервал $t_2$ становится плохо достижим.

Для используемого измерительного устройства контролировать интервалы времени ($t_2$ и $t_1$) в (15) удобно, используя вторую зависимость из (10):

$$a_A a_B = a_D a_C \sin\Delta\varphi_{CD} \approx 0 \Rightarrow \langle C(t) \cdot D(t - t_3) \rangle \approx 0. \quad (16)$$

Поясним физический смысл (16). В соответствии с выражениями (9), (11) при $a_B(t_1) = 0$ имеем полную синхронизацию резонансных колебаний:

$$B = 0 \ \Rightarrow \ p = A\cos\Psi - B\sin\Psi = A\cos\Psi,$$
$$q = A\sin\Psi + B\cos\Psi = A\sin\Psi.$$

Это, в свою очередь, отражается в синхронизации ($\Delta\varphi_{CD} \approx 0$) измерительных сигналов (5), (9):

$$C = p\cos 2\theta_\omega - q\sin 2\theta_\omega = A\cos 2\theta_A,$$
$$D = p\sin 2\theta_\omega + q\cos 2\theta_\omega = A\sin 2\theta_A.$$

На практике последнее условие (16) с учетом (9):

$$C(t) = a_C(t) \cos[\omega(t)\cdot t - \varphi_C(t)],\ D(t) = $$
$$= a_D(t) \cos[\omega(t)\cdot t - \varphi_D(t)],$$
$$D(t - t_3) = a_D(t) \sin[\omega(t)\cdot t - \varphi_D(t)],$$

можно при желании также заменять на одно из следующих:

$$<C(t- t_3)\cdot D(t)> \approx 0,\ \text{или} < C(t)\cdot(\partial D(t)/\partial t) > \approx 0\ ,$$
$$\text{или}\ < D(t)\cdot(\partial C(t)/\partial t) > \approx 0.$$

Таким образом, оценка величины разночастотности резонансных колебаний может быть достаточно просто выполнена через наблюдение переходных процессов. Для повышения ее точности требуется повышать точность измерения условий: $a_B(t_1) = 0$, $a_B(t_2) = 0$. При этом наибольшие значения диапазона изменения $a_B(t)$ (в момент времени $\Delta t/2$) будут соответствовать случаю, когда ось стоячей волны $A$ в момент выхода на режим свободного выбега будет установлена посередине между осями жесткости резонатора.

Более трудоемким считается нахождение углового положения осей жесткости резонатора. Поэтому здесь сначала поясним особенности происходящих колебательных процессов без учета диссипативных свойств с помощью следующей таблицы.

**Характеристика важных моментов времени свободных колебаний**

**Characteristics of important moments of time of free oscillations**

| Параметр | $\Delta\varphi_{pq}(0)=\Delta\omega_{qp}\,t=0$ | $\Delta\varphi_{pq}(t) = \pi/2$ | $\Delta\varphi_{pq}(t) = \pi$ | $\Delta\varphi_{pq}(t) = 3\pi/2$ |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $p_0 = A_0 \cos\Psi_0$ | $A$ | $A\cos\Psi_1$ | $A$ |
| $Q$ | $q_0 = A_0 \sin\Psi_0$ | $B$ | $A\sin\Psi_1$ | $B$ |
| $A$ | $p_0\cos\Psi_0 + q_0\sin\Psi_0$ | $P$ | $p\cos\Psi_1 + q\sin\Psi_1$ | $P$ |
| $B$ | $0$ | $Q$ | $0$ | $Q$ |
| $\Psi = 2(\theta_A - \theta_\omega)$ | $\Psi_0 = 2(\theta_{A0} - \theta_\omega)$ | 0 | $\Psi_1$ | 0 |

При ее заполнении использованы преобразования (11). Так, в момент $t = 0$ выхода на свободные колебания имеем: $B_0 \approx 0$, $A_0 = a_A(0)\cos\alpha(0)$,

$$\theta_A = \theta_{A0} = \theta_\omega + 0{,}5\ \mathrm{arctg}\,(q_0/p_0). \quad (17)$$

Через интервал времени $\Delta t/2$ (см. (15)) резонансные колебания из-за набега фазы $\Delta\varphi_{pq}(t) = \pi/2$ становятся ортогональными по времени. Поэтому они будут восприниматься измерительным устройством как искомые стоячие волны: $\theta_A = \theta_\omega$; $A = p = a_p\cos\varphi_p(t)$; $B = q = a_q\sin\varphi_p(t)$ (см. также (13)).

Далее еще через такой же интервал времени $\Delta t/2$ набег фазы составит $\Delta\varphi_{pq}(t) = \pi$ . При этом резонансные колебания вновь синхронизируются:

$$B \approx 0,\ A = a_A\cos[\omega(t)\cdot t - \alpha(t)];$$
$$p = a_p\cos\varphi_p(t) \sim p_0,\ q = a_q\cos[\varphi_p(t) - \pi] = \quad (18)$$
$$= -a_q\cos\varphi_p(t) \sim -q_0;$$
$$\theta_A = \theta_\omega - 0{,}5\ \mathrm{arctg}\,(q_0/p_0).$$

Видно, что здесь стоячая волна $A$ встанет уже с другой стороны от оси жесткости по сравнению с углом начального возбуждения $A_0$. Между этими двумя положениями посередине будет располагаться ось жесткости.

