УДК 621.317.08
DOI: 10.22213/2410-9304-2024-1-78-84

Новый метод построения алгоритмов быстрого дискретного преобразования Фурье финитных комплексных и действительных сигналов на основе параметрических дискретных преобразований Фурье второго вида

О. В. Пономарева, доктор технических наук, доцент, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова, Ижевск, Россия
В. А. Алексеев, доктор технических наук, профессор, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова, Ижевск, Россия
А. В. Пономарев, кандидат экономических наук, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова, Ижевск, Россия

В статье разработан простой, эффективный и результативный метод быстрого дискретного преобразования Фурье, позволяющий для финитных комплексных и действительных сигналов вычислять коэффициенты Фурье (бины) независимо на положительных и отрицательных частотах. Кратко рассмотрены алгебраическая и матричная формы дискретного преобразования Фурье, структура его базиса – базиса экспоненциальных функций Фурье. В основном разделе статьи рассмотрены обобщения дискретного преобразования Фурье в виде параметрических дискретных преобразований Фурье. Исследовано два вида параметрических дискретных преобразований Фурье, которые имеют параметр θ *по переменной, отвечающей за частоту или параметр* θ *по переменной, отвечающей за время. Проведен анализ структуры и свойств базисов этих преобразований – базисов параметрических дискретных экспоненциальных функций, исследованы их свойства. На основе параметрических дискретных преобразований Фурье второго вида разработан и подробно изложен новый метод построения алгоритмов быстрого дискретного преобразования Фурье комплексных и действительных сигналов. С целью проверки полученных теоретических результатов проведено поэтапное тестирование нового метода построения алгоритмов быстрого дискретного преобразования Фурье финитных комплексных и действительных сигналов. Тестирование нового метода построения алгоритмов быстрого дискретного преобразования Фурье финитных комплексных и действительных сигналов полностью подтвердило справедливость полученных результатов. Для финитных комплексных сигналов полученный результат носит (до появления соответствующей практической задачи) теоретический характер. Для финитных действительных сигналов полученный результат имеет теоретическое и важное практическое значение. Поскольку в силу свойства эрмитовой симметрии спектров финитных действительных сигналов они имеют избыточный характер. Их можно вычислять только на положительных или отрицательных частотах. Это позволяет для финитных действительных сигналов сократить необходимый объем памяти и число базовых операций.*

Ключевые слова: дискретное преобразование Фурье, параметрическое дискретное преобразование Фурье, эрмитова симметрия, финитный действительный сигнал, спектр.

Введение

Многие цифровые технологии основаны на свойствах дискретного преобразования Фурье (ДПФ), преимущества и достоинства которого проверены и доказаны временем [1–3]. Появление метода быстрого вычисления ДПФ – алгоритма быстрого преобразования Фурье (БПФ) (Cooley J.W., Tukey J.W. 1965 г.), сократившего время вычислений ДПФ на несколько порядков [4–6], повысившего точность вычисления ДПФ, дало мощнейший толчок как развитию цифровых информационных технологий [7–10], так и широкому внедрению методов цифровой обработки сигналов (методов ЦОС) во многие области науки и техники [11–15].

Наибольшую популярность получили алгоритмы БПФ по основанию 2. Эти эффективные алгоритмы позволяют анализировать ДПФ сигналов с числом отсчетов, равным целой степени двух, т. е. $N = 2^p$; где p – некоторое положительное число. Существует две формы представления ДПФ: алгебраическая и матричная.

Алгебраическая форма прямого ДПФ основана на системе дискретных экспоненциальных функций (ДЭФ):

$$\operatorname{def}_N(k,n) = \exp\left(-j\frac{2\pi}{N}kn\right) = W_N^{kn} = \\ = \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) - j\sin\left(\frac{2\pi}{N}kn\right), \qquad (1)$$

где $k, n = \overline{0, N-1}$; k – дискретная переменная, отвечающая за частоту; n – переменная, отвечающая за время.

И задается следующим соотношением:

$$S_N(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, W_N^{kn}\,;\, k,n = \overline{0,(N-1)}, \qquad (2)$$

где: $W_N = \exp\left(-j\frac{2\pi}{N}\right)$; $x(n)$ – финитный дискретный сигнал; $S_N(k)$ – коэффициенты Фурье (бины: отдельные коэффициенты (отсчеты) ДПФ называют также бинами) ДПФ.

