

УДК 621.372

DOI: 10.22213/2410-9304-2024-1-85-92

Новый эффективный метод определения огibaющих дискретных финитных действительных сигналов на базе параметрического дискретного преобразования Фурье второго вида

О. В. Пономарева, доктор технических наук, доцент, ИжГТУ имени М.Т. Калашникова, Ижевск, Россия

В. В. Хворенков, доктор технических наук, профессор, ИжГТУ имени М.Т. Калашникова, Ижевск, Россия

Н. В. Пономарева, кандидат технических наук, доцент, Севастопольский государственный университет, Севастополь, Россия

В статье показано, что расширения сфер приложений систем цифровой обработки сигналов (ЦОС), повышение масштабности задач и проблем, решаемых такими системами, привело к необходимости развития теории, совершенствования методов и алгоритмов ЦОС, в том числе на основе дискретных финитных преобразований Фурье и Гильберта (ДПФ) и (ДПГ). ДПФ и ДПГ благодаря своим свойствам, появлению алгоритма быстрого преобразования Фурье (БПФ) (Cooley J.W., Tukey J.W. 1965 г.), нашли самое широкое приложение в системах ЦОС. Показано, что ДПФ наряду с достоинствами обладают и принципиальными недостатками, которые проявляются во временной и в частотной областях в виде ряда негативных эффектов, а вычисления ДПГ сопровождаются рядом сложностей. В работе кратко рассмотрены основы теории ЦОС в параметрических базисах Фурье. Параметрические дискретные преобразования Фурье (ДПФ-П) являются двумя обобщениями классического ДПФ. При этом введение в ДПФ-П параметра позволяет «управлять» свойствами унитарного преобразования в частотной области или во временной области. В статье рассмотрено два вида математически эквивалентного описания дискретных финитных действительных (ДФД) сигналов: в виде спектра (суммы дискретных гармонических компонент) и в виде, использующем мгновенные параметры ДФД-сигнала: мгновенную амплитуду, мгновенную фазу и огibaющую. С точки зрения информационного описания мгновенные параметры позволяют более полно представлять и выявлять информацию о свойствах и состояниях исследуемых объектов, явлений, процессов и систем. Преобразования ДПФ и ДПГ играют важную роль при описаниях ДФД-сигналов. В статье, например, показано, что ДПГ – это единственный линейный оператор, позволяющий однозначно, при выполнении вполне понятных требований, определять мгновенные параметры ДФД-сигнала. В работе разработан новый эффективный метод определения огibaющих на базе параметрических преобразований Фурье второго вида. Полученные в статье теоретические результаты подтверждены математическим моделированием.

Ключевые слова: огibaющая, мгновенная частота, математическое моделирование, дискретное преобразование Фурье, дискретное преобразование Гильберта, параметрическое преобразование Фурье, финитный сигнал.

Введение

Постоянное повышение масштабности проблем, которые решаются системами ЦОС, интенсивное расширение сфер их приложений в различные области науки и техники ставит проблему развития теории ЦОС, в том числе на основе дискретных преобразований Фурье и Гильберта [1].

Практика ЦОС показала, что переход от ДФД-сигналов к ДФК-сигналам позволяет повысить эффективность и результативность многих операций ЦОС.

Приведем также слова лорда Кельвина, подчеркивающие важность преобразования Фурье для современного анализа: «Терема Фурье – не только один из наиболее красивых результатов современного анализа, можно сказать, что она представляет нам необходимый инструмент для рассмотрения почти каждого трудного вопроса в современной физике».

ДПФ и ДПГ благодаря своим уникальным свойствам, алгоритмам БПФ (Cooley J.W., Tukey J.W. 1965 г.), которые сократили время вычисления ДПФ на несколько порядков, повысили точность вычисления ДПФ, нашли самое широкое приложение в системах ЦОС.

Однако алгоритмы ДПФ и ДПГ наряду с достоинствами обладают и принципиальными недостатками, которые проявляются во временной и в частотной областях в виде известных негативных эффектов [2–5].

Для борьбы с указанными недостатками ДПФ в работах [6–9] разработаны основы теории цифровой обработки сигналов в параметрических дискретных экспоненциальных базисах Фурье (ДЭФ-П). ДЭФ-П являются двумя обобщениями классических ДЭФ. При этом введение в ДПФ-П параметра в соответствующей области позволяет «управлять» свойствами унитарного преобразования ДПФ-П.

В настоящее время существует два вида (с математической точки зрения равнозначных) описания дискретных финитных действительных (ДФД) сигналов: ДФД-сигнал $x(n)$, $n = \overline{(0, N-1)}$ [10, 11]:

• в виде ряда Фурье (суммы дискретных гармонических компонент):

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N/2-1} A_k \cdot \cos(2\pi kn / N + \varphi_k), \quad (1)$$

где A_k – амплитуда k -й гармонической компоненты; $2\pi \cdot k / N$ – нормированная частота k -й гар-

монической компоненты; $\varphi_k = \arctg \{ \text{Im}[S_N(k)] / \text{Re}[S_N(k)] \}$ – фаза k -й гармонической компоненты;

• в виде, использующем мгновенные параметры ДФД-сигнала (мгновенную амплитуду (огibaющую), мгновенную фазу:

$$x(n) = A(n) \cdot \cos[\Phi(n)], \quad (2)$$

где $A(n)$ – мгновенная амплитуда $x(n)$ (огibaющая ДФД-сигнала $x(n)$); $\Phi(n)$ – мгновенная фаза.