И наконец, еще через интервал времени $\Delta t/2$ общий набег фазы составит $\Delta\varphi_{pq}(t) = 3\pi/2$. В этом случае стоячие волны вновь будут проходить через оси жесткости, но знак квадратурной волны изменится на противоположный по сравнению со случаем $\Delta\varphi_{pq}(t) = \pi/2$:

$$A = p = a_p\cos\varphi_p(t);\ B = q = -a_q\sin\varphi_p(t).$$

Приведенные результаты могут быть в разной мере использованы для нахождения как разночастотности, так и одной из осей жесткости. Известно, что при этом вторая ось жесткости будет отстоять от нее на угол $\pi/4$. Рассмотрим разные варианты решения этой задачи, соответствующие моментам времени, указанным в таблице 4.

В первом варианте используются свойства только начального возбуждения ($\Delta\varphi_{pq}(0) = 0$). Здесь можно попробовать ось начального возбуждения резонатора гироскопа медленно доворачивать в интервале $\pi/4$ до тех пор, пока не будет достигнуто практически нулевое значение $a_B(t)$ на всем остальном интервале времени. Это означает, что мы нашли одну из осей жесткости. Так как проекция начального колебательного процесса $A(t)$ на другую ось жесткости отсутствует, поэтому колебания в ней не возбуждаются, что и проявляется в условии $a_B(t) \to 0$. При этом начальный угол поиска оси жесткости можно выбрать по смене знака функции $a_B(\theta_A)$, если медленно поворачивать гироскоп вокруг своей оси в режиме свободных колебаний. На практике такой способ удобно использовать для контроля правильности нахождения осей жесткости резонатора.

В остальных вариантах предполагается, что в начальный момент времени $t = 0$ угол стоячей волны $A_0$ расположен между осями жесткости. При этом чем ближе ее направление окажется к биссектрисе угла между осями жесткости, тем лучше (т. к. проекции $A_0$ на оси жесткости будут одинаковы и поэтому будут измеряться наибольшие значения квадратурной волны $B(t)$).

Второй способ оценки угла $\theta_\omega$ оси жесткости ориентирован на интервал времени наблюдения, соответствующий $\Delta\varphi_{pq}(t) = \pi/2$ (разнофазность достигает значения в четверть длины волны). В конце интервала будет наблюдаться наибольшее во времени значение $a_B^2$. В данный момент времени измерительное устройство будет воспринимать ортогональные во времени резонансные колебания как искомые волновые функции: $(A.\ B) = (p,\ q)$, оценив тем самым угол $\theta_A = \theta_\omega$. Однако пологость вычисленного $a_B^2$ вблизи максимума может существенно понизить точность второго способа.

Повысить его точность можно попробовать выбором другого критерия нахождения такого момента времени. Так, условию $\Delta\varphi_{pq}(t) = \pi/2 = \Delta\omega_{pq} t$ отвечает $\cos(\Delta\omega_{qp} t) = 0$ или временная ортогональность резонансных колебаний: $<p(t)\cdot q(t)> = 0$. Тогда с учетом (5) искомому моменту времени будет соответствовать среднее значение временной функции $<C(t)\cdot D(t)>$:

$$C = p\cos 2\theta_\omega - q\sin 2\theta_\omega,$$
$$D = p\sin 2\theta_\omega + q\cos 2\theta_\omega \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow <C(t)\cdot D(t)> = (1/4)\,(a_p^2 - a_q^2)\sin 4\theta_\omega +$$
$$+ <p(t)\cdot q(t)> \cos 4\theta_\omega.$$

В итоге, из условия $\Delta\varphi_{pq}(t) = \pi/2 = \Delta\omega_{pq} t$ дополнительно оценивается искомая разночастотность $\Delta\omega_{pq}$.

Третий способ оценки угла $\theta_\omega$ оси жесткости ориентирован на вдвое больший интервал времени наблюдения, соответствующий $\Delta\varphi_{pq}(t) = \pi$ (разнофазность достигает значения в половину длины волны). В нем ожидается более высокая точность измерения, т. к. используются моменты времени синхронизации $t_2$ и $t_1$ из (15). При этом момент временной ортогональности $(p, q) = (A, B)$ будет располагаться строго посередине между $t_2$ и $t_1$. Именно в этот момент времени и следует произвести измерение угла оси жесткости $\theta_A = \theta_\omega$ по аналогии со вторым способом. Кроме этого, в соответствии с (17), (18) положение оси жесткости можно перепроверить через среднее значение между размахом углов стоячей волны $A(t)$. Видно, что данный способ измерения углового положения осей жесткости резонатора совместно с алгоритмом (15) измерения разночастотности позволяют одновременно оценить все требуемые колебательные свойства резонатора (здесь разночастотность оценивается из условия $\Delta\varphi_{pq}(t) = \pi = \Delta\omega_{pq} t$).

Четвертый способ оценки угла $\theta_\omega$ оси жесткости ориентирован на еще большее удлинение интервала времени наблюдения, соответствующего набегу фазы $\Delta\varphi_{pq}(t) = 3\pi/2$. В нем разночастотность можно оценить как из условия $\Delta\varphi_{pq}(t) = 3\pi/2 = \Delta\omega_{pq} t$, так и по интервалам времени, соответствующим временному расстоянию между другими столбцами таблицы. Принципиально он представляется избыточным. Однако при наблюдении свободных колебаний очень высокодобротных резонаторов позволяет наблюдать дополнительную информацию для уточнения нахождения углового положения осей жесткости и разночастотности.