Если представить $x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$, и $S_N(k)$, $n = \overline{0, N-1}$ в виде векторов N-мерного линейного пространства: $\mathbf{X}_N = [x(0), x(1), ..., x(N-1)]^T$; $\mathbf{S}_N = [s(0), s(1), ..., s(N-1)]^T$, то ДПФ в матричной форме можно задать следующим соотношением:

$$\mathbf{S}_N = \frac{1}{N}\mathbf{F}_N\mathbf{X}_N, \quad (3)$$

где разложение $\mathbf{X}_N$ по системе ДЭФ задается матрицей $\mathbf{F}_N$:

$$\mathbf{F}_N = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 0 & 1 & . & . & (N-1) & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ (N-1) \\ k \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & . & . & 1 \\ 1 & W_N^1 & . & . & W_N^{(N-1)} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 1 & W_N^{(N-1)} & . & . & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \end{array} \quad (4)$$

ДПФ и БПФ по умолчанию предполагают финитный входной сигнал $x(n)$ $n = \overline{0, N-1}$ комплексного вида. На практике часто имеют дело и с финитными действительными сигналами. Спектр ДПФ финитных действительных сигналов при четном N обладает комплексно-сопряженной симметрией:

$$S_N(k) = S_N^*(N-k), \quad k = \overline{1, N/2-1}, \quad (5)$$

где * – символ комплексного сопряжения.

Из соотношения (7) непосредственно следует, что применение комплексных БПФ к действительным сигналам приводит, с одной стороны, к избыточным вычислительным затратам, с другой – к избыточные затратам памяти.

Для устранения указанных недостатков разработан целый ряд алгоритмов БПФ финитных действительных последовательностей, достоинства и недостатки которых подробнейшим образом рассмотрены во многих зарубежных и отечественных информационных источниках.

Целью данной работы является разработка простого, эффективного и результативного метода быстрого дискретного преобразования Фурье, позволяющего для финитных комплексных и действительных сигналов вычислять коэффициенты (бины) Фурье отдельно на положительных или отрицательных частотах.

Виды обобщения дискретного преобразования Фурье

В принципе, существует два вида обобщения дискретного преобразования Фурье:

- ДПФ-П, имеющее параметр θ по переменной, отвечающей за частоту (переменная k);
- ДПФ-П, имеющее параметр θ по переменной, отвечающей за время (переменная n).

Поскольку из применения непосредственно следует, какое из этих двух преобразований используется, зачастую параметр обозначается одинаково – θ.

Как и в случае ДПФ, для каждого из видов параметрического ДПФ-П существует две формы представления: алгебраическая и матричная.

Алгебраическая форма прямого ДПФ-П первого вида задается по системе параметрических дискретных экспоненциальных функций первого вида (ДЭФ-П1):

$$\operatorname{def} 1_{N,p}(k,n,\theta) = \exp\left(-j\frac{2\pi}{N}(k+\theta)n\right) = W_N^{(k+\theta)n} =$$
$$= \cos\left(\frac{2\pi}{N}(k+\theta)n\right) - j\sin\left(\frac{2\pi}{N}(k+\theta)n\right);$$
$$k, n = \overline{0, N-1};\ 0 \le \theta < 1; \quad (6)$$

следующим соотношением:

$$S_N(k,\theta) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, W_N^{(k+\theta)n};\ k = \overline{0,(N-1)}, \quad (7)$$

где θ – параметр ДПФ-П1; $W_N = xp\left(-j\frac{2\pi}{N}\right)$; $x(n)$ – финитный дискретный сигнал; $S_N(k,\theta)$ – коэффициенты Фурье ДПФ-П1. Отдельные коэффициенты ДПФ-П1, как и в случае ДПФ, называют бинами.

Матричная форма прямого ДПФ-П1 задается следующим матричным уравнением:

$$\mathbf{S}_{N,\theta} = \frac{1}{N}\mathbf{F}_{N,\theta}\mathbf{X}_N;\quad 0 \le \theta < 1, \quad (8)$$

где T – знак транспонирования; $\mathbf{S}_{N,\theta} = [s(0,\theta), s(1,\theta), ..., s((N-1),\theta)]^T$ – вектор бинов ДПФ-П1, полученных путем вычисления измерения в системе ДЭФ-П1, которая задается матрицей $\mathbf{F}_{N,\theta}$.

$$\mathbf{F}_{N,\theta} = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 0 & 1 & .. & (N-1) & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ (N-1) \\ k \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & W_N^{\theta} & .. & W_N^{\theta(N-1)} \\ 1 & W_N^{(1+\theta)} & .. & W_N^{(1+\theta)(N-1)} \\ . & . & .. & . \\ . & . & .. & . \\ 1 & W_N^{(N-1+\theta)} & .. & W_N^{(N-1+\theta)(N-1)} \end{bmatrix} \end{array}. \quad (9)$$