Эти два вида описаний ДФД-сигналов нашли самое широкое приложение в системах ЦОС, поскольку позволяют всесторонне представлять и выявлять информацию о свойствах и состояниях исследуемых процессов, явлений, объектов и систем.

Роль ДФГ в ЦОС во многом объясняется тем, что это единственный линейный оператор, позволяющий однозначно при выполнении вполне понятных требований определить однозначно огibaющую $A(n)$ и мгновенную фазу $\Phi(n)$ (2) ДФД-сигнала $x(n)$:

$$A(n) = \sqrt{x^2(n) + x_{\Sigma}^2(n)}; n = \overline{(0, N-1)}, \quad (3)$$

где $x_{\Sigma}(n)$ – новый ДФД-сигнал (ДПГ-сигнала $x(n)$), Фурье-спектр которого сдвинут по фазе относительно Фурье-спектра $x(n)$ на $\pi/2$ (на 90°).

В работе [12] приведены следующие основные требования к преобразованию, позволяющие определить огibaющую $A(n)$ и мгновенную фазу $\Phi(n)$ (2) ДФД сигнала $x(n)$:

- При любом $A(n) \geq |x(n)|$.
- При $A(n) = |x(n)|$ $A(n), |x(n)|$ имеют общую касательную.
- Огibaющая гармонического сигнала, заданного на интервале $n = \overline{(0, N-1)}$, должна совпадать с его амплитудой A , если период гармонического сигнала кратен интервалу анализа $n = \overline{(0, N-1)}$.

• Малым, в среднеквадратичном смысле, изменениям $x(n)$ должны соответствовать малые изменения $A(n)$, мгновенная фаза $\Phi(n)$ не должна зависеть от мощности сигнала.

ДФК-сигнал, получивший в зарубежной и частично в отечественной литературе название *аналитического сигнала*:

$$x_{AC}(n) = x(n) + jx_{\Sigma}(n). \quad (4)$$

В отечественной литературе некоторые авторы совершенно справедливо предпочитают называть аналитический сигнал (4) *гильбертовским сигналом* (см., например, работу [13]).

Действительно, аналитический комплексный сигнал вовсе не обязательно должен быть гильбертовским. Для того чтобы ДФК-сигнал являлся гильбертовским, необходимо и достаточно, чтобы его спектр Фурье был равен нулю на отрицательных частотах.

В работе [14] проведено сравнение преимуществ и недостатков существующих методов генерации аналитических сигналов во временной и частотной области.

Авторы настоящей работы не подвергают сомнению вывод автора указанной работы о том, что из всех методов определения ДПГ самым точным является формирование аналитического сигнала на основе ДПФ. По-видимому, именно этим и объясняется выбор метода генерации аналитического сигнала в среде проектирования инженерных приложений MATLAB (*функция hilbert*).

Однако при практической реализации ДПГ на основе ДПФ выяснилось, что применение этого метода формирования ДПГ связано с необходимостью преодоления ряда подводных камней ЦОС и ставит проблемы и соответствующую им проблематику, разрешению которых и посвящена настоящая статья.

Целью настоящей работы является разработка нового метода определения огibaющих дискретных финитных действительных сигналов на базе параметрического дискретного преобразования Фурье второго вида, позволяющего разрешить указанную проблематику.

Дискретное преобразование Фурье.

Быстрое преобразование Фурье

ДПФ – взаимно обратимое преобразование. Поэтому существует прямое ДПФ (обозначается как ДПФ) и обратное (ОДПФ) и две формы представления ДПФ: алгебраическая и матричная.

Алгебраическая форма прямого ДПФ основана на системе дискретных экспоненциальных функций (ДЭФ):

$$\begin{aligned} \text{def}_N(k, n) &= \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} kn\right) = W_N^{kn} = \\ &= \cos\left(\frac{2\pi}{N} kn\right) - j \sin\left(\frac{2\pi}{N} kn\right), \end{aligned} \quad (5)$$

где $k, n = \overline{0, N-1}$; k – дискретная переменная, отвечающая за частоту; n – переменная, отвечающая за время;

и задается следующим соотношением:

$$S_N(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}; k, n = \overline{0, (N-1)}, \quad (6)$$

где $W_N = \exp\left(-j \frac{2\pi}{N}\right)$; $x(n)$ – финитный дискретный сигнал; $S_N(k)$ – коэффициенты Фурье (бины Фурье) ДПФ.