### 5. Оценка вязкостных свойств резонаторов на основе анализа переходных процессов в режиме свободного выбега

Здесь для простоты будем считать, что положения осей жесткости ($\theta_\omega$) и величина разночастотности ($\Delta\omega_{qp}$) резонатора уже известны (найдены по методикам предыдущего пункта).

Или рассматривается свободный выбег волновой картины при включенной системе коррекции осей жесткости, подавляющей разночастотность в активном квазистатическом режиме ($\Delta\omega_{qp} \to 0$).

Для более наглядного рассмотрения данной задачи перепишем уравнения (1) в виде (ИСП, 2022, № 3, с. 12):

$$\ddot p + 2(\nu + \Delta\nu_{\mu c})\dot p + 2\Delta\nu_{\mu s}\dot q + (\omega^2 + \Delta\omega^2)p - 2\Omega K\dot q = 0,$$
$$\ddot q + 2(\nu - \Delta\nu_{\mu c})\dot q + 2\Delta\nu_{\mu s}\dot p + (\omega^2 - \Delta\omega^2)q + 2\Omega K\dot p = 0, \qquad (19)$$

где $\omega^2 \equiv (\omega_p^2 + \omega_q^2)/2$, $\Delta\omega^2 \equiv (\omega_p^2 - \omega_q^2)/2 = \Delta\omega_{qp}(\omega_p + \omega_q)/2$; $\nu \equiv (\nu_p + \nu_q)/2$, $\delta\mu \equiv \Delta\mu/\mu_0$; $\Delta\nu_{\mu s} \equiv \nu\,\delta\mu \sin 4\Delta\theta_{\mu\omega}$, $\Delta\nu_{\mu c} \equiv \nu\,\delta\mu\cos 4\Delta\theta_{\mu\omega}$.

Или после раскрытия входящих в (19) коэффициентов:

$$\ddot p + 2\nu[1 + \delta\mu\cos 4(\theta_\mu - \theta_\omega)]\dot p +$$
$$+ 2[\nu\delta\mu\sin 4(\theta_\mu - \theta_\omega) - \Omega K]\dot q + (\omega^2 + \Delta\omega^2)p = 0, \qquad (20)$$
$$\ddot q + 2\nu[1 - \delta\mu\cos 4(\theta_\mu - \theta_\omega)]\dot q +$$
$$+ 2[\nu\delta\mu\sin 4(\theta_\mu - \theta_\omega) + \Omega K]\dot p + (\omega^2 - \Delta\omega^2)q = 0,$$

Заметим, что если выполнить поворот резонансных осей $(p, q)$ на угол $\Psi_x \equiv 2(\theta_x - \theta_\omega)$:

$$X(t) = p(t)\cos\Psi_x + q(t)\sin\Psi_x,\quad Y(t) = -p(t)\sin\Psi_x + q(t)\cos\Psi_x,$$

тогда уравнения (20) преобразуются в следующие:

$$\ddot X + 2\nu[1 + \delta\mu\cos 4(\theta_\mu - \theta_x)]\dot X +$$
$$+2[\nu\delta\mu\sin 4(\theta_\mu - \theta_x) - \Omega K]\dot Y + \omega_x^2 X - \Delta\omega_{xy}^2 Y = 0,$$
$$\ddot Y + 2\nu[1 - \delta\mu\cos 4(\theta_\mu - \theta_x)]\dot Y +$$
$$+ 2[\nu\delta\mu\sin 4(\theta_\mu - \theta_x) + \Omega K]\dot X + \omega_y^2 Y - \Delta\omega_{xy}^2 X = 0; \qquad (21)$$
$$\omega_x^2 = \omega_p^2\cos^2\Psi_x + \omega_q^2\sin^2\Psi_x,$$
$$\omega_y^2 = \omega_p^2\sin^2\Psi_x + \omega_q^2\cos^2\Psi_x,$$
$$\Delta\omega_{xy}^2 = \Delta\omega^2\sin 2\Psi_x.$$

Здесь случай $\theta_x = 0$ соответствует измерительным осям $(X, Y) = (C, D)$:

$$\ddot C + 2\nu[1 + \delta\mu\cos 4\theta_\mu]\dot C + 2[\nu\delta\mu\sin 4\theta_\mu - \Omega K]\dot D +$$
$$+\omega_C^2 C - \Delta\omega_{CD}^2 D = 0,$$
$$\ddot D + 2\nu[1 - \delta\mu\cos 4\theta_\mu]\dot D + 2[\nu\delta\mu\sin 4\theta_\mu + \Omega K]\dot C +$$
$$+\omega_D^2 D - \Delta\omega_{CD}^2 C = 0. \qquad (22)$$
$$\omega_C^2 = \omega_p^2\cos^2 2\theta_\omega + \omega_q^2\sin^2 2\theta_\omega,$$
$$\omega_D^2 = \omega_p^2\sin^2 2\theta_\omega + \omega_q^2\cos^2 2\theta_\omega,$$
$$\Delta\omega_{CD}^2 = -\Delta\omega^2\sin 4\theta_\omega.$$

Напомним, что в выполняемых измерениях ось установки гироскопа обычно стремятся выбирать ортогонально оси вращения Земли, что обеспечит $\Omega = 0$ в (22). В других вариантах измерений собственное вращение Земли придется дополнительно учитывать через заранее рассчитанную постоянную проекцию $\Omega$ в (22).