Алгебраическая форма прямого ДПФ-П второго вида (ДПФ-П2) задается по системе параметрических дискретных экспоненциальных функций (ДЭФ-П) второго вида (ДЭФ-П2):

$$\operatorname{def} 2_{N,p}(k,n,\theta) = \exp\left(-j\frac{2\pi}{N}k(n+\theta)\right) = W_N^{k(n+\theta)} =$$
$$= \cos\left(\frac{2\pi}{N}k(n+\theta)\right) - j\sin\left(\frac{2\pi}{N}k(n+\theta)\right); \quad (10)$$
$$k, n = \overline{0, N-1};\ 0 \le \theta < 1;$$

следующим соотношением:

$$S_N(k,\theta) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, W_N^{k(n+\theta)};\ k = \overline{0,(N-1)};$$
$$0 \le \theta < 1, \quad (11)$$

где θ – параметр ДПФ-П2; $W_N = \exp\left(-j\frac{2\pi}{N}\right)$; $x(n)$ – финитный дискретный сигнал; $S_N(k,\theta)$ – коэффициенты Фурье (бины) ДПФ-П2.

Матричная форма прямого ДПФ-П2 задается следующим матричным уравнением:

$$\mathbf{S}_{N,\theta} = \frac{1}{N}\mathbf{F}_{N,\theta}\mathbf{X}_N;\quad 0 \le \theta < 1, \quad (12)$$

где T – знак транспонирования; $\mathbf{S}_{N,\theta} = \left[s(0,\theta), s(1,\theta),...,s((N-1),\theta)\right]^T$ – вектор коэффициентов ДПФ-П2, полученных путем вычисления в системе ДЭФ-П2, которая задается матрицей $\mathbf{F}_{N,\theta}$.

$$\mathbf{F}_{N,\theta} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & .. & (N-1) \end{array} \quad n \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ (N-1) \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & .. & 1 \\ W_N^{\theta} & W_N^{(1+\theta)} & .. & W_N^{(1+\theta)(N-1+\theta)} \\ . & . & .. & . \\ . & . & .. & . \\ W_N^{(N-1)\theta} & W_N^{(N-1)(1+\theta)} & .. & W_N^{(N-1)(N-1+\theta)} \end{bmatrix} \\ k & \end{array}. \quad (13)$$

Нетрудно видеть, что при $\theta = 0$ ДПФ-П1 и ДПФ-П2 тождественны ДПФ.

Блочная структура системы дискретных экспоненциальных функций

Рассмотрим блочную структуру матрицы ДЭФ (6) ДПФ размерностью $N = 2^p \times 2^p$**,** где p – любое целое положительное число. Обозначим множество номеров столбцов матрицы $\mathbf{F}_N$ (6) через $D : D = \{\ 0,1,2,...,(N-1)\ \}$. Применим к множеству D отношение сравнимости по модулю 2. В силу того что это отношение является ***отношением эквивалентности***, т. е. обладает свойствами рефлексивности (Отношение R на множестве A называется рефлексивным, если aRa для любого $a \in A$), симметричности (Отношение R на множестве A называется симметричным, если для любой пары элементов $a,b \in A$ из aRb следует bRa) и транзитивности (Отношение R на множестве A называется транзитивным, если для любых $a,b,c \in A$ из условий aRb и bRc вытекает, что aRc), оно разбивает множество D на 2 класса вычетов по модулю 2: т. е. на четные и нечетные отсчеты:

$$D_0 = \{\ 0,2,...,(N-2)\ \};$$
$$D_1 = \{\ 1,3,...,N-1\}. \quad (14)$$

Используя полученное разбиение, переупорядочим столбцы матрицы $\mathbf{F}_N$ (4) в соответствии с классами D_i вычетов по модулю 2. Матрицу $\mathbf{F}_N$, столбцы которой переупорядочены в соответствии с классами вычетов по модулю 2 (обозначим ее через $\mathbf{B}$). Рассечем вертикальными линиями на 2 блока (на две прямоугольные матрицы) $\mathbf{B}_{i,\text{блок}}$, где $i = 1,2$ размером $N \times N/2$ каждый (каждая):

$$\mathbf{B}_{1,\text{блок}} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 0 & 2 & . & . & (N-2) \end{array} \quad n \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ (N-1) \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & . & . & 1 \\ 1 & W_N^2 & . & . & W_N^{(N-2)2} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 1 & W_N^{(N-1)2} & . & . & W_N^{(N-1)(N-2)2} \end{bmatrix} \\ k & \end{array}; \quad (15)$$

$$\mathbf{B}_{2,\text{блок}} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 1 & 3 & . & . & (N-1) \end{array} \quad n \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ (N-1) \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & . & . & 1 \\ W_N^1 & W_N^3 & . & . & W_{Nr}^{(N-1)} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ W_N^{(N-1)1} & W_N^{(N-1)3} & . & . & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \\ k & \end{array}. \quad (16)$$

