

## ПРИБОРОСТРОЕНИЕ, МЕТРОЛОГИЯ И ИНФОРМАЦИОННО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ ПРИБОРЫ И СИСТЕМЫ

УДК 531.383

DOI: 10.22213/2410-9304-2024-4-4-14

### Анализ условий эффективного применения алгоритмов идентификации точностных механических характеристик резонаторов твердотельных волновых гироскопов

*Р. И. Мингазов*, аспирант, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова, Ижевск, Россия  
*К. В. Шишаков*, доктор технических наук, доцент, РТУ МИРЭА, Москва, Россия

*Целью статьи является проведение анализа условий эффективного применения алгоритмов измерения точностных механических характеристик резонаторов интегрирующих твердотельных волновых гироскопов, к которым отнесены остаточные значения параметров разночастотности и разнодобротности резонаторов. При этом основными режимами измерений выбраны режимы свободных колебаний резонатора неподвижного гироскопа.*

*Рассматриваемые алгоритмы измерения остаточных значений параметров разночастотности и разнодобротности резонаторов реализуются через стандартные вычислительные процедуры идентификации коэффициентов дифференциальных уравнений свободных колебаний резонаторов. В качестве базовой модели идентификации выбраны уравнения колебаний резонатора в осях рабочей и квадратурной стоячих волн, которые записаны для медленно изменяющихся их амплитуд. Исходные сигналы для подготовки первичной информации задач идентификации формируются в измерительном устройстве, аналогичном штатному измерительному устройству интегрирующего твердотельного волнового гироскопа.*

*Обсуждены разные постановки задачи идентификации параметров остаточных разнодобротности и разночастотности резонаторов как по отдельности, так и одновременно. В результате предложены и проанализированы хорошо обусловленные вычислительные схемы, не требующие введения дополнительной регуляризации обратных задач идентификации. Данные схемы обоснованно увязаны с математическими алгоритмами подготовки первичной информации для решаемых задач идентификации, которая формируется в виде массивов промежуточно вычисляемых амплитуд рабочей и квадратурной стоячих волн. Показано влияние ошибок вычисления этих амплитуд на точность идентификации параметров разнодобротности и разночастотности резонаторов. Дополнительно обсуждены возможности повышения точности расчета скоростей изменения этих амплитуд в условиях шумов измерений.*

*Выявленные точностные условия применения алгоритмов идентификации параметров остаточных разнодобротности и разночастотности резонаторов гироскопов через нахождение коэффициентов дифференциальных уравнений их свободных колебаний позволяют повысить эффективность настройки методик производственного контроля.*

**Ключевые слова:** твердотельный волновой гироскоп, резонансные колебания, волновая картина, идентификация, свободные колебания, колебательно-диссипативные характеристики, алгоритмы измерения.

#### Введение

Волновые твердотельные гироскопы (ВТГ) имеют далеко не реализованный сегмент своего потенциального востребованного использования, что актуализирует продолжение прикладной научной активности к улучшению их выходных характеристик [1–4].

В то же время относительно небольшой промышленный выпуск таких отечественных гироскопов во многом ограничивается повышенной наукоемкостью используемых технологических процессов при их изготовлении [5–8].

В результате такие технологии обычно являются авторскими и проходят многолетнее производственное совершенствование.

Среди них выделяется «проект ТВГ» (твердотельный волновой гироскоп), разработанный и доведенный до малосерийного производства коллективом под руководством чл.-корр. академии навигации и управления движением Петра Кузьмича Мачехина [9, 10]. Предложенная им авторская конструкция интегрирующего гироскопа отличается от других ВТГ главным образом в реализации измерительного устройства на переменном токе, что оказало влияние и на разработанный технологический процесс изготовления, контроля и настройки гироскопов для разных условий эксплуатации. С тех пор название проекта ТВГ закрепилось и за названием продукции. В результате под аббревиатурой *ТВГ* обычно понимается интегрирующий волно-

вой твердотельный гироскоп (ТВГ) с внутренним измерительным устройством емкостного типа на переменном токе [11–13 и др.].

В настоящее время промышленный выпуск ТВГ производится относительно небольшими партиями. При этом расширяется перечень производимой продукции, уменьшаются ее габариты и совершенствуется технологический процесс изготовления с точки зрения уменьшения себестоимости, сокращения общего времени производства и улучшения эксплуатационных характеристик ТВГ. Среди последних первостепенное значение сохраняет актуальная задача повышения точностных характеристик ТВГ, особенно для различного рода навигационных систем [14, 15], оправдываемая при необходимости даже некоторым повышением их себестоимости.

В процессе многолетних работ в этом направлении было выявлено, что повышение точности выходного сигнала интегрирующего ТВГ во многом связано с производственной точностью изготовления механической конструкции гироскопов. Среди ее точностных показателей особую значимость с точки зрения влияния на систематический дрейф нуля выходного сигнала гироскопа имеют остаточные значения параметров разночастотности и разnodобротности резонаторов ТВГ [16, 17]. Это, в свою очередь, требует повышения точности производственных операций их контроля на всех внутренних этапах изготовления гироскопов.

Начатое в последнее время широкое производственное внедрение комплексных методик одновременного контроля остаточных значений параметров разночастотности и разnodобротности резонаторов ТВГ на основе идентификации коэффициентов математической модели их свободных колебаний предполагает предварительную подготовку информации о временном поведении комплексных амплитуд стоячих волн (которые еще иногда называют медленными переменными или волновыми переменными) [18, 19].

В свою очередь, точность нахождения последних зависит от алгоритмов обработки первичной информации, снимаемой непосредственно с емкостных датчиков перемещения кромки резонатора.

Целью настоящей статьи является выявление условий эффективного применения алгоритмов измерения точностных механических характеристик резонаторов ТВГ в рамках использования двухуровневых схем идентификации. В них на первом уровне рассчитываются амплитуды и углы стоячих волн. На этой основе на втором

уровне выполняется уже расчет значений параметров остаточных разночастотности и разnodобротности резонаторов. При этом основным режимом измерений выбран режим свободных колебаний неподвижно закрепленного ТВГ.

При решении поставленной задачи будем широко использовать математические зависимости и результаты (в тех же обозначениях), полученные в предыдущих статьях авторов в журнале «Интеллектуальные системы в производстве» (ИСП): 2020, № 3; 2021, № 3, 4; 2024, № 1, 2.

### 1. Математические алгоритмы идентификации точностных механических характеристик резонаторов

В качестве базовой модели идентификации выберем дифференциальные уравнения для амплитуд стоячих волн:

$$\begin{aligned} \dot{a}_A + \nu[1 + \delta\mu \cos 4(\theta_A - \theta_\mu)] \cdot a_A + \\ + \Delta\omega \cdot \sin 4(\theta_A - \theta_\omega) \cdot a_B = 0, \\ \dot{a}_B + \nu[1 - \delta\mu \cos 4(\theta_A - \theta_\mu)] \cdot a_B - \\ - \Delta\omega \cdot \sin 4(\theta_A - \theta_\omega) \cdot a_A = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $2\Delta\omega = \Delta\omega_{pq} = \omega_p - \omega_q$  – величина разночастотности;  $(\omega_p, \omega_q)$  – близкие резонансные частоты свободных колебаний резонатора гироскопа по его осям жесткости  $(p, q)$ ;  $\omega = (\omega_p + \omega_q)/2$  – средняя частота резонансных колебаний;  $\theta_\omega$  – угловое положение осей жесткости по отношению к приборной системе координат  $(x, y)$ , связанной с измерительным устройством гироскопа;  $\nu(\theta) = \nu[1 + 2\delta\mu \cdot \cos 4(\theta - \theta_\mu)]$  – угловое распределение функции вязкости;  $\theta_\mu$  – угловое положение осей вязкости по отношению к приборной системе координат;  $\Delta\nu = 4\nu\delta\mu$  – величина разновязкости;  $Q = \omega / 2\nu$  – величина добротности колебаний;  $\Delta Q = Q \cdot (\Delta\nu / \nu) = 4Q \cdot \delta\mu$  – величина разnodобротности по осям вязкости.