Тогда нахождение входящих в (22) параметров вязкости:

$$\nu,\quad \delta\nu_c = \nu\delta\mu\cos 4\theta_\mu,\quad \delta\nu_s = \nu\delta\mu\sin 4\theta_\mu \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\quad \nu,\quad \mathrm{tg}4\theta_\mu = \delta\nu_s/\delta\nu_c,\quad \delta\mu^2 = (\delta\nu_c^2 + \delta\nu_s^2)/\nu^2.$$

можно выполнить через подстройку численного решения дифференциальных уравнений (22) к измерительными сигналами (5) на всем интервале времени.

Альтернативной моделью для интегрирования можно также принять уравнения (21), записанные в осях вязкости ($\theta_x = \theta_\mu$) и имеющие более простой вид:

$$\begin{gathered}\ddot{X}_\mu + 2\nu[1+\delta\mu]\dot{X}_\mu + \omega_x{}^2 X_\mu - \\ -[\Delta\omega^2 \sin 4(\theta_\mu - \theta_\omega)]Y_\mu - 2\,\Omega K\dot{Y}_\mu = 0, \\ \ddot{Y}_\mu + 2\nu[1-\delta\mu]\dot{Y}_\mu + \omega_y{}^2 Y_\mu - \\ -[\Delta\omega^2 \sin 4(\theta_\mu - \theta_\omega)]X_\mu + 2\,\Omega K\dot{X}_\mu = 0.\end{gathered} \tag{23}$$

В этом случае в критерии квадратичной ошибки идентификации результат решения (23) следует сравнивать уже с сигналами:

$$X_\mu(t) = C(t)\cos 2\theta_\mu + S(t)\sin 2\theta_\mu,$$
$$Y_\mu(t) = -C(t)\sin 2\theta_\mu + S(t)\cos 2\theta_\mu.$$

Важно заметить, что на практике такой подход в чистом виде не применяют из-за высокой добротности резонансных колебаний. Здесь при непосредственном численном интегрировании какой-либо системы уравнений из (20)–(23) потребуется обеспечивать очень малую схемную вязкость. Кроме этого, дополнительным фактором погрешности становится задание начальных условий интегрирования, особенно начальных скоростей.

Для ослабления этих требований к вычислительной схеме обычно применяют метод медленно меняющихся амплитуд. В этом случае снимаются требования к схемной вычислительной вязкости, а также упрощается задание начальных условий интегрирования (задание начальных скоростей интегрирования уже не требуется). Получающиеся при этом уравнения для амплитуд и фаз приведены в статье (ИСП, 2022, № 3, с. 12). Так, общие уравнения (21) преобразуются в следующие:

$$\begin{gathered}\dot{a}_X + \nu[1+\delta\mu\cos 4(\theta_\mu - \theta_x)]a_X = \\ = \{[\,\Omega K + \nu\delta\mu\sin 4(\theta_\mu - \theta_x)]\cos(\Delta\varphi_{XY}) - \\ -\delta\omega_s \sin(\Delta\varphi_{XY})\}\cdot a_Y, \\ \dot{a}_Y + \nu[1-\delta\mu\cos 4(\theta_\mu - \theta_x)]a_Y = \\ = \{[\,-\Omega K + \nu\delta\mu\sin 4(\theta_\mu - \theta_x)]\cos(\Delta\varphi_{XY}) + \\ +\,\delta\omega_s \sin(\Delta\varphi_{XY})\}\cdot a_X,\end{gathered} \tag{24}$$

$$\begin{gathered}(\dot{\varphi}_X - \delta\omega_c)\cdot a_X = \\ = -\{[\Omega K + \nu\delta\mu\sin 4(\theta_\mu - \theta_x)]\sin(\Delta\varphi_{XY}) + \\ +\delta\omega_s \cos(\Delta\varphi_{XY})\}\cdot a_Y, \\ (\dot{\varphi}_Y + \delta\omega_c)\cdot a_Y = \\ = -\{[\Omega K - \nu\delta\mu\sin 4(\theta_\mu - \theta_x)]\sin(\Delta\varphi_{XY}) + \\ +\delta\omega_s \cos(\Delta\varphi_{XY})\}\cdot a_X,\end{gathered} \tag{25}$$

где $\delta\omega_c \equiv \Delta\omega\cos 4(\theta_x - \theta_\omega)$, $\delta\omega_s \equiv \Delta\omega\sin 4(\theta_x - \theta_\omega)$; $\Delta\varphi_{XY} \equiv \varphi_X - \varphi_Y$; $\Delta\omega \equiv \left|\omega_p - \omega_q\right|/2$.

Здесь уравнения (24) характеризуют уменьшение амплитуд в результате диссипации колебательной энергии, а (25) – изменение фаз сигналов.