Матрицы $\mathbf{B}_{i,\text{блок}}$, $i = 1, 2,$ представим в свою очередь в виде блочных матриц, рассекая каждую из них горизонтальными линиям на 2 блока по $N/2$ строк в каждом:

$$\mathbf{B}_{1,\text{блок}} = [\mathbf{B}_{1,1}, \mathbf{B}_{2,1}]^T; \quad \mathbf{B}_{2,\text{блок}} = [\mathbf{B}_{2,1}, \mathbf{B}_{2,2}]^T. \quad (17)$$

Или в целом блочная структура матрицы $\mathbf{B}_N$ может быть представлена после упорядочения столбцов матрицы $\mathbf{F}_N$ по модулю 2 в виде 4 блочных матриц размером $N/2 \times N/2$:

$$\mathbf{B} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \; n \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{1,1} & \mathbf{B}_{1,2} \\ \mathbf{B}_{2,1} & \mathbf{B}_{2,2} \end{bmatrix} \\ k & \end{array}. \quad (18)$$

Несложно установить структуру первых блоков матриц $\mathbf{B}_{1,\text{блок}}$ и $\mathbf{B}_{2,\text{блок}}$ в. общем виде:

$$\mathbf{B}_{i,1} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & . \; . & (N/2-1) \\ 1 & 1 & . \; . & 1 \end{array} \quad n \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ (N/2-1) \end{array} & \begin{bmatrix} W_N^{\frac{(i-1)}{2}} & W_N^{1+\frac{(i-1)}{2}} & . \; . & W_N^{\left[1+\frac{(i-1)}{2}\right](N/2-1)} \\ . & . & . \; . & . \\ . & . & . \; . & . \\ W_N^{\frac{(i-1)}{2}(N/2-1)} & W_N^{(N/2-1)+\frac{(i-1)}{2}} & . \; . & W_N^{\left[N/2-1+\frac{(i-1)}{2}\right](N/2-1)} \end{bmatrix} \\ k & \end{array}. \quad (19)$$

Сравнив первые блоки матриц $\mathbf{B}_{i,á}$, $i = 1,2$ в общем виде (17) с матричной формой ДПФ (4) и матричной формой прямого ДПФ-П2 (14) по системе ДЭФ-П2 (10) можно с учетом (15), (16) и (19) показать, что:

- матрицы $\mathbf{B}_{i,1}$ при $\theta = \frac{(i-1)}{2}$ совпадают с матричной формой прямого ДПФ-П2 по системе ДЭФ-П2) при $\theta = 0$ и $\theta = 1/2$;
- введя матрицу поправочных коэффициентов:

$$\mathbf{K} = \begin{array}{c|cc|l} & 0 & 1 & n \\ 0 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & -1 & \\ k & & & \end{array}; \qquad (20)$$

и применив кронекеровское произведение (произведение Адамара) матрицы $\mathbf{B}$ (18) на матрицу поправочных коэффициентов $\mathbf{K}$ (20) матрицу $\mathbf{B}$ можно представить в блочном виде как:

$$\mathbf{B} = \begin{array}{c|cc|l} & 0 & 1 & n \\ 0 & \mathbf{B}_{1,1} & \mathbf{B}_{1,2} & \\ 1 & \mathbf{B}_{1,1} & -\mathbf{B}_{12} & \\ k & & & \end{array}. \qquad (21)$$

Матричное уравнение (21) должно быть справедливо как для финитных комплексных сигналов, так и для финитных действительных сигналов, поскольку требование необходимости комплексности или действительности входных сигналов при исследовании блочной структуры системы дискретных экспоненциальных функций и выводе соотношений (15), (16), (17), (19), (20) не использовалось. Проверим справедливость матричного уравнения (20) на финитных комплексных и действительных сигналах.

Тестирование нового метод построения алгоритмов быстрого дискретного преобразования Фурье финитных комплексных и действительных сигналов на основе параметрических дискретных преобразований Фурье второго вида

Тестирование нового метода построения алгоритмов быстрого дискретного преобразования Фурье проведем на случайных тестовых финитных комплексных и действительных сигналах.