На первом уровне идентификации для расчета входящих сюда медленно изменяющихся волновых переменных  $\{\theta_A(t), a_A(t), a_B(t)\}$  могут быть применены разные варианты алгоритмов в зависимости от выбранных режимов и применяемой аппаратуры измерений.

На втором уровне идентификации с помощью модели (1) уже можно сформулировать разные варианты задач нахождения параметров разночастотности  $\Delta f [\text{Гц}] = \Delta\omega_{pq} / 2\pi = \Delta\omega / \pi$  и разnodобротности  $\Delta Q$  конструкций резонаторов.

Для выявления условий эффективного применения таких двухуровневых алгоритмов измерения точностных механических характеристик резонаторов ТВГ выберем рассматриваемые ниже наиболее наглядные решения.

В качестве первого важного частного случая рассмотрим задачу измерения только вязкостных (диссипативных) свойств резонатора при известных параметрах его разночастотности (пренебрежимо малой для хорошо отбалансированных резонаторов или же измеренных другими методами). Здесь уравнения (1) перепишем в виде:

$$\begin{aligned} v \cdot a_A + \Delta v_C \cdot (a_A \cos 4\theta_A) + \\ + \Delta v_S \cdot (a_A \sin 4\theta_A) = \Phi_{A\omega}, \\ v \cdot a_B - \Delta v_C \cdot (a_B \cos 4\theta_A) - \\ - \Delta v_S \cdot (a_B \sin 4\theta_A) = \Phi_{B\omega}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\Delta v_C \equiv \delta \mu \cos 4\theta_\mu$ ,  $\Delta v_S \equiv \delta \mu \sin 4\theta_\mu$ ,  $\Delta \omega_C \equiv$

$$\begin{aligned} \equiv \Delta \omega \cos 4\theta_\omega, \Delta \omega_S \equiv \Delta \omega \sin 4\theta_\omega \\ \Phi_{A\omega} \equiv -\dot{a}_A - \Delta \omega_C \cdot (a_B \sin 4\theta_A) + \\ + \Delta \omega_S \cdot (a_B \cos 4\theta_A), \\ \Phi_{B\omega} \equiv -\dot{a}_B + \Delta \omega_C \cdot (a_A \sin 4\theta_A) - \\ - \Delta \omega_S \cdot (a_A \cos 4\theta_A), \end{aligned}$$

при малой остаточной разночастотности ( $\Delta \omega \rightarrow 0$ ) часто можно принимать:  $\Phi_{A\omega} \approx -\dot{a}_A$ ,  $\Phi_{B\omega} \approx -\dot{a}_B$ .

Решение общей задачи идентификации диссипативных характеристик с использованием модели (2) сводится к минимизации квадратичной ошибки:

$$\begin{aligned} J = < [v \cdot a_A + \Delta v_C \cdot (a_A \cos 4\theta_A) + \\ + \Delta v_S \cdot (a_A \sin 4\theta_A) - \Phi_{A\omega}]^2 + \\ + [v \cdot a_B - \Delta v_C \cdot (a_B \cos 4\theta_A) - \Delta v_S \cdot (a_B \sin 4\theta_A) - \\ - \Phi_{B\omega}]^2 > \Rightarrow \min(v, \Delta v_C, \Delta v_S). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь угловыми скобками обозначена операция усреднения по достаточно длительному интервалу  $T$  времени решения идентификационной задачи (на практике  $T$  может доходить до получаса и более):

$$\langle f \rangle \equiv (1/T) \int_0^T f(t) dt \approx \sum_i^n f / n,$$

где  $n$  – число тактов усреднения.

Минимизация функционала (3) проводится через его дифференцирование по искомым параметрам ( $v, \Delta v_C, \Delta v_S$ ) и приравнивания нулю результатов. Окончательную очевидную систему из трех линейных алгебраических уравнений здесь выписывать не будем из-за их громоздкости.

Далее по найденным значениям параметров минимизации легко вычисляются угол осей вязкости и величина разновязкости:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 4\theta_\mu = \Delta v_S / \Delta v_C, \\ \delta \mu^2 = (\Delta v_S^2 + \Delta v_C^2) / v^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Заметим, что в случае высокой добротности резонатора рабочая стоячая волна в режиме свободных колебаний будет проходить весь не-

зависимый угловой путь  $0 \leq \theta_A \leq \pi / 2$ . Поэтому здесь хорошая обусловленность вычислительной схемы решения обратной задачи может получиться уже при достаточно длительном наблюдении за одним выбегом колебательной картины. Если же это не достигается, придется использовать в (3) два и более вариантов начального выбега колебательной картины.

Также отметим, что решение задачи (3) в полном варианте подынтегральной функции желательно проводить только для тех подынтервалов наблюдения, когда в условиях свободного выбега резонансных колебаний квадратурная стоячая волна станет развитой, а ее амплитуда  $a_B(t)$  будет сравнима с амплитудой  $a_A(t)$ . Иначе вклад двух основных квадратичных слагаемых в (3) окажется неравномерным, что в условиях шумов измерений нежелательно. В последней ситуации может оказаться лучше упростить функционал (3), оставив в нем только значимые составляющие.

Альтернативный подход к решению задачи идентификации вязкостных свойств резонатора предполагает использование нескольких мало продолжительных запусков свободных колебаний из разных угловых положений.

Так как измерения проводятся на коротких интервалах, в результате для малых величин  $\Delta \omega$  остаточной разночастотности будем иметь относительно малый (еще не развитый) вклад амплитуд квадратурной волны ( $a_B / a_A \rightarrow 0$ ). Из-за этой малости становится все более трудно выделять  $a_B$  из шума измерений, а второе уравнение в (2) может ухудшать обусловленность решения полной задачи (3).

В этих условиях для реализации эффективных операций контроля параметров разнодобротности можно в (2) оставить только первое уравнение, записанное для хорошо наблюдаемых амплитуд  $a_A$  рабочей стоячей волны:

$$\begin{aligned} v \cdot a_A + \Delta v_C \cdot (a_A \cos 4\theta_A) + \\ + \Delta v_S \cdot (a_A \sin 4\theta_A) = \Phi_{A\omega} = -\dot{a}_A. \end{aligned} \quad (5)$$

Тогда для нахождения входящих сюда трех параметров  $v, \Delta v_C, \Delta v_S$  потребуются минимально три угловые точки измерений свободного начального выбега колебательной картины:  $\theta_{A1} = \theta_{A0}$ ,  $\theta_{A2} = \theta_{A0} + \Delta \theta$ ,  $\theta_{A3} = \theta_{A0} - \Delta \theta$ .

При этом в полном угловом интервале  $0 \leq 4\theta_A \leq 2\pi$  удобно выбирать равномерное распределение с  $\Delta \theta = \pi/8$ . Кроме этого, вариант  $\Delta \theta = \pi/8$  соответствует имеющейся конструкции размещения электродов в гироскопе, что упрощает возбуждение свободных колебаний резонатора в таких трех угловых направлениях.