Так как в измерительном устройстве гироскопа на основе сигналов (5) легко выделяются амплитуды и разнофазность $(a_C, a_D, \Delta\phi_{CD})$, поэтому для анализа диссипативных свойств можно ограничиться только уравнениями (24) для случая $\theta_x = 0$, что соответствует $(X, Y) = (C, D)$:

$$\begin{gathered}\dot{a}_C + \nu[1+\delta\mu\cos 4\theta_\mu]a_C = \Omega K\cos\Delta\varphi_{CD}\cdot a_D + \\ +[\nu\delta\mu\cos\Delta\varphi_{CD}\sin 4\theta_\mu + \Delta\omega\sin\Delta\varphi_{CD}\sin 4\theta_\omega]\cdot a_D, \\ \dot{a}_D + \nu[1-\delta\mu\cos 4\theta_\mu]a_D = -\Omega K\cos\Delta\varphi_{CD}\cdot a_C + \\ +[\nu\delta\mu\cos\Delta\varphi_{CD}\sin 4\theta_\mu - \Delta\omega\sin\Delta\varphi_{CD}\sin 4\theta_\omega]\cdot a_C.\end{gathered} \tag{26}$$

Альтернативно поставленную задачу идентификации можно решать через исследование временного поведения стоячих волн (*A, B*). Для этого выпишем без вывода (ИСП, 2022, № 2, с. 4) получающиеся здесь уравнения:

$$\begin{gathered}\dot{a}_A + \nu[1+\delta\mu\cos 4(\theta_A - \theta_\mu)]\cdot a_A + \\ +\Delta\omega\cdot\sin 4(\theta_A - \theta_\omega)\cdot a_B = 0, \\ \dot{a}_B + \nu[1-\delta\mu\cos 4(\theta_A - \theta_\mu)]\cdot a_B - \\ -\Delta\omega\cdot\sin 4(\theta_A - \theta_\omega)\cdot a_A = 0.\end{gathered} \tag{27}$$

Заметим, что в них выполняется условие $\cos(\Delta\varphi_{AB}) = 0$ и поэтому угловая скорость $\Omega$ сюда не входит. Это позволяет использовать (27) для идентификации параметров вязкости и при ненулевой $\Omega$ без необходимости ее расчета. Поэтому здесь будут допустимы более разнообразные условия проведения измерений. Однако потребуется дополнительный расчет волновых переменных в (27) через измерительные сигналы.

Из уравнений (26) или (27) видно, что для улучшения вычислительной обусловленности решения обратной задачи нахождения постоянных параметров $(\nu, \delta\mu, \theta_\mu)$ через минимизацию квадратичной ошибки отличия наблюдаемых и рассчитываемых переходных процессов желательно иметь по возможности более сильную изменяемость входящих в них функций.

Так, в случае $\Omega = 0$ потребуются достаточно длительные интервалы наблюдения (соответствующие набегу разнофазности $\Delta\varphi_{pq}(t) > \pi/2$, см. таблицу), чтобы увеличить диапазон изменения угла стоячей волны $\theta_A$ за время свободных колебаний резонатора. Следует также учитывать (см. пункт 4 выше), что наибольшие диапазоны изменения угла $\theta_A$ будут иметь место при расположении угла $\theta_{A0}$ начального выбега свободных колебаний ближе к середине между осями жесткости. Очевидно, что использование в критерии ошибки нескольких реализаций свободного выбега только улучшит точность расчета.

Поэтому для повышения скорости идентификации характеристик вязкости можно проводить измерения при медленном вращении оси гироскопа ($\Omega \neq 0$), чтобы обеспечить большую изменяемость входящих в (26), (27) функций.

При этом в случае модели (26) придется дополнительно контролировать и учитывать $\Omega$ в модели идентификации. Но в то же время здесь не требуется выполнять дополнительную обработку сигналов измерения для вычисления волновых переменных.

С другой стороны, в случае использования модели (27) угловая скорость $\Omega$ в нее не входит и поэтому ее не требуется измерять и контролировать. Однако здесь необходима дополнительная обработка измерительных сигналов (5) для выделения из них волновых переменных.

В завершение пункта приведем некоторые «свободные» оценочные рассуждения. Так, для начальной оценки средней добротности $Q = \omega/2\nu$ или коэффициента вязкости $\nu$ в уравнениях (26), (27) можно принять: $\delta\mu \approx 0$, $\Delta\omega \approx 0$. В этом случае каждая из амплитуд будет уменьшаться по закону:

$$\dot{a} + \nu \cdot a \approx 0.$$

Тогда коэффициент $\nu$ можно оценить из наблюдаемого во времени уменьшения средней колебательной энергии:

$$\Phi(t) \equiv a_A^2 + a_B^2 = a_C^2 + a_D^2 = $$
$$= a_p^2 + a_q^2 \sim \Phi_0 \exp[-2\nu t].$$

Аналогично по формулам (2) с учетом (1) можно оценить присутствие разнодобротности:

$$\nu_p = \nu[1 + \delta\mu \cdot \cos 4\Delta\theta_{\mu\omega}] / 2; \; \nu_q = \nu[1 - \delta\mu \cdot \cos 4\Delta\theta_{\mu\omega}] / 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \nu \equiv (\nu_p + \nu_q)/2, \; \delta\mu \cdot \cos 4\Delta\theta_{\mu\omega} = (\nu_p - \nu_q)/2\nu.$$

Важно отметить, что альтернативным методом комплексной и потенциально более быстрой идентификации колебательно-вязкостных свойств резонаторов является минимизация квадратичной ошибки выполняемости выбранных дифференциальных зависимостей для уравнений свободных колебаний. Он будет рассмотрен в следующей статье, продолжающей данную тему. К его преимуществам можно отнести меньшие затраты во времени и меньшую трудоемкость. К недостаткам – потребуется выполнять численное дифференцирование в (26) или (27) в условиях шумов измерений исходной информации для вычисления скоростей изменения амплитуд колебаний.