1. Генерируем $x1$, $x2$ – два случайных финитных действительных сигнала, элементами которого являются случайные величины, распределенные по нормальному закону с математическим ожиданием 0 и среднеквадратичным отклонением 1 с помощью функции RANDN (1, 16) среды проектирования инженерных приложений MATLAB (табл. 1, 2).

Таблица 1. **Случайный финитный действительный сигнал x1**

Table 1. **Random finite Table 1real signal x1**

2,0211	0,5018	–1,9983	0,2723	0,3368	0,1378	–1,6106	–1,0075
–0,5144	–2,0889	1,0461	0,2153	–0,1624	–0,1758	1,1022	0,5150

Таблица 2. **Случайный финитный действительный сигнал x2**

Table 2. **Random finite real signal x2**

1,1515	0,5557	0,3370	1,3795	–0,4898	–0,0672	–1,9245	–0,3428
–0,0336	–0,4396	–0,1561	–1,3756	–0,3871	1,6273	–0,3843	1,6882

2. Формируем комплексный сигнал $x = x1 + jx2$ и вычисляем ДПФ сигнала $x = x1 + jx2$ (табл. 3).

Таблица 3. **Дискретное преобразование Фурье случайного финитного комплексного сигнала** $x = x1 + jx2$

Table 3. **Discrete Fourier transform of a random finite complex signal** $x = x1 + jx2$

–0,0881 + 0,0712i	0,3590 + 0,6214i	0,0040 + 0,1730i	0,1613 + 0,0325i	0,2168 + 0,2493i	0,0146 – 0,1697i	–0,0837 + 0,1266i	0,0016 – 0,3874i
0,1157 – 0,3070i	–0,1767 + 0,1529i	0,4738 + 0,1318i	0,1052 + 0,5072i	0,1759 + 0,0468i	0,4113 – 0,4332i	–0,0610 + 0,0673i	0,3914 + 0,2688i

3. Формируем матрицу $\mathbf{A}$ в 2 строки и $N/2$ столбцов из случайного финитного сигнала $x = x1 + jx2$, разбивая множество его отсчетов на 2 класса вычетов по модулю 2, т. е. на множество четных (первая строка матрицы $\mathbf{A}$) и множество нечетных (вторая строка матрицы $\mathbf{A}$) отсчетов (табл. 4).

Таблица 4. **Матрица A – четные и нечетные отсчеты случайного финитного комплексного сигнала** $x = x1 + jx2$

Table 4. **Matrix A – even and odd samples of a random finite complex signal** $x = x1 + jx2$

2,0211 + 1,1515i	–1,9983 + 0,3370i	0,3368 – 0,4898i	–1,6106 – 1,9245i	–0,5144 – 0,0336i	1,0461 – 0,1561i	–0,1624 – 0,3871i	1,1022 – 0,3843i
0,5018 + 0,5557i	0,2723 + 1,3795i	0,1378 – 0,0672i	–1,0075 – 0,3428i	–2,0889 – 0,4396i	0,2153 – 1,3756i	–0,1758 + 1,6273i	0,5150 + 1,6882i

4. Формируем матрицу поправочных коэффициентов $\mathbf{B}$ в 2 строки и 2 столбца:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

5. Вычисляем $\mathbf{B}_{1,1}$ – ДПФ-П2 первой строки матрицы A, табл. 3, при значении параметра $\theta = 0$ (табл. 5).

Таблица 5. **Дискретное преобразование Фурье первой строки матрицы A – S1**

Table 5. **Discrete Fourier transform of the first row of matrix A –S1**

0,0276 – 0,2359i	0,1822 + 0,7743i	0,4778 + 0,3048i	0,2665 + 0,5397i	0,3927 + 0,2961i	0,4260 - 0,6028i	–0,1447 + 0,1939i	0,3930 – 0,1186i

Вычисляем $\mathbf{B}_{1,2}$ ДПФ-П2 второй строки матрицы A, табл. 3, при значении параметра $\theta = 1/2$ (табл. 6).

Таблица 6. **Дискретное преобразование Фурье второй строки матрицы A**

Table 6. **Discrete Fourier transform of the second row of matrix A**

–0,2038 + 0,3782i	0,5357 + 0,4685i	–0,4698 + 0,0412i	0,0560 – 0,4748i	0,0408 + 0,2025i	–0,3967 + 0,2635i	–0,0226 + 0,0594i	–0,3898 – 0,6562i

6. Выполнив кронекеровское произведение (произведение Адамара) второй строки матрицы $\mathbf{B}$ (20) на вторую строку матрицы поправочных коэффициентов $\mathbf{K}$ (21), т. е. реализовав вторую строку матрицы (22), получим значения спектра сигнала $x = x1 + jx2$ на отрицательных частотах (табл. 7).