Если представить $x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$, и $S_N(k)$, $n = \overline{0, N-1}$, в виде векторов N -мерного линейного пространства:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_N &= [x(0), x(1), \dots, x(N-1)]^T; \\ \mathbf{S}_N &= [s(0), s(1), \dots, s(N-1)]^T, \end{aligned}$$

то ДПФ в матричной форме задается следующим соотношением:

$$\mathbf{S}_N = \frac{1}{N} \mathbf{F}_N \mathbf{X}_N; \quad (7)$$

где разложение \mathbf{X}_N по системе ДЭФ задается матрицей \mathbf{F}_N :

$$\mathbf{F}_N = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & \dots & (N-1) \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ (N-1) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N^1 & \dots & W_N^{(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & W_N^{(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} n \\ \\ \\ k \end{matrix} \quad (8)$$

Алгебраическая форма ОДПФ основана на системе обратных дискретных экспоненциальных функций (ОДЭФ):

$$\begin{aligned} \text{odef}_N(k, n) &= \exp\left(+j \frac{2\pi}{N} kn\right) = W_N^{-kn} = \\ &= \cos\left|\frac{2\pi}{N} kn\right| + j \sin\left(\frac{2\pi}{N} kn\right), \end{aligned} \quad (9)$$

где $k, n = \overline{0, N-1}$; k – дискретная переменная, отвечающая за частоту; n – переменная, отвечающая за время;

и задается следующим соотношением:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} S_N(k) W_N^{-kn}; \quad k, n = \overline{0, (N-1)}. \quad (10)$$

ОДПФ в матричной форме задается следующим соотношением:

$$\mathbf{X}_N = \mathbf{F}_N^* \mathbf{S}_N, \quad (11)$$

где * – знак комплексного сопряжения.

$$\mathbf{F}_N^* = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & \dots & (N-1) \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ (N-1) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N^{-1} & \dots & W_N^{-(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & W_N^{-(N-1)} & \dots & W_N^{-(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} n \\ \\ \\ k \end{matrix} \quad (12)$$

Быстрое преобразование Фурье в принципе, как можно понять из названия, преобразованием не является, а является лишь алгоритмом быстрого вычисления ДПФ.

Наибольшую популярность получили алгоритмы БПФ по основанию 2. Эти эффективные алгоритмы позволяют анализировать ДПФ сигналов с числом отсчетов, равным целой степени двух, т. е. $N = 2^p$; где p – некоторое положительное число. Несложно видеть, что шаг числа отсчетов анализируемых данным алгоритмом есть геометрическая прогрессия, что является существенным его недостатком.

Обобщение дискретного преобразования

Фурье путем введения параметров.

Параметрические дискретные преобразования Фурье

Возможны два вида обобщения ДПФ:

- ДПФ-1П, имеющий параметр θ по переменной, отвечающей за частоту (переменная k);

- ДПФ-2П, имеющее параметр θ по переменной, отвечающей за время (переменная n).

ДПФ-1П и ДПФ-2П, как и ДПФ, – взаимно обратимые преобразования, т. е. существуют обратные ДПФ-1П и ДПФ-2П. Как и в случае ДПФ, для ДПФ-1П и ДПФ-2П существует две формы представления: алгебраическая и матричная. Поскольку в данной работе используется ДПФ-2П, рассмотрим его более подробно.

Алгебраическая форма прямого ДПФ-П второго вида (ДПФ-П2) задается по системе параметрических дискретных экспоненциальных функций (ДЭФ-П) второго вида (ДЭФ-П2):

$$\begin{aligned} \text{def}_{2N,p}(k, n, \theta) &= \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} k(n+\theta)\right) = W_N^{k(n+\theta)} = \\ &= \cos\left(\frac{2\pi}{N} k(n+\theta)\right) - j \sin\left(\frac{2\pi}{N} k(n+\theta)\right); \\ & \quad k, n = \overline{0, N-1}; \quad 0 \leq \theta < 1; \end{aligned} \quad (13)$$

следующим соотношением:

$$\begin{aligned} S_N(k, \theta) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{k(n+\theta)}; \\ & \quad k = \overline{0, (N-1)}; \quad 0 \leq \theta < 1, \end{aligned} \quad (14)$$

где θ – параметр ДПФ-П2; $W_N = \exp\left(-j \frac{2\pi}{N}\right)$; $x(n)$

– финитный дискретный сигнал; $S_N(k, \theta)$ – коэффициенты Фурье (бины) ДПФ-П2.

Матричная форма прямого ДПФ-П2 задается следующим матричным уравнением:

$$\mathbf{S}_{N,\theta} = \frac{1}{N} \mathbf{F}_{N,\theta} \mathbf{X}_N; \quad 0 \leq \theta < 1, \quad (15)$$

где T – знак транспонирования; $\mathbf{S}_{N,\theta} = [s(0, \theta), s(1, \theta), \dots, s((N-1), \theta)]^T$ – вектор коэффициентов ДПФ-П2, полученных путем вычисления в системе ДЭФ-П2, которая задается матрицей $\mathbf{F}_{N,\theta}$.

$$\mathbf{F}_{N,\theta} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & \dots & (N-1) \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ (N-1) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ W_N^\theta & W_N^{(1+\theta)} & \dots & W_N^{(1+\theta)(N-1+\theta)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_N^{(N-1)\theta} & W_N^{(N-1)(1+\theta)} & \dots & W_N^{(N-1)(N-1+\theta)} \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} n \\ \\ \\ k \end{matrix} \quad (16)$$

Нетрудно видеть, что при значении параметра $\theta = 0$ ДПФ-П2 тождественен ДПФ.