В результате здесь получим замкнутую систему из трех уравнений:

$$\begin{aligned} v \cdot a_{A1} + \Delta v_C \cdot (a_{A1} \cos 4\theta_{A0}) + \\ + \Delta v_S \cdot (a_{A1} \sin 4\theta_{A0}) = -\dot{a}_{A1}, \\ v \cdot a_{A2} + \Delta v_C \cdot (a_{A2} \sin 4\theta_{A0}) - \\ - \Delta v_S \cdot (a_{A2} \cos 4\theta_{A0}) = -\dot{a}_{A2}, \\ v \cdot a_{A3} - \Delta v_C \cdot (a_{A3} \sin 4\theta_{A0}) + \\ + \Delta v_S \cdot (a_{A3} \cos 4\theta_{A0}) = -\dot{a}_{A3}. \end{aligned} \quad (6)$$

Подставляя в нее  $\theta_{A0} = 0$ , будем иметь:

$$\begin{aligned} v \cdot a_{A1} + \Delta v_C \cdot a_{A1} = -\dot{a}_{A1}, \\ v \cdot a_{A2} - \Delta v_S \cdot a_{A2} = -\dot{a}_{A2}, \\ v \cdot a_{A3} + \Delta v_S \cdot a_{A3} = -\dot{a}_{A3}. \end{aligned} \quad (7)$$

Отсюда легко вычисляются:

$$\begin{aligned} v = -\frac{1}{2} \left( \frac{\dot{a}_{A2}}{a_{A2}} + \frac{\dot{a}_{A3}}{a_{A3}} \right), \Delta v_S = \frac{1}{2} \left( \frac{\dot{a}_{A2}}{a_{A2}} - \frac{\dot{a}_{A3}}{a_{A3}} \right), \\ \Delta v_C = -\frac{\dot{a}_{A1}}{a_{A1}} - v, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\operatorname{tg} 4\theta_{\mu} = \Delta v_S / \Delta v_C, \quad \delta\mu^2 = (\Delta v_S^2 + \Delta v_C^2) / v^2.$$

Таким образом, для данного варианта измерений параметров разносторонности резонатора можно сделать следующие утверждения (справедливые и для других рассматриваемых ниже случаев). Во-первых, погрешности полученных зависимостей (8) будут пропорциональны погрешностям измерения амплитуд  $a_A$  и погрешностям вычисления скоростей их изменения. Во-вторых, измерение амплитуд  $a_A$  можно выполнять несколькими методами в зависимости от выбранной схемы обработки измерительных сигналов. В-третьих, особое значение здесь имеет точность расчета скоростей измерения амплитуд  $a_A$ , для чего рекомендуется применять промежуточную аппроксимацию  $a_A$  специальными плавными функциями с их последующим аналитическим дифференцированием.

В качестве второго важного частного случая рассмотрим задачу измерения только параметров разносторонности резонатора при известных его диссипативных характеристиках. Также заметим, что на операциях внутреннего контроля пока еще плохо обработанных заготовок резонаторов вкладом разносторонности иногда можно пренебречь по сравнению со вкладом разносторонности, полагая  $\Delta Q \approx 0$ .

В такой постановке задачи из уравнений (1) видно, что определяющую роль при идентификации разносторонности резонатора уже будут играть амплитуда квадратурной волны  $a_B$  и скорость ее изменения (ранее в задаче идентифика-

ции вязкостных свойств эту роль играла амплитуда  $a_A$  рабочей волны  $A$ ).

Здесь базовая модель идентификации (1) преобразуется в следующую:

$$\begin{aligned} \Delta\omega_C \cdot (a_B \sin 4\theta_A) - \Delta\omega_S \cdot (a_B \cos 4\theta_A) = \Phi_{Av}, \\ -\Delta\omega_C \cdot (a_A \sin 4\theta_A) + \Delta\omega_S \cdot (a_A \cos 4\theta_A) = \Phi_{Bv}; \\ \Phi_{Av} \equiv -\dot{a}_A - v \cdot a_A - \Delta v_C \cdot (a_A \cos 4\theta_A) - \\ - \Delta v_S \cdot (a_A \sin 4\theta_A), \\ \Phi_{Bv} \equiv -\dot{a}_B - v \cdot a_B + \Delta v_C \cdot (a_B \cos 4\theta_A) + \\ + \Delta v_S \cdot (a_B \sin 4\theta_A), \end{aligned} \quad (9)$$

где параметры вязкости  $v, \Delta v_C, \Delta v_S$  считаются уже известными, причем можно положить  $\Delta v_C \approx 0, \Delta v_S \approx 0$  для случаев малой разносторонности.

Дальнейшие рассуждения будут аналогичны предыдущему случаю. Так, если методика контроля построена на проведении длительных наблюдений (например, до получаса) за свободными колебаниями резонаторов, тогда поставленную здесь идентификационную задачу можно решать через минимизацию функционала квадратичной ошибки на длительном интервале одного выбега колебательной картины:

$$\begin{aligned} J = < [\Delta\omega_C \cdot (a_B \sin 4\theta_A) - \\ - \Delta\omega_S \cdot (a_B \cos 4\theta_A) - \Phi_{Av}]^2 + \\ + [-\Delta\omega_C \cdot (a_A \sin 4\theta_A) + \Delta\omega_S \cdot (a_A \cos 4\theta_A) - \\ - \Phi_{Bv}]^2 > \Rightarrow \min(\Delta\omega_C, \Delta\omega_S). \end{aligned} \quad (10)$$

После дифференцирования (10) по искомым параметрам и приравнивания нулю результатов получим систему из двух линейных алгебраических уравнений (ее выписывать не будем из-за очевидности). Из решения последних вычисляются искомые характеристики разносторонности:

$$\begin{aligned} \Delta\omega_C \equiv \Delta\omega \cos 4\theta_{\omega}, \Delta\omega_S \equiv \Delta\omega \sin 4\theta_{\omega} \Rightarrow \\ \Rightarrow \operatorname{tg} 4\theta_{\omega} = \Delta\omega_S / \Delta\omega_C, \\ \Delta\omega^2 = \Delta\omega_S^2 + \Delta\omega_C^2. \end{aligned} \quad (11)$$

При этом, как и ранее, полный функционал (10) лучше всего формировать на подынтервалах сбалансированности вкладов двух его квадратичных слагаемых, что может наступить только после прохождения некоторого времени развития квадратурной волны с момента начала свободного выбега. Альтернативная методика измерений параметров разносторонности использует два достаточно коротких интервала наблюдения – на двух запусках свободных колебаний из разных угловых положений. На начальных этапах запуска из-за неразвитости квадратурной волны будем иметь  $a_B/a_A \rightarrow 0$ . Поэтому в (9) лучше оставить только второе уравнение:

$$\Delta\omega_C \cdot (a_A \sin 4\theta_A) - \Delta\omega_S \cdot (a_A \cos 4\theta_A) \approx (\dot{a}_B + v \cdot a_B). \quad (12)$$

Заметим, что, несмотря на выполнение условия  $a_B/a_A \rightarrow 0$ , скорость изменения амплитуды квадратурной волны может быть значительной. В качестве грубой оценки для высокодобротных резонаторов можно принять:

$$a_A^2 + a_B^2 = a_p^2 + a_q^2 \sim \text{const} \Rightarrow \Rightarrow \dot{a}_B \sim -\dot{a}_A \cdot (a_A/a_B). \quad (13)$$