**Анализ результатов**

Таким образом, в статье рассмотрены варианты вычислительной реализации алгоритмов для практического измерения колебательно-диссипативных характеристик резонаторов интегрирующих волновых твердотельных гироскопов на основе наблюдения за переходными процессами в режиме свободных колебаний резонаторов.

Приведенные вычислительные схемы ориентированы на использование аналогичного штатному двухканального измерительного устройства гироскопа, позволяющего выполнить дополнительный расчет угла и амплитуд стоячих рабочей и квадратурной волн.

Подробное математическое описание колебательных процессов в резонаторе гироскопа и формирование сигналов измерительного устройства позволили наглядно пояснить физический смысл приведенных алгоритмов и вариантов их дополнительного развития.

Математически подтверждено, что измерения разночастотности и углового положения осей жесткости могут быть выполнены достаточно просто, если выбирать интервал накопления разнофазности резонансных колебаний, превышающий половину длины волны.

В то же время расчет разнодобротности и углового положения осей вязкости резонатора при наблюдении за переходными процессами свободного выбега потребуют решения трудоемкой вычислительной идентификационной задачи. Для ослабления требований к условиям проведения измерений такую задачу наиболее удобно решать в волновых переменных.

Приведенные вычислительные схемы алгоритмов предназначены для формирования и отладки базы разных типов алгоритмов про изводственного контроля выпускаемых гироскопов в различных условиях наблюдения

**Библиографические ссылки**

1. *Переляев С. Е.* Современное состояние волновых твердотельных гироскопов. Перспективы развития в прикладной гироскопии // XXX Юбилейная Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам : сборник материалов конференции. Санкт-Петербург, 2023. С. 431–435.

2. *Маслов А. А., Маслов Д. А., Меркурьев И. В.* Влияние опорного напряжения на дрейф волнового твердотельного гироскопа с плоскими электродами // XXX Юбилейная Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам : сборник материалов конференции. Санкт-Петербург, 2023. С. 278–282.

3. *Смирнов К. А., Зарубайло Е. А.* Алгоритмы повышения точности твердотельного волнового гироскопа // Известия высших учебных заведений России. Радиоэлектроника. 2022. Т. 25, № 4. С. 81–89.

4. *Малютин Д. М.* Структурные решения, обеспечивающие увеличение динамической точности волнового твердотельного гироскопа. Приборы и методы измерений. 2021. Т. 12, № 2. С. 146–155. DOI: 10.21122/2220-9506-2021-12-2-146-155.

5. *Климов Д. М., Журавлев В. Ф., Жбанов Ю. К.* Кварцевый полусферический резонатор (волновой твердотельный гироскоп). М. : Ким Л. А., 2017. 194 с.

6. *Zhuravlev V.Ph., Perelyaev S.E.* Current state and scientific and technological forecast of a revolutionary breakthrought in wave solid-state gyroscope technology // Information Innovative Technologies. Materials of the International scientific - practical conference. Prague, 2020. P. 113-119.

7. Волновые твердотельные гироскопы: обзор публикаций / А. А. Маслов, Д. А. Маслов, И. Г. Ниналалов, И. В. Меркурьев // Гироскопия и навигация. 2023. Т. 31, № 1 (120). С. 3–25.

8. *Басараб М. А., Лунин Б. С., Чуманкин Е. А.* Балансировка металлических резонаторов волновых твердотельных гироскопов общего применения // Динамика сложных систем – XXI век. 2021. Т. 15, № 1. С. 58–68.

9. *Трутнев Г. А., Назаров С. Б., Перевозчиков К. К.* Система съема и способы измерения колебаний резонатора твердотельного волнового гироскопа // Вестник МГТУ. Сер. Приборостроение. 2020. № 1 (130). С. 20–63.

10. Определение параметров резонатора твердотельного волнового гироскопа и моделирование по экспериментальным данным / А. В. Кривов, Р. В. Мельников, Ф. И. Спиридонов, Г. А. Трутнев // Вестник Казанского государственного технического университета им. А. Н. Туполева, Казань. 2019. № 2, вып. 1. С. 22.

11. Компенсация уходов волнового твердотельного гироскопа, вызванных анизотропией упругих свойств монокристаллического резонатора / А. А. Маслов, Д. А. Маслов, И. В. Меркурьев, В. В. Подалков // Гироскопия и навигация. 2020. Т. 28, № 2 (109). С. 25–36.

12. Влияние разночастотности и нелинейности на дрейф волнового твердотельного гироскопа в режиме датчика угловой скорости / А. А. Маслов, Д. А. Маслов, И. В. Меркурьев, В. В. Подалков // XXVIII Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам : сборник материалов конференции. Санкт-Петербург, 2021. С. 286–290.

13. *Матвеев В. А., Липатников В. И., Алехин А. В.* Проектирование волнового твердотельного гироскопа. М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1997. 168 с.

14. *Переляев С. Е.* Принципиальные вопросы теории комбинированных свободных гироскопов, функционирующих на двух рабочих модах // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2021. № 4. С. 64–76.

15. *Переляев С. Е., Алехин А. В.* Влияние неидентичности информационных каналов ВТГ в режиме свободной волны // XXX Юбилейная Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам : сборник материалов конференции. Санкт-Петербург, 2023. С. 265-267.