Дискретное преобразование Гильберта дискретных финитных действительных сигналов

Прежде чем перейти к изложению материала данного раздела, рассмотрим понятие дискретно-временного преобразования Фурье (ДВПФ).

Если задана некоторая дискретная последовательность $y(n)$, $n = -\infty, +\infty$, то ее ДВПФ задает ее

непрерывный спектр ДВПФ дискретной последовательности, $y(n)$ определяется как ее z -преобразование на единичной окружности:

$$S_y(f) = S_y(z) \Big|_{z=\exp(j2\pi f)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n) \cdot \exp(-j2\pi \cdot f \cdot n), \quad -1/2 \leq f \leq 1/2. \quad (17)$$

Дискретная финитная последовательность $x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$ может интерпретироваться как результат взвешивания дискретным прямоугольным окном:

$$w(n) = 1, \quad n = \overline{0, N-1};$$

$$w(n) = 0, \quad n = \overline{-\infty, -1}; \quad w(n) = 0, \quad n = \overline{N, +\infty}; \quad (18)$$

некоторой последовательности, заданной на интервале $n = \overline{-\infty, +\infty}$. Взвешенное ДВПФ задается следующим соотношением:

$$S_x(f) = S_x(z) \Big|_{z=\exp(j2\pi f)} = \sum_{n=0}^{N-1} y(n) \cdot \exp(-j2\pi \cdot f \cdot n), \quad -1/2 \leq f \leq 1/2. \quad (19)$$

Исходя из выражений (17), (18) и (19) непосредственно следует, что бины $S_N(k)$ (6) равны значени-

ям взвешенного ДВПФ на единичной окружности в точках $\frac{2\pi}{N}k$, $k = \overline{0, N-1}$:

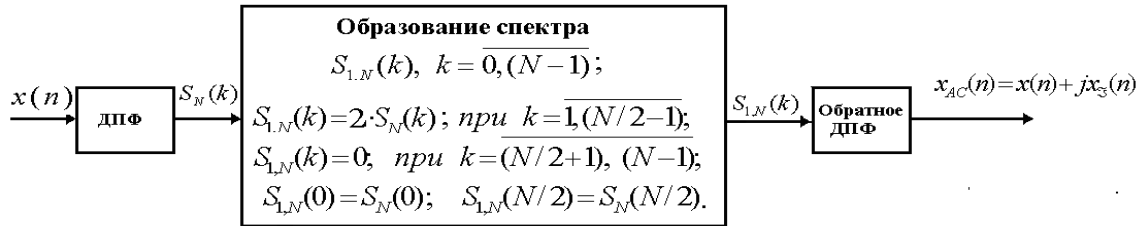
$$S(f) = S(z) \Big|_{z=\exp(j\frac{2\pi}{N}k)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot \exp(-j\frac{2\pi}{N}k \cdot n) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot \exp(-j\frac{2\pi}{N}k \cdot n). \quad (20)$$

Идея алгоритма определения ДПГ в частотной области на основе ДПФ с учетом ссылки 4 заключается в следующем. Известно, что бины Фурье ДПФ при четном N (6) ДФД-сигналов (за исключением бинов $S_N(0)$ и $S_N(N/2)$) обладают эрмитовой симметрией (комплексной сопряженностью):

$$S_N(k) = S_N^*(N-k); \quad k = \overline{1, N/2-1}. \quad (21)$$

Поэтому, если положить нулю бины Фурье ДПФ на отрицательных частотах и выполнить ОДПФ полученного одностороннего спектра, то получим аналитический (гильбертовский) сигнал. На действительной части аналитического сигнала получим исходный сигнал, а на мнимой части – сигнал ДПГ (4).

Кратко упомянутый в [15] алгоритм определения гильбертовского (аналитического) сигнала в частотной области на основе ДПФ ДФД-сигнал формализован на рисунке.



Алгоритм определения аналитического сигнала в частотной области на основе ДПФ

Algorithm for determining an analytical signal in the frequency domain based on DFT

Обратим внимание на избыточность алгоритма, приведенного на рисунке, как по вычислениям, так и по затратам памяти.

Структура системы дискретных экспоненциальных функций

Рассмотрим блочную структуру матрицы ДЭФ (8) ДПФ размерностью $N=2^p \times 2^p$, где p – любое целое положительное число. Обозначим множество номеров столбцов матрицы F_N (8) через $D: D = \{0, 1, 2, \dots, (N-1)\}$.