Решение такой задачи идентификации параметров разночастотности на основе уравнений (12) будет повторять логику решения задачи идентификации параметров разнороботности (5)–(8). Так как здесь идентифицируются только два параметра  $\Delta\omega_C, \Delta\omega_S$ , поэтому достаточно провести измерения для двух выбегов:  $\theta_{A1} = \theta_{A0}$ ,  $\theta_{A2} = \theta_{A0} + \Delta\theta$ . Например, выбирая  $\theta_{A1} = 0$ ,  $\theta_{A2} = \pi/8$ , получим:

$$\Delta\omega_S \approx -\frac{\dot{a}_{B1}}{a_{A1}}, \quad \Delta\omega_C \approx \frac{\dot{a}_{B2}}{a_{A2}}. \quad (14)$$

$$\text{tg}4\theta_\omega = \Delta\omega_S / \Delta\omega_C, \quad \Delta\omega^2 = \Delta\omega_S^2 + \Delta\omega_C^2,$$

где требуется высокая точность нахождения  $a_B$ , так как с учетом (13):

$$\dot{a}_B/a_A \sim -(\dot{a}_A/a_B).$$

В качестве третьего случая рассмотрим обобщающую предыдущие два случая задачу одновременного измерения характеристик разночастотности и разнороботности резонаторов через идентификацию рассмотренных ранее колебательно-диссипативных величин  $v, \Delta v_C, \Delta v_S, \Delta\omega_C, \Delta\omega_S$ .

При этом потребуется использовать полную исходную модель (1), а задача идентификации сведется к следующей:

$$\begin{aligned} J = & \langle [\dot{a}_A + v \cdot a_A + \Delta v_C \cdot (a_A \cos 4\theta_A) + \\ & + \Delta v_S \cdot (a_A \sin 4\theta_A) + \\ & + \Delta\omega_C \cdot (a_B \sin 4\theta_A) - \Delta\omega_S \cdot (a_B \cos 4\theta_A)]^2 \rangle + \\ & \langle [\dot{a}_B + v \cdot a_B - \Delta v_C \cdot (a_B \cos 4\theta_A) - \\ & - \Delta v_S \cdot (a_B \sin 4\theta_A) - \\ & - \Delta\omega_C \cdot (a_A \sin 4\theta_A) + \Delta\omega_S \cdot (a_A \cos 4\theta_A)]^2 \rangle \Rightarrow \\ & \Rightarrow \min(v, \Delta v_C, \Delta v_S, \Delta\omega_C, \Delta\omega_S). \quad (15) \end{aligned}$$

Из ее решения на длительном интервале наблюдения будем иметь уже систему из пяти линейных алгебраических уравнений (не выписываем из-за громоздкости).

Как и ранее заметим, что при необходимости улучшения численной обусловленности задачи (15), а также для уменьшения влияния шумов измерений на ее решение можно заменить кри-

терий в (15) на сумму аналогичных критериев, сформированных уже для нескольких разных точек начального выбега колебательной картины (например, равномерно распределенных в угловом интервале  $0 \leq 4\theta_A \leq 2\pi$ ; при этом суммарное время наблюдения кратно увеличится).

Также повторим, что для значительного уменьшения влияние шумов измерений на решение идентификационной задачи (15) следует выбирать достаточно длительные интервалы наблюдения слабозатухающих свободных колебаний (до получаса, а иногда и более для высокодобротных резонаторов – до тех пор, пока квадратурная волна не получит свое полное развитие, уравновесив свое влияние в функционале (15)).

В альтернативных ускоренных процедурах контроля, когда функционал в (15) усредняется только на нескольких более коротких начальных этапах выбега колебательной картины (например, когда интервал  $T$  времени усреднения выбирается не более нескольких минут), можно попробовать упростить (15), пренебрегая вкладом малых величин  $a_B/a_A \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} J = & \langle [\dot{a}_A + v \cdot a_A + \Delta v_C \cdot (a_A \cos 4\theta_A) + \\ & + \Delta v_S \cdot (a_A \sin 4\theta_A)]^2 \rangle + \\ & \langle [\dot{a}_B - \Delta\omega_C \cdot (a_A \sin 4\theta_A) + \\ & + \Delta\omega_S \cdot (a_A \cos 4\theta_A)]^2 \rangle \Rightarrow \\ & \Rightarrow \min(v, \Delta v_C, \Delta v_S, \Delta\omega_C, \Delta\omega_S). \quad (16) \end{aligned}$$

Получившаяся независимость входящих в (16) двух квадратичных слагаемых позволяет приближенно рассматривать их независимо. Поэтому здесь идентификацию характеристик разночастотности и разнороботности можно попробовать выполнять итерационно с поочередным их уточнением, используя модели двух предыдущих случаев.

Для этого будет достаточно выбирать ранее рассмотренные три угловые положения измерений свободного выбега колебательной картины:  $\theta_{A1} = 0$ ,  $\theta_{A2} = \pi/8$ ,  $\theta_{A3} = -\pi/8$ . В то же время при решении аналогичной задачи в более полной постановке (15) наименьшим числом точек начального выбега колебательной картины потребуются уже пять отличающихся по  $\theta_A$  точек (например, равномерно распределенных с шагом  $\Delta\theta = (\pi/2)/6 = \pi/12$ ; причем они уже не будут согласованы с расположением электродов возбуждения ТВГ). Заметим также, что при выборе временных интервалов усреднения в задачах (15) или (16) полезно учитывать меру изменчивости входящих в них функций. Это косвенно можно оценить через скорость углового дрейфа нулевого сигнала, которая для небольших  $a_B$  описывается зависимостями:

$$2\dot{\theta}_A \approx D_{\dot{\theta}_v} + D_{\dot{\theta}_\omega}, D_{\dot{\theta}_v} \approx v\delta\mu \sin 4(\theta_A - \theta_\mu),$$

$$D_{\dot{\theta}_\omega} \approx -2\Delta\omega \cos 4(\theta_A - \theta_\omega) \cdot \begin{pmatrix} a_B \\ a_A \end{pmatrix}.$$

## 2. Выбор математических алгоритмов обработки первичной информации для идентификации точностных механических характеристик резонаторов

Из приведенных алгоритмов идентификации точностных механических характеристик резонаторов видно, что их точность будет определяться точностью измерения медленно меняющихся амплитуд ( $a_A, a_B$ ) рабочей и квадратурной стоячих волн.

В свою очередь, первичной информацией для их нахождения являются сигналы  $S_C(t)$  и  $S_D(t)$ , измеряемые с шумами  $\varepsilon_{CиD}$ :

$$S_C(t) = C(t) + \varepsilon_C, S_D(t) = D(t) + \varepsilon_D, \quad (17)$$

которые снимаются с высокой частотой АЦП в приборных осях ( $x, y$ ) гироскопа в измерительном устройстве емкостного типа на переменном токе.