Таблица 7. **Дискретное преобразование Фурье сигнала $x = x1 + jx2$ на отрицательных частотах**

Table 7. **Discrete Fourier transform of a signal $x = x1 + jx2$ at negative frequencies**

0,1157 – 0,3070i	–0,1767 + 0,1529i	0,4738 + 0,1318i	0,1052 + 0,5072i	0,1759 + 0,0468i	0,4113 – 0,4332i	–0,0610 + 0,0673i	0,3914 + 0,2688i

7. Выполнив кронекеровское произведение (произведение Адамара) первой строки матрицы $\mathbf{B}$ (18) на первую строку матрицы поправочных коэффициентов $\mathbf{K}$ (19), т. е. реализовав первую строку матрицы (20), получим значения спектра сигнала $x = x1 + jx2$ на положительных частотах (табл. 8).Сравнив бины табл. 7 с восемью бинами: 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 (вторая строка табл. 3), убеждаемся в их эквивалентности.

Таблица 8. **Дискретное преобразование Фурье сигнала $x = x1 + jx2$ на положительных частотах**

Table 8. **Discrete Fourier transform of a signal $x = x1 + jx2$ at positive frequencies**

–0,0881 + 0,0712i	0,3590 + 0,6214i	0,0040 + 0,1730i	0,1613 + 0,0325i	0,2168 + 0,2493i	0,0146 – 0,1697i	–0,0837 + 0,1266i	0,0016 – 0,3874i

Сравнив бины табл. 8 с восемью бинами: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (первая строка табл. 3), убеждаемся в их эквивалентности.

Справедливость матричного уравнения (23) для случайного финитного комплексного сигнала подтверждена. Выполнив 7 пунктов вышерассмотренного алгоритма для случайного финитного действительного сигнала, несложно установить справедливость матричного уравнения (23) и для этого класса сигналов.

Заключение

Если для финитных комплексных сигналов полученный результат носит (до появления соответствующей практической задачи) чисто теоретический характер, то для финитных действительных сигналов полученный результат имеет не только теоретическое, но и важное практическое значение. В силу свойства эрмитовой симметрии спектров финитных действительных сигналов их можно вычислять только на положительных или отрицательных частотах.

Это позволяет при использовании предложенного метода построения алгоритмов быстрого дискретного преобразования Фурье финитных действительных сигналов на основе параметрических дискретных преобразований Фурье второго вида сокращать объем памяти в два раза и число операций в $\dfrac{\log_2 N}{\log_2 N/2}$ раз.

Библиографические ссылки

1. *Пономарева О. В., Пономарев А. В., Смирнова Н. В.* Алгоритмы прямого и обратного параметрического быстрого преобразования Фурье // Информационные технологии. 2022. Т. 28, № 1. С. 9–19.

2. *Пономарева О. В., Пономарев А. В., Пономарева Н. В.* Двумерные быстрые преобразования Фурье с варьируемыми параметрами // Цифровая обработка сигналов. 2022. № 3. С. 3–13.

3. *Пономарева О. В., Пономарев А. В., Пономарева Н. В*. Перекрестная комплексно-сопряженная симметрия коэффициентов двумерного дискретного преобразования Фурье с варьируемыми параметрами действительных сигналов // Цифровая обработка сигналов. 2022. № 4. С. 3–12.

4. *Marple S.L.Jr.* Digital Spectral Analysis**.** 2nd edition. New York: Dover Publications, 2019. 435 p.

5. *Куприянова Д. В., Перцев Д. Ю., Татур М. М.* Классификация методов сегментации снимков земной поверхности // Системный анализ и прикладная информатика. 2023. № 4. С. 20–28. URL: https://doi.org/10.21122/2309-4923-2023-4-20-28.

6. *Гулай А.В., Зайцев В.М.* Цифровая технология спектрального анализа параметров колебаний // Системный анализ и прикладная информатика. 2022. № 1. С. 4–8. URL: https://doi.org/10.21122/2309-4923-2022-1-4-8.

7. *Лобатый А. А., Бумай А. Ю.* Особенности построения алгоритмов оценивания параметров многомерных случайных процессов // Системный анализ и прикладная информатика. 2020. № 1. С. 24–32. https://doi.org/10.21122/2309-4923-2020-1-24-32.

8. *Rohman A., Ghazali M.A.B., Windarsih A.*, et al. Comprehensive review on application of FTIR spectroscopy coupled with chemometrics for authentication analysis of fats and oils in the food products. *Molecules*. 2020; 25 (22):5485. doi:10.3390/molecules25225485.