Используя полученное разбиение, переупорядочим столбцы матрицы F_N (8) в соответствии с классами D_i вычетов по модулю 2. Матрицу F_N , столбцы которой переупорядочены в соответствии с классами вычетов по модулю 2 (обозначим ее через \mathbf{B}). Рассечем вертикальными линиями на 2 блока (на две прямоугольные матрицы) $\mathbf{B}_{i, \text{блок}}$, где $i = 1, 2$ размером $N \times N/2$ каждый (каждая):

$$\mathbf{B}_{1, \text{блок}} = \begin{matrix} & 0 & 2 & \dots & (N-2) & n \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ (N-1) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N^2 & \dots & W_N^{(N-2)2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & W_N^{(N-1)2} & \dots & W_N^{(N-1)(N-2)2} \end{bmatrix} \end{matrix}; \quad (22)$$

$$\mathbf{B}_{2, \text{блок}} = \begin{matrix} & 1 & 3 & \dots & (N-1) & n \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ (N-1) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ W_N^1 & W_N^3 & \dots & W_N^{(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_N^{(N-1)1} & W_N^{(N-1)3} & \dots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \end{matrix}. \quad (23)$$

Матрицы $\mathbf{B}_{i, \text{блок}}$, $i = 1, 2$, представим в свою очередь в виде блочных матриц, рассекая каждую из них горизонтальными линиями на 2 блока по $N/2$ строк в каждом:

$$\mathbf{B}_{1, \text{блок}} = [\mathbf{B}_{1,1}, \mathbf{B}_{2,1}]^T; \quad \mathbf{B}_{2, \text{блок}} = [\mathbf{B}_{2,1}, \mathbf{B}_{2,2}]^T. \quad (24)$$

Или в целом блочная структура матрицы \mathbf{V}_N может быть представлена после упорядочения столбцов матрицы \mathbf{F}_N по модулю 2 в виде 4 блочных матриц размером $N/2 \times N/2$:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \mathbf{B}_{1,1} & \mathbf{B}_{1,2} \\ 1 & \mathbf{B}_{2,1} & \mathbf{B}_{2,2} \end{bmatrix}^n \quad (25)$$

Несложно установить структуру первых блоков матриц $\mathbf{V}_{1, \text{блок}}$ и $\mathbf{V}_{2, \text{блок}}$ в общем виде:

$$\mathbf{V}_{i,1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & (N/2-1) \\ 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (N/2-1) & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (26)$$

Сравнив первые блоки матриц $\mathbf{V}_{i,d}$, $i=1,2$, в общем виде (24) с матричной формой ДПФ (8) и матричной формой прямого ДПФ-П2 (15) по системе ДЭФ-П2, можно показать, что:

- матрицы $\mathbf{V}_{i,1}$ при $\theta = \frac{(i-1)}{2}$ совпадают с матричной формой прямого ДПФ-П2 по системе ДЭФ-П2) при $\theta=0$ и $\theta=1/2$;
- введя матрицу поправочных коэффициентов:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^n \quad (27)$$

и применив произведение Адамара матрицы \mathbf{V} на матрицу поправочных коэффициентов \mathbf{K} , матрицу \mathbf{V} можно представить в блочном виде как:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \mathbf{B}_{1,1} & \mathbf{B}_{1,2} \\ 1 & \mathbf{B}_{1,1} - \mathbf{B}_{1,2} \end{bmatrix}^n \quad (28)$$

Выявленная структура системы дискретных экспоненциальных функций дает возможность разработать новый эффективный метод определения огибающих дискретных финитных действительных сигналов на базе параметрического дискретного преобразования Фурье второго вида.

Новый метод определения огибающих дискретных финитных действительных сигналов на базе параметрического дискретного преобразования Фурье второго вида

Прежде чем изложить алгоритм нового метода определения огибающих дискретных финитных действительных сигналов, дадим краткий анализ алгоритма определения гильбертовского (аналитического) сигнала в частотной области на основе

ДПФ ДФД-сигнала, который формализован на рис. 1.

1. Согласно (21) спектр ДФД-сигнала определяется $N/2+1$ отсчетами, а не $N/2$ отсчетами, как иногда утверждается в литературе.

2. Умножение спектра $S_N(k)$ на 2 объясняется обнулением спектра на отрицательных частотах при генерации гильбертовского сигнала.

3. Согласно алгоритму требуется сначала вычислить, а затем обнулить отрицательные частоты, кроме нулевой отрицательной частоты ($N/2+1$ отсчет спектра), что приводит к непроизводительным вычислительным затратам и дополнительным затратам памяти.

4. Выявленная структура системы дискретных экспоненциальных функций дает возможность найти отсчеты на положительных отсчетах, минуя этап вычисления отсчетов на отрицательных частотах.

5. Нулевая отрицательная частота ($N/2+1$ отсчет спектра) может быть вычислена отдельно (первая строка матриц $\mathbf{V}_{1,1}, -\mathbf{V}_{1,2}$, соотношение (28)).

Изложим алгоритм нового метода определения огибающих дискретных финитных действительных сигналов на базе параметрического дискретного преобразования Фурье второго вида, сопроводив его моделированием.

1. Генерируем x_1 – случайный финитный действительный сигнал, элементами которого являются случайные величины, распределенные по нормальному закону с математическим ожиданием 0 и среднеквадратичным отклонением 1, с помощью функции RANDN среды проектирования инженерных приложений MATLAB (табл. 1).

2. Вычисляем ДПФ сигнала $x = x_1$ (табл. 2).