При этом измеряемые сигналы ( $C, D$ ), резонансные переменные ( $p, q$ ) и результирующие колебания ( $A, B$ ) оказываются взаимосвязанными через функцию деформации кромки резонатора гироскопа:

$$\begin{aligned} W(\theta, t) &= p(t) \cdot \cos 2(\theta - \theta_\omega) + q(t) \cdot \sin 2(\theta - \theta_\omega) = \\ &= C(t) \cos 2\theta + D(t) \sin 2\theta = A(t) \cdot \cos 2(\theta - \theta_A(t)) + \\ &\quad + B(t) \cdot \sin 2(\theta - \theta_A(t)); \\ C &= p \cos 2\theta_\omega - q \sin 2\theta_\omega = \\ &= A \cos 2\theta_A - B \sin 2\theta_A, \quad (18) \\ D &= p \sin 2\theta_\omega + q \cos 2\theta_\omega = \\ &= A \sin 2\theta_A + B \cos 2\theta_A, \end{aligned}$$

где  $p(t) = a_p(t) \cos \varphi_p(t)$ ,  $q(t) = a_q(t) \cos \varphi_q(t)$ ;  $\varphi_p(t) = \varphi_q(t) + \Delta\varphi_{pq}(t)$ ,  $\varphi_p(t) \equiv \omega_p t - \varphi_{p0}$ ,  $\varphi_q(t) \equiv \omega_q t - \varphi_{q0}$ ;  $\Delta\varphi_{pq}(t) = \varphi_p(t) - \varphi_q(t) = \Delta\omega_{pq}t - \Delta\varphi_{pq0}$ ; ( $a_p, a_q$ ) – амплитуды колебаний ( $\geq 0$ ); ( $\varphi_{p0}, \varphi_{q0}$ ) – некоторые начальные фазы;  $\Delta\varphi_{pq0} \equiv \varphi_{p0} - \varphi_{q0} = \text{const}$  – начальная разнофазность;  $\Delta\omega_{pq} \equiv \omega_p - \omega_q = \text{const}$  – величина разночастотности;

$$\begin{aligned} A(t) &= a_A(t) \cos \varphi_A(t), B(t) = \\ &= a_B(t) \sin \varphi_A(t); \varphi_A(t) \equiv \omega(t) \cdot t - \alpha(t); \end{aligned}$$

$\alpha(t)$  – медленно изменяемая фаза стоячих волн; частоты  $\omega(t)$  стоячих волн ( $A, B$ ) совпадают;  $a_A$  – положительная амплитуда рабочей волны;  $a_B$  – амплитудная функция (может быть как положительной, так и отрицательной) квадратурной волны;

$$\begin{aligned} C(t) &= a_C(t) \cos [\omega(t) \cdot t - \varphi_C(t)], D(t) = \\ &= a_D(t) \cos [\omega(t) \cdot t - \varphi_D(t)], \end{aligned}$$

$a_C(t), a_D(t)$  и  $\varphi_C(t), \varphi_D(t)$  – медленно изменяющиеся амплитудные функции (в приведенной модели могут иметь произвольный знак) и фазы.

Выделение из измеряемых гармонических сигналов (17) медленно изменяемых амплитуд  $a_C(t), a_D(t)$  для уменьшения влияния шумов измерения в (17) выполняется через операции усреднения на порядки большем интервале дискретизации  $T_a \gg T_{\text{АЦП}}$  по сравнению с периодичностью АЦП (но и одновременно на порядки меньшем по сравнению с  $T \gg T_a$  в (15)).

На практике величину  $T_a$  можно определять через решение вспомогательной задачи аппроксимации амплитуд  $a_C(t), a_D(t)$  линейными функциями. Условием окончания увеличения  $T_a$  может стать требование, чтобы перепад получаемых линейных функций на границах интервала не превышал, например, 5 % по сравнению со средними значениями.

Уменьшив таким образом влияние шумов измерения в (17) на медленно изменяемые амплитуды и фазы соответствующих измеряемых гармонических сигналов, на основании соотношений (18) можно получить следующие связи для других медленно изменяемых сигналов в режиме свободных колебаний неподвижного резонатора:

$$\begin{aligned} \text{tg } 4\theta_A &= 2 a_C a_D \cos \Delta\varphi_{CD} / (a_C^2 - a_D^2); \\ a_A a_B &= a_D a_C \sin \Delta\varphi_{CD}; \\ a_A^2 &= a_C^2 \cos^2 2\theta_A + a_D^2 \sin^2 2\theta_A + \\ &\quad + a_C a_D \cos \Delta\varphi_{CD} \sin 4\theta_A, \quad (19) \\ a_B^2 &= a_C^2 \sin^2 2\theta_A + a_D^2 \cos^2 2\theta_A - \\ &\quad - a_C a_D \cos \Delta\varphi_{CD} \sin 4\theta_A; \\ \text{tg } 4(\theta_A - \theta_\omega) &= 2 a_p a_q \cos \Delta\varphi_{pq} / (a_p^2 - a_q^2); \\ a_A a_B &= a_p a_q \sin \Delta\varphi_{pq}, \\ a_A^2 &= a_p^2 \cos^2 \Psi + a_q^2 \sin^2 \Psi + \\ &\quad + a_p a_q \cos \Delta\varphi_{pq} \sin 2\Psi, \\ a_B^2 &= a_p^2 \sin^2 \Psi + a_q^2 \cos^2 \Psi - a_p a_q \cos \Delta\varphi_{pq} \sin 2\Psi, \end{aligned}$$

где  $\Delta\varphi_{CD} \equiv \varphi_C - \varphi_D$ ;  $\Delta\varphi_{pq}(t) \approx \Delta\omega_{pq}t$  – в режиме свободных колебаний.

Применительно к разным схемам обработки первичной информации  $C(t), D(t)$  в измерительном устройстве (с учетом особенностей его конструктивной реализации) варианты выделения медленно изменяющихся во времени характеристик  $\{\theta_A(t), a_A(t), a_B(t), \alpha(t), \omega(t)\}$  стоячих волн с дискретностью  $T_a$  по результатам измерений (17) проанализированы в упоминаемых ранее статьях авторов.

В них показано, что на имеющих место для свободных колебаний достаточно длинных интервалах  $T_a$  дискретизации измерений  $\{a_A(t), a_B(t)\}$  (превышающих десять периодов колебаний резонатора) не требуется специальный режим синхронизации тактов АЦП с тактами  $T_a$  расчета медленных переменных.

Также не требуется и применение усложненных алгоритмов расчета, реализованных без учета такой синхронизации.

В результате на основе (19) для решения рассматриваемых задач могут быть использованы следующие относительно простые алгоритмы преобразования усредненных на периодах  $T_a$  исходных сигналов (17) в искомые медленные переменные стоячих волн:

$$\begin{aligned} 1) a_B \approx 0; a_A &\approx [a_C^2 + a_D^2]^{1/2}; \operatorname{tg} 2\theta_A \approx a_D / a_C; \\ 2) E^2 &\equiv a_C^2 + a_D^2 + 2a_D a_C \sin \Delta\varphi_{CD}, F^2 \equiv \\ &\equiv a_C^2 + a_D^2 - 2a_D a_C \sin \Delta\varphi_{CD}; \\ a_A &= (E + F) / 2, a_B = (E - F) / 2; \\ \operatorname{tg} 4\theta_A &= 2 a_C a_D \cos \Delta\varphi_{CD} / (a_C^2 - a_D^2); \\ 3) \operatorname{tg} 4\theta_A &= 2 a_C a_D \cos \Delta\varphi_{CD} / (a_C^2 - a_D^2); \\ &(\operatorname{tg} 2\theta_A \approx a_D / a_C); \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} S_A &= S_C \cos 2\theta_A + S_D \sin 2\theta_A, \\ S_B &= -S_C \sin 2\theta_A + S_D \cos 2\theta_A; \\ a_A^2 &\approx 2 \langle S_A^2 \rangle_a, a_B^2 \approx 2 \langle S_B^2 \rangle_a; \end{aligned}$$

$$4) C_x = 2 \langle S_C(\tau) \cos(\tau) \rangle_a, C_y = 2 \langle S_D(\tau) \cos(\tau) \rangle_a, \tau \equiv \omega t - \alpha;$$

$$\begin{aligned} S_x &= 2 \langle S_C(\tau) \sin(\tau) \rangle_a, S_y = 2 \langle S_D(\tau) \sin(\tau) \rangle_a; \\ E &= S_x^2 + C_x^2 + S_y^2 + C_y^2; Q \equiv 2 (S_y C_x - S_x C_y); \\ a_A + a_B &= (E + Q)^{1/2}, a_A - a_B = \\ &= (E - Q)^{1/2} \Rightarrow (a_A, a_B). \end{aligned}$$