9. *Balan V., Mihai C.T., Cojocaru F.D.*, et al. Vibrational spectroscopy fingerprinting in medicine: from molecular to clinical practice. *Materials*. 2019; 12 (18): E2884. doi:10.3390/ma12182884.

10. *Ribeiro da Cunha B, Fonseca LP, Calado CRC.* Metabolic fingerprinting with Fourier-transform infrared (FTIR) spectroscopy: Towards a high-throughput screening assay for antibiotic discovery and mechanism-of-action elucidation. *Metabolites*. 2020; 10 (4): 145. doi: 10.3390/metabo10040145.

11. *Fahelelbom KM, Saleh A, Al-Tabakha MMA, Ashames AA.* Recent applications of quantitative analytical FTIR spectroscopy in pharmaceutical, biomedical, and clinical fields: A brief review. *Rev Anal Chem*. 2022; 41 (1): 21-33. doi: 10.1515/revac-2022-0030.

12. *Kümmel T, van Marwick B, Rittel M*, et al. Rapid brain structure and tumour margin detection on whole frozen tissue sections by fast multiphotometric mid-infrared scanning. *Sci Rep*. 2021; 11 (1): 11307. doi: 10.1038/s41598-021-90777-4.

13. *Alexey V. Ponomarev* Systems Analysis of Discrete Two-Dimensional Signal Processingin Fourier Bases. Springer Nature Switzerland AG 2020 M. Favorskaya and L. C. Jain (eds.), Advances in Signal Processing, Intelligent Systems Reference Library 184, https://doi.org/10.1007/978-3-030-40312-6_7.

14. *Richard G. Lyons* Understanding Digital Signal Processing, Third Edition, 2019, pp. 709. Upper Sydney • Tokyo • Singapore • Mexico City.

15. *Ponomareva O.V., Ponomarev A.V.* Theoretical Foundations of digital Vector Fourier Analysis of two-dimensional Signals Padded with Zero Samples // Information and Control Systems. 2021. No. 1 (110). Pp. 55-64.

16. *Gonzalez R.C., Woods R.E.* Digital Image Processing, 4th Ed. Published by Pearson. 2018. 1168 pages**.**

References

1. Ponomareva O.V., Ponomarev A.V, Smirnova N.V. [Algorithms for direct and inverse parametric fast Fourier transform]. *Information Technology*. 2022, no. 1, pp. 9-19 (in Russ.).

2. Ponomareva O.V., Ponomarev A.V, Smirnova N.V. [Two-dimensional fast Fourier transforms with variable parameters]. *Digital signal processing*. 2022, no 3, pp. 3-13 (in Russ.).

3. Ponomareva O.V., Ponomarev A.V, Smirnova N.V. [Cross complex conjugate symmetry of the coefficients of the two-dimensional discrete Fourier transform with varying parameters of real signals]. *Digital signal processing*. 2022, no. 4, pp. 3-12 (in Russ.).

4. Marple S.L.Jr. Digital Spectral Analysis**.** 2nd edition. New York: Dover Publications, 2019. 435 p.

5. Kypriyanava D.V., Pertsau D.Y., Tatur M.M. [Classification of earth surface image segmentation methods]. *System analysis and applied information science*. 2023; (4): 20-28 (In Russ.) https://doi.org/10.21122/2309-4923-2023-4-20-28.

6. Gulaj A.V., Zajcev V.M. [Digital technology for spectral analysis of oscillation parameters]. *System analysis and applied information science*. 2022; (1): 4-8. (in Russ.) https://doi.org/10.21122/2309-4923-2022-1-4-8.

7. Lobaty A.A., Bumai A.Y. [Features of construction of evaluation algorithms multidimensional random processes]. *System analysis and applied information science*. 2020; (1): 24-32 (in Russ.) https://doi.org/10.21122/2309-4923-2020-1-24-32.

8. Rohman A., Ghazali M.A.B., Windarsih A., et al. Comprehensive review on application of FTIR spectroscopy coupled with chemometrics for authentication analysis of fats and oils in the food products. *Molecules*. 2020;25(22):5485. doi:10.3390/molecules25225485.

9. Balan V., Mihai C.T., Cojocaru F.D., et al. Vibrational spectroscopy fingerprinting in medicine: from molecular to clinical practice. *Materials*. 2019; 12 (18): E2884. doi:10.3390/ma12182884.