16. *Лунин Б. С., Матвеев В. А., Басараб М. А.* Волновой твердотельный гироскоп. Теория и технологии. М. : Радиотехника. 2014. 176 с.

17. *Чернодаров А. В., Патрикеев А. П., Переляев С. Е.* Корреляционная обработка сигналов и структурно-параметрическая идентификация динамической модели ошибок волнового твердотельного гироскопа // XXX Юбилейная Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам : сборник материалов конференции. Санкт-Петербург, 2023. С. 268–271.

18. *Маслов А. А., Маслов Д. А., Меркурьев И. В.* Учет нелинейности колебаний резонаторов при идентификации параметров волновых твердотельных гироскопов разных типов // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2022. № 6. С. 28–40.

**References**

1. Perelyaev S.E. *Sovremennoe sostoyanie volnovykh tverdotel'nykh giroskopov. Perspektivy razvitiya v prikladnoi giroskopii* [Current state of wave solid-state gyroscopes. Development Prospects in Applied Gyroscopy]. *XXX Yubileinaya Sankt-Peterburgskaya mezhdunarodnaya konferentsiya po integrirovannym navigatsionnym sistemam : sbornik materialov konferentsii* [Proc. XXX Jubilee St. Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems. Proceedings of the Conference]. St. Petersburg, 2023. Pp. 431-435 (in Russ.).

2. Maslov A.A., Maslov D.A., Merkuryev I.V. *Vliyanie opornogo napryazheniya na dreif volnovogo tverdotel'nogo giroskopa s ploskimi elektrodami* [Influence of reference voltage on the drift of a wave solid-state gyroscope with flat electrodes]. *XXX Yubileinaya Sankt-Peterburgskaya mezhdunarodnaya konferentsiya po integrirovannym navigatsionnym sistemam : sbornik materialov konferentsii* [Proc. XXX Jubilee St. Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems. Proceedings of the Conference]. St. Petersburg, 2023. Pp. 278-282 (in Russ.).

3. Smirnov K.A., Zarubaylo E.A. [Algorithms for Improving the Accuracy of a Solid-State Wave Gyroscope]. Radio electronics. 2022. Vol. 25, no. 4. Pp. 81-89 (in Russ.).

4. Malyutin D.M. [Structural Solutions Providing an Increase in the Dynamic Accuracy of a Wave Solid-State Gyroscope]. Instruments and methods of measurement. 2021. Vol. 12, no. 2. Pp. 146-155 (in Russ.). DOI: 10.21122/2220-9506-2021-12-2-146-155.

5. Klimov D.M., Zhuravlev V.F., Zhbanov Yu.K. *Kvartsevyi polusfericheskii rezonator (volnovoi tverdotel'nyi giroskop)* [Quartz hemispherical resonator (Wave solid-state gyroscope)]. Moscow: Kim L.A. Publ. 2017. 194 p. (in Russ.).

6. Zhuravlev V.Ph., Perelyaev S.E. Current state and scientific and technological forecast of a revolutionary breakthrought in wave solid-state gyroscope technology. In Information Innovative Technologies. Materials of the International scientific - practical conference. Prague, 2020. P. 113-119.

7. Maslov A.A., Maslov D.A., Ninalalov I.G., Merkuryev I.V. [Wave solid-state gyros: a review of publications]. Gyroscopy and navigation. 2023. Vol. 31, no. 1 (120). Pp. 3-25 (in Russ.).

8. Basarab M.A., Lunin B.S., Chumankin E.A. [Balancing of metal resonators of wave solid-state gyroscopes of general application]. Dynamics of complex systems - XXI century. 2021. T. 15. № 1. P. 58-68 (in Russ.).

9. Trutnev G.A., Nazarov S.B., Perevozchikov K.K. [Removal system and methods of measuring the oscillations of the resonator of a solid-state wave gyroscope]. Vestnik MSTU. Sir. Instrumentation. 2020. No. 1. Pp. 20-63 (in Russ.).

10. Krivov A.V., Melnikov R.V., Spiridonov F.I., Trutnev G.A. [Determination of the parameters of the resonator of a solid-state wave gyroscope and modeling according to experimental data]. Vestnik of the Kazan State Technical University named after A.N. Tupolev, Kazan. 2019. No. 2, issue 1. P. 22 (in Russ.).

11. Maslov A.A., Maslov D.A., Merkuryev I.V., Podalkov V.V. [Compensation for the departures of the wave solid-state gyroscope caused by anisotropy of the elastic properties of the monocrystalline resonator]. Gyroscopy and navigation. 2020. Vol. 28, no. 2. Pp. 25-36 (in Russ.).

12. Maslov A.A., Maslov D.A., Merkuryev I.V., Podalkov V.V. *Vliyanie raznochastotnosti i nelineinosti na dreif volnovogo tverdo-tel'nogo giroskopa v rezhime datchika uglovoi skorosti* [Influence of Different Frequency and Nonlinearity on the Drift of a Wave Solid-State Gyroscope in the Mode of an Angular Velocity Sensor]. *XXVIII Sankt-Peterburgskaya mezhdunarodnaya konferentsiya po integrirovannym navigatsionnym sistemam : sbornik materialov konferentsii* [Proc. XXVIII St. Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems. Proceedings of the Conference]. St. Petersburg, 2021. pp. 286-290 (in Russ.).