Таблица 1. Случайный финитный действительный сигнал x_1 Table 1. Random finite real signal x_1

| | | | | | | | |
|---------|---------|--------|---------|--------|---------|---------|---------|
| 1.2032 | 0.6676 | 1.7374 | -0.4740 | 1.6772 | -1.2801 | -0.9427 | 0.2707 |
| -1.4286 | -0.5094 | 0.0681 | -0.3744 | 1.5319 | -0.1009 | -0.7548 | -0.6805 |

Таблица 2. Дискретное преобразование Фурье случайного финитного комплексного сигнала $x = x_1$ Table 2. Discrete Fourier Transform of a random finite complex signal $x = x_1$

| | | | | | | | |
|--------|---------------------|----------------------|---------------------|---------------------|---------------------|----------------------|---------------------|
| 0.0382 | 0.2854 – 0.0516i | -0.1273 – 0.2676i | 0.0255 – 0.2099i | 0.1797 – 0.0022i | 0.1394 – 0.0971i | -0.3021 + 0.1703i | 0.2077 + 0.0975i |
| 0.3483 | 0.2077 – 0.0975i | -0.3021 – 0.1703i | 0.1394 + 0.0971i | 0.1797 + 0.0022i | 0.0255 + 0.2099i | -0.1273 + 0.2676i | 0.2854 + 0.0516i |

3. Формируем матрицу \mathbf{A} в 2 строки и $N/2$ столбцов из случайного финитного сигнала $x = x_1$, разбивая множество его отсчетов на 2 класса вычетов по модулю 2, т.е. на множество четных (первая строка матрицы \mathbf{A}) и множество нечетных (вторая строка матрицы \mathbf{A}) отсчетов (табл. 3).

4. Формируем матрицу поправочных коэффициентов \mathbf{B} в 2 строки и 2 столбца:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

5. Вычисляем $\mathbf{B}_{1,1}$ – ДПФ-П2 первой строки матрицы \mathbf{A} , табл. 3, при значении параметра $\theta = 0$ (табл. 4).

6. Вычисляем $\mathbf{B}_{1,2}$ ДПФ-П2 второй строки матрицы \mathbf{A} , табл. 3, при значении параметра $\theta = 1/2$ (табл. 5).

7. Формируем спектр гильбертовского сигнала (табл. 6).

8. Формируем гильбертовский сигнал (табл. 7).

Таблица 3. Матрица \mathbf{A} – четные и нечетные отсчеты случайного финитного комплексного сигнала $x = x_1$ Table 3. Matrix \mathbf{A} is even and odd samples of a random finite complex signal $x = x_1$

| | | | | | | | |
|--------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1.2032 | 1.7374 | 1.6772 | -0.9427 | -1.4286 | 0.0681 | 1.5319 | -0.7548 |
| 0.6676 | -0.4740 | -1.2801 | 0.2707 | -0.5094 | -0.3744 | -0.1009 | -0.6805 |

Таблица 4. Дискретное преобразование Фурье первой строки матрицы \mathbf{A} Table 4. Discrete Fourier Transform of the first row of matrix \mathbf{A}

| | | | | | | | |
|--------|---------------------|----------------------|---------------------|--------|---------------------|----------------------|---------------------|
| 0.3865 | 0.4931 – 0.1491i | -0.4293 – 0.4379i | 0.1648 – 0.1128i | 0.3595 | 0.1648 + 0.1128i | -0.4293 + 0.4379i | 0.4931 + 0.1491i |
|--------|---------------------|----------------------|---------------------|--------|---------------------|----------------------|---------------------|

Таблица 5. Дискретное преобразование Фурье второй строки матрицы \mathbf{A} Table 5. Discrete Fourier Transform of the second row of matrix \mathbf{A}

| | | | | | | | |
|---------|---------------------|---------------------|----------------------|---------------------|---------------------|----------------------|----------------------|
| -0.3101 | 0.0777 + 0.0459i | 0.1748 – 0.0973i | -0.1139 – 0.3069i | 0.0000 – 0.0044i | 0.1139 – 0.3069i | -0.1748 – 0.0973i | -0.0777 + 0.0459i |
|---------|---------------------|---------------------|----------------------|---------------------|---------------------|----------------------|----------------------|

Таблица 6. Спектр гильбертовского сигнала

Table 6. Spectrum of the Hilbert signal

| | | | | | | | |
|--------|---------------------|----------------------|---------------------|---------------------|---------------------|----------------------|---------------------|
| 0.0382 | 0.2854 – 0.0516i | -0.1273 – 0.2676i | 0.0255 – 0.2099i | 0.1797 – 0.0022i | 0.1394 – 0.0971i | -0.3021 + 0.1703i | 0.2077 + 0.0975i |
| 0.3483 | | | | | | | |

Таблица 7. Формирование гильбертовского сигнала

Table 7. Formation of the Hilbert signal

| | | | | | | | |
|----------------------|----------------------|---------------------|----------------------|---------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| 1.2032 – 0.7211i | 0.6676 – 0.5468i | 1.7374 + 0.8019i | -0.4740 + 0.5319i | 1.6772 + 0.5734i | -1.2801 + 2.2766i | -0.9427 – 0.8953i | 0.2707 + 0.6722i |
| -1.4286 + 0.3231i | -0.5094 – 1.1871i | 0.0681 – 0.0938i | -0.3744 – 1.2267i | 1.5319 – 0.1931i | -0.1009 + 0.8951i | -0.7548 + 0.2049i | -0.6805 – 1.4154i |

На действительной части гильбертовского (аналитического) сигнала мы получили исходный сигнал, а на мнимой части – сигнал ДПГ (4).