10. Ribeiro da Cunha B., Fonseca L.P., Calado C.R.C. Metabolic fingerprinting with Fourier-transform infrared (FTIR) spectroscopy: Towards a high-throughput screening assay for antibiotic discovery and mechanism-of-action elucidation. *Metabolites*. 2020; 10 (4): 145. doi:10.3390/metabo10040145.

11. Fahelelbom K.M., Saleh A., Al-Tabakha M.M.A., Ashames A.A. Recent applications of quantitative analytical FTIR spectroscopy in pharmaceutical, biomedical, and clinical fields: A brief review. *Rev Anal Chem*. 2022; 41 (1): 21-33. doi:10.1515/revac-2022-0030.

12. Kümmel T, van Marwick B, Rittel M, et al. Rapid brain structure and tumour margin detection on whole frozen tissue sections by fast multiphotometric mid-infrared scanning. Sci Rep. 2021; 11 (1): 11307. doi:10.1038/s41598-021-90777-4.

13. Alexey V. Ponomarev Systems Analysis of Discrete Two-Dimensional Signal Processingin Fourier Bases. Springer Nature Switzerland AG 2020 M. Favorskaya and L. C. Jain (eds.), Advances in Signal Processing, Intelligent Systems Reference Library 184, https://doi.org/10.1007/978-3-030-40312-6_7.

14. Richard G. Lyons Understanding Digital Signal Processing, Third Edition, 2019, pp. 709.Upper Sydney • Tokyo • Singapore • Mexico City.

15. Ponomareva O.V., Ponomarev A.V. Theoretical Foundations of digital Vector Fourier Analysis of two-dimensional Signals Padded with Zero Samples // Information and Control Systems. 2021. No. 1. Pp. 55-64.

16. Gonzalez R.C., Woods R.E. Digital Image Processing, 4th Ed. Published by Pearson. 2018. 1168 pages**.**

A New Method to Construct Algorithms for Fast Discrete Fourier Transform of Finite Complex and Real Signals Based on Thesecond Type Parametric Discrete Fourier Transforms

O. V. Ponomareva, DSc in Engineering, Associate Professor, Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk, Russia
V. A. Alekseev, DSc in Engineering, Professor, Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk, Russia
A. V. Ponomarev, PhD in Engineering, Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk, Russia

The article develops a simple, efficient and effective method for fast discrete Fourier transform, which allows to calculate Fourier coefficients (bins) independently at positive and negative frequenciesfor finite complex and real signals.The algebraic and matrix forms of the discrete Fourier transform and the structure of its basis - the basis of exponential Fourier functions - are briefly considered.The main section of the article discusses generalizations of the discrete Fourier transform in the form of parametric discrete Fourier transforms.Two types of parametric discrete Fourier transforms have been studied, that have a parameter θ in a frequency variable or a parameterθ in a time variable.

The structure and properties of the bases of these transformations being the bases of parametric discrete exponential functions were analyzed and investigated.Based on parametric discrete Fourier transforms of the second type, a new method for constructing algorithms for fast discrete Fourier transforms of complex and real signals has been developed and described in detail.In order to verify the obtained theoretical results, a step-by-step testing of a new method for constructing algorithms for fast discrete Fourier transform of finite complex and real signals was carried out.Testing of a new method for constructing algorithms for fast discrete Fourier transform of finite complex and real signals has fully confirmed the validity of the obtained results.

For finite complex signals, the result obtained is (until the corresponding practical problem appears) of a theoretical nature.For finite real signals, the obtained result has theoretical and important practical significance.Since they have a redundant characterdue to the property of Hermitian symmetry of the finite real signalspectra.They can only be calculated at positive or negative frequencies.This allows to reduce the required amount of memory and the number of basic operationsfor finite real signals.

Keywords: discrete Fourier transform, parametric discrete Fourier transform, Hermitian symmetry, finite real signal, spectrum.

Получено: 04.12.23

Образец цитирования

Пономарева О. В., *Алексеев В. А.*, *Пономарев А. В.* Новый метод построения алгоритмов быстрого дискретного преобразования Фурье финитных комплексных и действительных сигналов на основе параметрических дискретных преобразований Фурье второго вида // Интеллектуальные системы в производстве. 2024. Т. 22, № 1. С. 78–84. DOI: 10.22213/2410-9304-2024-1-78-84.

For Citation

Ponomareva O.V., Alekseev V.A., Ponomarev A.V. [A new method for constructing algorithms for fast discrete Fourier transform of finite complex and real signals based on parametric discrete Fourier transforms of the second type]. *Intellektual'nye sistemy v proizvodstve.* 2024, vol. 22, no. 1, pp. 78-84. DOI: 10.22213/2410-9304-2024-1-78-84.