$\operatorname{tg} 4\theta_A = 2 (S_x S_y + C_x C_y) / (S_x^2 + C_x^2 - S_y^2 - C_y^2)$ , где  $a_C^2 \approx 2 \langle S_C^2 \rangle_a$ ,  $a_D^2 \approx 2 \langle S_D^2 \rangle_a$ ;  $a_C a_D \cos \Delta\varphi_{CD} \approx 2 \langle S_C S_D \rangle_a$ ; усреднение выполняется по интервалам  $T_a$ .

Перечисленные алгоритмы (20), соответственно, были названы: 1) алгоритм обработки результатов измерений без учета влияния квадратурной волны; 2) алгоритм обработки результатов измерений с учетом фазового сдвига сигналов измерительного устройства; 3) алгоритм обработки результатов измерений с переходом к подвижным осям стоячих волн (А, В); 4) алгоритм обработки результатов измерений с использованием процедур цифровой демодуляции.

### 3. Анализ влияния погрешности измерительной информации на ошибки идентификации точностных механических характеристик резонаторов

Наиболее грубый алгоритм 1, ограниченный измерением только амплитуды рабочей волны  $a_A$  в условиях малости амплитуды квадратурной волны ( $a_B / a_A \approx 0$ ), может быть иногда использован для алгоритма идентификации (8). Но он позволяет наиболее просто аналитически понять влияние шумов измерений в (17) на величину рассчитываемой амплитуды:

$$\begin{aligned} a_A &\approx [a_C^2 + a_D^2]^{1/2} \approx [2 \langle S_C^2 \rangle_a + 2 \langle S_D^2 \rangle_a]^{1/2}; \\ S_C &= C + \varepsilon_C, S_D = D + \varepsilon_D. \end{aligned} \quad (21)$$

Похоже выполнить оценку влияния шумов измерений в (17) на результаты одновременного восстановления амплитуд рабочей и квадратурной стоячих волн ( $a_A, a_B$ ) позволяет и третий алгоритм в (20). В нем сначала рассчитывается угол  $\theta_A$ , который относительно слабо зависит от величины  $a_B(t)$  и от шумов измерений. Далее выполняется преобразование измерительных сигналов (17) в условные сигналы стоячих волн:

$$\begin{aligned} S_A &= A(t) + \varepsilon_A(t), S_B = B(t) + \varepsilon_B(t); \\ \varepsilon_A &= \varepsilon_C \cos 2\theta_A + \varepsilon_D \sin 2\theta_A, \varepsilon_B = \\ &= -\varepsilon_C \sin 2\theta_A + \varepsilon_D \cos 2\theta_A; \end{aligned} \quad (22)$$

из которых выделяются амплитуды  $a_A$  и  $a_B$  аналогично (21):

$$a_A^2 \approx 2 \langle S_A^2 \rangle_a, a_B^2 \approx 2 \langle S_B^2 \rangle_a.$$

Из (21), (22) видно, что уровень шумов при определении амплитуд ( $a_A, a_B$ ) будет сравним с шумами измерительных сигналов (17). Для представления более точных оценок для всех четырех алгоритмов (20) приведем результаты численных расчетов.

В них для определенности были выбраны безразмерные значения амплитуд:  $a_A = 2, a_B = 0,1$ ; угол стоячей волны  $\theta_A = \pi / 6$ ; частоты колебаний  $\omega / 2\pi = 5332$  Гц; частота АЦП =  $10^5$  (примерно 19 точек на период колебаний резонатора). Для наилучшего случая интервал  $T_a$  расчета медленных амплитуд выбирался предельно малым – приближенно равным одному периоду резонансных колебаний.

Исходные сигналы для алгоритмов (20) формировались по следующей схеме: по выписанным данным сначала задавались функции:  $A(t) = a_A \cos \omega t, B(t) = a_B \sin \omega t$ , далее они преобразовывались в  $C(t) = A \cos 2\theta_A - B \sin 2\theta_A, D(t) = A \sin 2\theta_A + B \cos 2\theta_A$ , которые уже подставлялись в (17).

Приведенные на рис. 1, 2 результаты для рассчитанных ошибок амплитуд соответственно рабочей и квадратурной стоячих волн соответствуют средним значениям после обработки 100000 независимых выборок. Номера графиков 1–4 указывают на соответствующий алгоритм в (20). На рисунке по горизонтальной оси отложен уровень (в %) среднеквадратичного отклонения шумовых составляющих в (17), который возрастал до 20 % от максимальных амплитуд сигналов (они были примерно равны основной амплитуде  $a_A$ ). По вертикали соответственно отложены получившиеся ошибки рассчитанных алгоритмами (20) амплитуд рабочей (рис. 1) и квадратурной (рис. 2) стоячих волн (для случая выбранных значений:  $a_A = 2, a_B = 0,1$ ). При этом график 1 на рис. 2 нарисован условно, показывая отличие принятого первым ал-

горитмом значения  $a_B = 0$  от выбранного для моделирования  $a_B = 0,1$ .

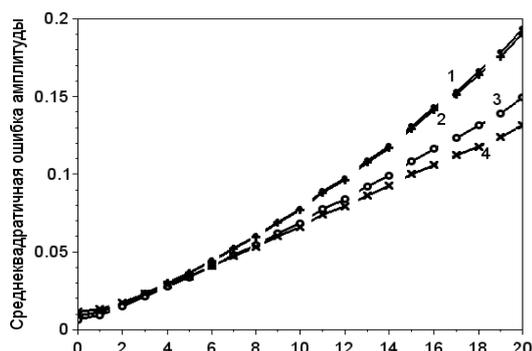


Рис. 1. Зависимости ошибок восстановления амплитуд рабочей стоячей волны от уровня шумов измерительных сигналов (СКО в %) при  $a_A = 2$

Fig. 1. Dependences of the errors in restoring the amplitudes of the working standing wave on the noise level of the measuring signals (RMS in %) at  $a_A = 2$

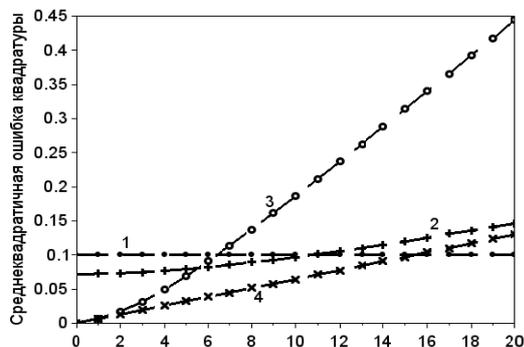


Рис. 2. Зависимости ошибок восстановления амплитуд квадратурной стоячей волны от уровня шумов измерительных сигналов (СКО в %) при  $a_B = 0,1$

Fig. 2. Dependences of the errors in restoring the amplitudes of a quadrature standing wave on the noise level

Видно, что приведенные аналитические зависимости и дополняющие их численные результаты для измерений на одном периоде колебаний резонатора показывают малое изменение уровней шумов измерительных сигналов (17) при их переносе на амплитуды стоячих волн ( $a_A, a_B$ ), выступающих в качестве исходной информации при решении задач идентификации точностных механических характеристик резонаторов.