Заключение

Новый метод определения огибающих дискретных финитных действительных сигналов на базе параметрического дискретного преобразования

Фурье второго вида позволяет существенно сократить (в два раза) необходимый объем памяти и число базовых операций быстрых алгоритмов Фурье (прямого и обратного) сокращается в

$$\frac{2 \log_2 N}{\log_2 N / 2 + \log_2 N} \text{ раз.}$$

Библиографические ссылки

1. Gonzalez R.C., Woods R.E. Digital Image Processing, 4th Ed. Published by Pearson. 2018. 1168 pages.
2. Zamparo M. Large Deviations in Renewal Models of Statistical Mechanics // J. Phys. A: Math.Theor. 2019. Vol. 52. No. 49. P. 495004 (31 p.). <https://doi.org/10.1088/1751-8121/ab523f>.
3. Marple S.L.Jr. Digital Spectral Analysis. 2nd edition. New York: Dover Publications, 2019. 435 p.
4. Zhuang, Long, Xu, Daobao. High-precision motion compensation for very-high-resolution SAR imaging // The Journal of Engineering. 2019. DOI: 10.1049/joe.2019.0321.
5. Лобатый А. А., Бумай А. Ю. Особенности построения алгоритмов оценивания параметров многомерных случайных процессов // Системный анализ и прикладная информатика. 2020. № 1. С. 24–32.
6. Пономарева О. В., Пономарев А. В., Смирнова Н. В. Алгоритмы прямого и обратного параметрического быстрого преобразования Фурье // Информационные технологии. 2022. Т. 28, № 1. С. 9–19.
7. Пономарева О. В., Пономарев А. В., Пономарева Н. В. Двумерные быстрые преобразования Фурье с варьируемыми параметрами // Цифровая обработка сигналов. 2022. № 3. С. 3–13.
8. Пономарева О. В., Пономарев А. В., Пономарева Н. В. Перекрестная комплексно-сопряженная симметрия коэффициентов двумерного дискретного преобразования Фурье с варьируемыми параметрами действительных сигналов // Цифровая обработка сигналов. 2022. № 4. С. 3–12.
9. Ponomareva O. V., Ponomarev A. V. Theoretical Foundations of digital Vector Fourier Analysis of two-dimensional Signals Padded with Zero Samples // Information and Control Systems. 2021. № 1 (110). С. 55–64.
10. Zamparo M. Large Deviations in Discrete-Time Renewal Theory // Stochastic Process. Appl. 2021. Vol. 139. P. 80-109.
11. Faehelebom K.M., Saleh A., Al-Tabakha M.M.A., Ashames A.A. Recent applications of quantitative analytical FTIR spectroscopy in pharmaceutical, biomedical, and clinical fields: A brief review. *Rev Anal Chem.* 2022;41(1):21-33. doi:10.1515/revac-2022-0030.
12. Balan V., Mihai C.T., Cojocaru F.D., et al. Vibrational spectroscopy fingerprinting in medicine: from molecular to clinical practice. *Materials.* 2019. № 12 (18). E2884. doi:10.3390/ma12182884
13. Zhuang, Long, Xu, Daobao. High-precision motion compensation for very-high-resolution SAR imaging // The Journal of Engineering. 2019. DOI: 10.1049/joe.2019.0321.
14. Ribeiro da Cunha B, Fonseca LP, Calado CRC. Metabolic fingerprinting with Fourier-transform infrared (FTIR) spectroscopy: Towards a high-throughput screening assay for antibiotic discovery and mechanism-of-action elucidation. *Metabolites.* 2020;10(4):145. doi:10.3390/metabo10040145.
15. Richard G. Lyons Understanding Digital Signal Processing, Third Edition, 2019, pp. 709. Upper Sydney • Tokyo • Singapore • Mexico City.