13. Matveev V.A., Lipatnikov V.I., Alekhine A.V. *Proektirovanie volnovogo tverdotel'nogo giroskopa* [Design of a wave solid-state gyroscope]. Moscow: Izd-vo MSTU named after N. E. Bauman, 1997. 168 p. (in Russ.).

14. Perelyaev S.E. [Principal Issues of the Theory of Combined Free Gyroscopes, Functioning on Two Working Modes]. *Izvestiya Rossiiskoi akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela*. 2021. № 4. S. 64-76 (in Russ.).

15. Perelyaev S.E., Alekhin A.V. *Vliyanie neidentichnosti informatsionnykh kanalov VTG v rezhime svobodnoi volny* [Influence of non-identity of VTG information channels in the free wave regime]. *XXX Yubileinaya Sankt-Peterburgskaya mezhdunarodnaya konferentsiya po integrirovannym navigatsionnym sistemam : sbornik materialov konferentsii* [XXX Jubilee St. Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems. Proceedings of the Conference]. St. Petersburg, 2023. Pp. 265-267 (in Russ.).

16. Lunin B.S., Matveev V.A., Basarab M.A. *Volnovoi tverdotel'nyi giroskop. Teoriya i tekhnologii* [Wave solid state

gyroscope. Theory and technology]. Moscow: Radiotekhnika Publ. 2014. 176 p. (in Russ.).
17. Chernodarov A.V., Patrikeev A.P., Perelyaev S.E. *Korrelyatsionnaya obrabotka signalov i strukturno-parametricheskaya identifikatsiya dinamicheskoi modeli oshibok volnovogo tverdotel'nogo giroskopa* [Correlation Signal Processing and Structural-Parametric Identification of a Dynamic Model of Wave Solid-State Gyroscope Errors]. *XXX Yubileinaya Sankt-Peterburgskaya mezhdunarodnaya konferentsiya po integrirovannym navigatsionnym sistemam : sbornik materialov konferentsii* [Proc. XXX Jubilee St. Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems. Proceedings of the Conference]. St. Petersburg, 2023. pp. 268-271 (in Russ.).
18. Maslov A.A., Maslov D.A., Merkuryev I.V. [Taking into account the nonlinearity of resonator oscillations when identifying the parameters of wave solid-state gyroscopes of various types]. *Izvestiya Rossiiskoi akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela*. 2022. No. 6. Pp. 28-40 (in Russ.).

* * *

**Measurement of Oscillatory and Dissipative Characteristics of Solid-state Wave Gyroscope Resonators: Algorithms Based on the Analysis of Transient Processes of Free Oscillations.**

*K. V. Shishakov*, DSc in Engineering, Professor, MIREA – Russian Technological University, Moscow, Russia

*The article is devoted to algorithms for measuring the oscillatory-dissipative characteristics of integrating solid-state wave gyroscoperesonators. The list of such algorithms is limited only to algorithms that use the results of transient processobservation of free oscillations after excitation of a pronounced standing wave in a resonator.*

*The list of measured oscillation-dissipative characteristics includes the values of different frequencies and different Q ratios of gyroscope resonators, as well as angular positions of the stiffness and Q-axes.*

*The article contains sequentially performed a mathematical description of the mode of free run-out of standing waves in the gyroscope resonator; mathematical description of the signalinternal structure generated by the gyroscopemeasuring device; preliminary analysis of the initial data and quantitativeparameterassessment for the physical representation of the resonatorfree oscillation features. On this basis, variousdetailing algorithm options to assess the resonatorstiffness properties for observing transient processes in the free run-out mode of the wave pattern are discussed, as well as possible approaches to the algorithmconstruction to assessresonator viscosity properties.*

*The givenalgorithm formulations are focused on the use of standard two-channel measuring gyroscopedevice, capable to calculate the angle and amplitudes of standing working and quadrature waves.*

*It has been confirmed that the observation of transients in time in the free run-out mode of the wave pattern makes it possible to obtain fairly simple computational algorithms to assess the resonatorstiffness properties. At the same time, in order to measure the disparity and angular position of the viscosity axes of the resonator when observing transient processes, a more complex computational identification problem is required.*

*For the practical application of the above-mentioned algorithms to measure the different frequency and angular position of the stiffening axes, the observation time interval should be selected based on the calculation that the multiphase of the resonant oscillations exceeds half of the wavelength.*

**Keywords:** solid-state wave gyroscope, resonant oscillations, wave pattern, identification, free oscillations, oscillatory-dissipative characteristics, measurement techniques.

Получено: 29.01.24

**Образец цитирования**

*Шишаков К. В.* Измерение колебательно-диссипативных характеристик резонаторов твердотельных волновых гироскопов: алгоритмы на основе анализа переходных процессов свободных колебаний // Интеллектуальные системы в производстве. 2024. Т. 22, № 1. С. 11–20. DOI: 10.22213/2410-9304-2024-1-11-20.

**For Citation**

Shishakov K.V. [Measurement of vibrational-dissipative characteristics of resonators of solid-state wave gyroscopes: Algorithms based on the analysis of transient processes of free oscillations]. *Intellektual'nye sistemy v proizvodstve.* 2024, vol. 22, no. 2, pp. 11-20 (in Russ.). DOI: 10.22213/2410-9304-2024-1-11-20.