Так как для случая свободных колебаний резонатора ТВГ интервал  $T_a$  условного постоянства амплитуд ( $a_A, a_B$ ) на порядки превышает выбранный на рисунках период одного колебания, поэтому получаемые результаты можно дополнительно усреднять, значительно уменьшая тем самым вклад шумов измерений (17).

Теперь перейдем к анализу влияния ошибок амплитуд ( $a_A, a_B$ ) на точность идентификации параметров добротности и резонансной частоты

резонаторов ТВГ. Сначала рассмотрим ранее приведенный алгоритм измерения добротности (8). Для нахождения его чувствительности к погрешностям входящих величин вычислим соответствующие дифференциалы ( $d$ ), где мультипликативные слагаемые предварительно прологарифмируем ( $\ln$ ). Получим:

$$2dv = -d\left(\frac{\dot{a}_{A2}}{a_{A2}}\right) - d\left(\frac{\dot{a}_{A3}}{a_{A3}}\right),$$

$$2d(\Delta v_S) = d\left(\frac{\dot{a}_{A2}}{a_{A2}}\right) - d\left(\frac{\dot{a}_{A3}}{a_{A3}}\right),$$

$$d(\Delta v_C) = -d\left(\frac{\dot{a}_{A1}}{a_{A1}}\right) - dv, 8d\theta_\mu =$$

$$= \sin 8\theta_\mu \left( \frac{d\Delta v_S}{\Delta v_S} - \frac{d\Delta v_C}{\Delta v_C} \right),$$

$$\frac{d\delta\mu}{\delta\mu} = \frac{d\Delta v}{\Delta v} - \frac{dv}{v}, d\Delta v =$$

$$= \frac{(\Delta v_S d\Delta v_S + \Delta v_C dv_C)}{\Delta v},$$

$$\text{где } d\left(\frac{\dot{a}_{Ai}}{a_{Ai}}\right) = \left(\frac{\dot{a}_{Ai}}{a_{Ai}}\right) \left[ \frac{d\dot{a}_{Ai}}{\dot{a}_{Ai}} - \frac{da_{Ai}}{a_{Ai}} \right], i = 1, 2, 3;$$

$\Delta v = 4v\delta\mu$  – величина разновязкости.

Аналогичные выкладки можно привести и для еще более простого алгоритма (14) идентификации параметров резонансной частоты:

$$\frac{d\Delta\omega_S}{\Delta\omega_S} = \frac{d\dot{a}_{B1}}{\dot{a}_{B1}} - \frac{da_{A1}}{a_{A1}}, \frac{d\Delta\omega_C}{\Delta\omega_C} = \frac{d\dot{a}_{B2}}{\dot{a}_{B2}} - \frac{da_{A2}}{a_{A2}},$$

$$8d\theta_\omega = \sin 8\theta_\omega \left( \frac{d\Delta\omega_S}{\Delta\omega_S} - \frac{d\Delta\omega_C}{\Delta\omega_C} \right),$$

$$d\Delta\omega = \frac{(\Delta\omega_S d\Delta\omega_S + \Delta\omega_C d\Delta\omega_C)}{\Delta\omega}.$$

При этом для обобщающих алгоритмов типа (15), (16) приводить громоздкие вычисления не будем.

Из выписанных соотношений, показывающих влияние малых погрешностей расчета амплитуд ( $a_A, a_B$ ) на точность идентификации параметров добротности и резонансной частоты резонаторов, видно, что потенциальной угрозой понижения точности алгоритмов (8), (14) являются соответственно точность численного расчета скорости изменения амплитуд  $\dot{a}_A, \dot{a}_B$  рабочей и квадратурной волн (по их рассчитанным алгоритмами (20) значениям).

При этом в соответствии с (13) следует ожидать значительно большую изменчивость скорости  $\dot{a}_B$ :

$$\dot{a}_B/a_A \sim -(\dot{a}_A/a_B).$$

Поэтому в заключение отметим две возможности повышения точности расчета этих скоростей  $\dot{a}_A, \dot{a}_B$  в условиях шумов измерений (17).

В качестве первого варианта можно применить предварительное решение следующей вспомогательной задачи. Известно, что в рассматриваемых режимах свободного выбега колебательной картины функции изменения амплитуд ( $a_A, a_B$ ) должны быть очень плавными. Поэтому на расширенном интервале времени  $T_v > T_a$  (например, соответствующем угловому уходу рабочей стоячей волны  $\Delta\theta_A < \pi/8$ ) их можно аппроксимировать параболическими функциями, которые потом аналитически уже дифференцируются.

При этом неизвестные три коэффициента параболических функций вычисляются через минимизацию квадратичной ошибки аппроксимации рассчитываемых по формулам (20) функций  $\{a_A(t), a_B(t)\}$ .

Во втором варианте выписанные решения (8) и (14) хорошо обусловленных вычислительных схем принимаются за начальные приближения. После этого градиентным методом оптимизации функционала (15) выполняется уточнение найденных параметров резонантности и разностотности с использованием наблюдения на длительных интервалах  $T$ . В рамках решения такой задачи (на длительных интервалах  $T$ ) одновременно будут выполняться и усреднения ошибок измерений входных функций, а также их влияния на результаты численного дифференцирования функций  $\{a_A(t), a_B(t)\}$ .

#### Заключение

Таким образом, в статье проведен общий анализ условий эффективного применения алгоритмов измерения точностных механических характеристик резонаторов интегрирующих твердотельных волновых гироскопов, к которым отнесены значения параметров остаточных разностотности и резонантности резонаторов. Рассмотренные алгоритмы измерения реализуются через стандартные вычислительные процедуры идентификации коэффициентов дифференциальных уравнений свободных колебаний резонаторов.

В качестве базовой модели идентификации выбраны уравнения колебаний резонатора, записанные для медленно изменяющихся амплитуд в осях расположения рабочей и квадратурной стоячих волн. Считается, что исходные сигналы для первичной обработки информации формируются в измерительном устройстве, аналогичном штатному устройству интегрирующего твердотельного волнового гироскопа.

Обсуждены особенности задач идентификации параметров остаточных разностотности и разностотности резонаторов как по отдельности, так и одновременно. В результате предложены вычислительно хорошо обусловленные постановки обратных задач идентификации, не требующие дополнительной регуляризации.

Для них обоснованно выбраны математические алгоритмы подготовки первичной информации для постановки и эффективного решения задач идентификации точностных механических характеристик резонаторов.

Показано влияние ошибок амплитуд рабочей и квадратурной стоячих волн на точность идентификации параметров резонантности и разностотности резонаторов ТВГ. Дополнительно обсуждены возможности повышения точности расчета скоростей изменения этих амплитуд в условиях шумов измерений.

Выявленные точностные условия применения алгоритмов идентификации параметров остаточных разностотности и разностотности резонаторов гироскопов через нахождение коэффициентов дифференциальных уравнений их свободных колебаний позволяют повысить эффективность настройки методик производственного контроля.