References

1. Gonzalez R.C., Woods R.E. Digital Image Processing, 4th Ed. Published by Pearson. 2018. 1168 pages.
2. Zamparo M. Large Deviations in Renewal Models of Statistical Mechanics // J. Phys. A:Math.Theor. 2019. Vol. 52, no. 49. P. 495004 (31 p.). <https://doi.org/10.1088/1751-8121/ab523f>.
3. Marple S.L.Jr. Digital Spectral Analysis. 2nd edition. New York: Dover Publications, 2019. 435 p.
4. Zhuang, Long, Xu, Daobao. High-precision motion compensation for very-high-resolution SAR imaging // The Journal of Engineering. 2019. DOI: 10.1049/joe.2019.0321.
5. Lobaty A.A., Bumai A.Y. [Features of construction of evaluation algorithms multidimensional random processes]. *System analysis and applied information science.* 2020. No. 1. Pp. 24-32 (In Russ.).
6. Ponomareva O.V., Ponomarev A.V, Smirnova N.V. [Algorithms for direct and inverse parametric fast Fourier transform]. *Information Technology.* 2022, no. 1, pp. 9-19 (in Russ.).
7. Ponomareva O.V., Ponomarev A.V, Smirnova N.V. [Two-dimensional fast Fourier transforms with variable parameters]. *Digital signal processing.* 2022, no. 3, pp. 3-13 (in Russ.).
8. Ponomareva O.V., Ponomarev A.V, Smirnova N.V. [Cross complex conjugate symmetry of the coefficients of the two-dimensional discrete Fourier transform with varying parameters of real signals]. *Digital signal processing.* 2022, no 4, pp. 3-12 (in Russ.).
9. Ponomareva O.V., Ponomarev A.V. Theoretical Foundations of digital Vector Fourier Analysis of two-dimensional Signals Padded with Zero Samples // Information and Control Systems. 2021. No. 1. Pp. 55-64.
10. Zamparo M. Large Deviations in Discrete-Time Renewal Theory // Stochastic Process. Appl. 2021. Vol. 139. Pp. 80-109. <https://doi.org/10.1016/j.spa.2021.04.014>.
11. Faehelebom K.M., Saleh A., Al-Tabakha M.M.A., Ashames A.A. Recent applications of quantitative analytical FTIR spectroscopy in pharmaceutical, biomedical, and clinical fields: A brief review. *Rev Anal Chem.* 2022; 41(1): 21-33. doi:10.1515/revac-2022-0030.
12. Balan V., Mihai C.T., Cojocaru F.D., et al. Vibrational spectroscopy fingerprinting in medicine: from molecular to clinical practice. *Materials.* 2019;12(18):E2884. doi:10.3390/ma12182884.
13. Zhuang, Long, Xu, Daobao. High-precision motion compensation for very-high-resolution SAR imaging // The Journal of Engineering. 2019. DOI: 10.1049/joe.2019.0321.
14. Ribeiro da Cunha B, Fonseca LP, Calado CRC. Metabolic fingerprinting with Fourier-transform infrared (FTIR) spectroscopy: Towards a high-throughput screening assay for antibiotic discovery and mechanism-of-action elucidation. *Metabolites.* 2020;10(4):145. doi:10.3390/metabo10040145.
15. Richard G. Lyons Understanding Digital Signal Processing, Third Edition, 2019, pp. 709. Upper Sydney • Tokyo • Singapore • Mexico City.

A New Effectivemethod to Determine the Discrete Finite Real Signalenvelopes Based on The Parametric Discrete Fourier Transform of the Second Type

O. V. Ponomareva, DSc in Engineering, Associate Professor, Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk, Russia
 V. V. Khvorenkov, DSc in Engineering, Professor, Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk, Russia
 N. V. Ponomareva, PhD in Engineering, Associate Professor, Sevastopol State University, Sevastopol, Russia

The article shows that expanding the application scope of digital signal processing (DSP) systems, increasing the scale of tasks and problems solved by such systems, led to the need to develop a theory, improve DSP methods and algorithms, including those based on discrete finite Fourier and Hilbert transforms (DFT) and (DPG). DFT and DPG, due to their properties, the emergence of the fast Fourier transform (FFT) algorithm (Cooley J.W., Tukey J.W., 1965), have found the widest application in DSP systems. It is shown that DFTs, along with their advantages, also have fundamental disadvantages, that reveal in the time and frequency domains in a number of negative effects, and the calculations of DFTs are accompanied by a number of difficulties. The paper briefly examines the fundamentals of the DSP theory in parametric Fourier bases. Parametric discrete Fourier transforms (DFT-P) are the two generalizations of the classical DFT. At the same time, introducing a parameter into the DFT-P allows you to "control" the properties of the unitary transformation within the frequency or time domain. The article considers two types of mathematically time-equivalent descriptions of discrete finite real (DFR) signals: in the form of a spectrum (the sum of discrete harmonic components) and in the form that uses the instantaneous parameters of the DFR signal: instantaneous amplitude, instantaneous phase and envelope. From the information description viewpoint, instantaneous parameters provide a more complete representation and information identification about the properties and states of the objects, phenomena, processes and systems under study. DFT and DPG transformations play an important role in describing DPD signals. The article, for example, shows that the DPG is the only linear operator that allows you to determine the instantaneous parameters of the DPD signal unambiguously, subject to the fulfillment of completely understandable requirements. In this work, a new effective method for determining envelopes based on parametric Fourier transforms of the second type has been developed. The theoretical results obtained in the article are confirmed by mathematical modeling.

Keywords: envelope, instantaneous frequency, mathematical modeling, discrete Fourier transform, discrete Hilbert transform, parametric Fourier transform, finite signal.

Получено: 04.12.23

Образец цитирования

Пономарева О. В., Хворенков В. В., Пономарева Н. В. Новый эффективный метод определения огибающих дискретных финитных действительных сигналов на базе параметрического дискретного преобразования Фурье второго вида // Интеллектуальные системы в производстве. 2024. Т. 22, № 1. С. 85–92. DOI: 10.22213/2410-9304-2024-1-85-92.

For Citation

Ponomareva O.V., Khvorenkov V. V., Ponomareva N.V. [A new effective method for determining the envelopes of discrete finite real signals based on the parametric discrete Fourier transform of the second type]. *Intellektual'nye sistemy v proizvodstve*. 2024, vol. 22, no. 1, pp. 85-92. DOI: 10.22213/2410-9304-2024-1-85-92.