#### Библиографические ссылки

1. Климов Д. М., Журавлев В. Ф., Жбанов Ю. К. Кварцевый полусферический резонатор (Волновой твердотельный гироскоп). М.: Ким Л. А., 2017. 194 с.
2. Пешехонов В. Г. Перспективы развития гироскопии // Гироскопия и навигация. 2020. Т. 28, № 2 (109). С. 3–10.
3. Волновые твердотельные гироскопы: обзор публикаций / А. А. Маслов, Д. А. Маслов, И. Г. Ниналаев, И. В. Меркурьев // Гироскопия и навигация. 2023. Т. 31, № 1 (120). С. 3–25.
4. Zhuravlev V.Ph., Pereblyayev S.E. Current state and scientific and technological forecast of a revolutionary breakthrough in wave solid-state gyroscope technology // Information Innovative Technologies. Materials of the International scientific - practical conference. Prague, 2020. P. 113-119.
5. Лукин Б. С., Матвеев В. А., Басараб М. А. Волновой твердотельный гироскоп. Теория и технологии. М.: Радиотехника, 2014. 176 с.
6. Asadian M. H., Wang Y., Shkel A. M. Development of 3D Fused Quartz Hemi-Toroidal Shells for High-Q Resonators and Gyroscopes // IEEE/ASME J. of Microelectromechanical Systems. 2019. Vol. 28, no. 6. P. 1380–1383.
7. Переляев С. Е., Бодунов С. Б., Бодунов Б. П. Волновой твердотельный гироскоп авиационно-космического применения навигационного класса точности // XXIX Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигацион-

ным системам : сборник материалов конференции. СПб., 2022. С. 185–188.

8. Скрипкин А. А., Переляев С. Е. К вопросу оптимизации конструкции пространственного интегрирующего волнового твердотельного гироскопа // XXX Юбилейная Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам : сборник материалов конференции. СПб., 2023. С. 263–264.

9. Оптимизация управления твердотельным волновым гироскопом / А. В. Бонштедт, С. В. Кузьмин, П. К. Мачехин, Е. Л. Тонков // Вестник Удмуртского университета. Математика, 2005. № 1. С. 189–214.

10. Трутнев Г. А., Назаров С. Б., Перевозчиков К. К. Система съема и способы измерения колебаний резонатора твердотельного волнового гироскопа // Вестник МГТУ. Сер. Приборостроение. 2020. № 1 (130). С. 20–63.

11. Определение параметров резонатора твердотельного волнового гироскопа и моделирование по экспериментальным данным / А. В. Кривов, Р. В. Мельников, Ф. И. Спиридонов, Г. А. Трутнев // Вестник Казанского государственного технического университета им. А. Н. Туполева. 2019. № 2, вып. 1. С. 22.

12. Щеняцкий А. В., Котельников М. А., Башарова А. А. Влияние конструктивных параметров чувствительного элемента на технические характеристики ТВГ // Вестник ПНИПУ. Машиностроение, материаловедение. 2017. Т. 19, № 2. С. 92–105.

13. Трутнев Г. А., Щеняцкий А. В. Вычислительная компонента ТВГ для измерительной компоненты на переменном напряжении // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2022. № 3 (140). С. 78–91.

14. Переляев С. Е. Обзор и анализ направлений создания бесплатформенных инерциальных навигационных систем на волновых твердотельных гироскопах // Новости навигации. 2018. № 2. С. 21–27.

15. Делэйе Ф. Бортовая инерциальная система координат SpaceNaute® для европейской ракеты-носителя «Ариан-6» на основе волнового твердотельного гироскопа // Гироскопия и навигация. 2018. Т. 26, № 4 (103). С. 3–13.

16. Расчет расщепления собственной частоты цилиндрического резонатора твердотельного волнового гироскопа на основе численного интегрирования высокой точности / О. С. Нарайкин, Ф. Д. Сорокин, А. М. Гуськов, С. А. Козубняк, Д. С. Вахлярский // Инженерный журнал: наука и инновации. 2019. № 5 (89). С. 4.

17. Лунин Б. С., Лопатин В. М. Поверхностное внутреннее трение в высокооборотных резонаторах из кварцевого стекла // Неорганические материалы. 2022. Т. 58, № 6. С. 658–665.

## References

1. Klimov D.M., Zhuravlev V.F., Zhanov Yu.K. *Kvartsevyi polusfericheskiy rezonator (Volnovoi tverdotel'nyi giroskop)* [Quartz hemispherical resonator (Wave solid-state gyroscope)]. Moscow, IKim L.A. Publ. 2017. 194 p. (in Russ.).

2. Peshekhonov V.G. [Prospects for the development of gyroscope]. *Giroskopiya i navigatsiya*. 2020. Vol. 28, no. 2. Pp. 3–10 (in Russ.).

3. Maslov A.A., Maslov D.A., Ninalalov I.G., Merkuriev I.V. [Wave solid-state gyros: a review of publications]. *Giroskopiya i navigatsiya*. 2023. Vol. 31, no. 1. Pp. 3–25 (in Russ.).

4. Zhuravlev V.Ph., Perelyaev S.E. Current state and scientific and technological forecast of a revolutionary breakthrough in wave solid-state gyroscope technology // Information Innovative Technologies. Materials of the International scientific - practical conference. Prague, 2020. P. 113–119.

5. Lunin B.S., Matveev V.A., Basarab M.A. *Volnovoi tverdotel'nyi giroskop. Teoriya i tekhnologii* [Wave solid state gyroscope. Theory and technology]. Moscow: Radiotekhnika Publ. 2014. 176 p. (in Russ.).

6. Asadian M.H., Wang Y., Shkel A.M. Development of 3D Fused Quartz Hemi-Toroidal Shells for High-Q Resonators and Gyroscopes // IEEE/ASME J. of Microelectromechanical Systems. 2019. Vol. 28, no. 6. Pp. 1380–1383.

7. Perelyaev S.E., Bodunov S.B., Bodunov B.P. *Volnovoi tverdotel'nyi giroskop aviatsionno-kosmicheskogo primeneniya navigatsionnogo klassa tochnosti* [Wave solid-state gyroscope of aerospace application of navigation class of accuracy]. *XXIX Sankt-Peterburgskaya mezhdunarodnaya konferentsiya po integrirovannym navigatsionnym sistemam : sbornik materialov konferentsii* [XXIX St. Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems. Collection of Conference Materials]. St. Petersburg, 2022. Pp. 185–188 (in Russ.).

8. Skripkin A.A., Perelyaev S.E. *K voprosu optimizatsii konstruksii prostranstvennogo integriruyushchego volnovogo tverdotel'nogo giroskopa* [On the issue of optimizing the design of a spatial integrating wave solid-state gyroscope]. *XXX Yubileynaya Sankt-Peterburgskaya mezhdunarodnaya konferentsiya po integrirovannym navigatsionnym sistemam : sbornik materialov konferentsii* [XXX Anniversary St. Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems. Collection of Conference Materials]. St. Petersburg, 2023. Pp. 263–264 (in Russ.).

9. Bonstedt A.V., Kuzmin S.V., Machekhin P.K., Tonkov E.L. [Optimization of solid-state wave gyroscope control]. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika*. 2005. No. 1. Pp. 189–214 (in Russ.).

10. Trutnev G.A., Nazarov S.B., Perevozchikov K.K. [Removal system and methods of measuring the oscillations of the resonator of a solid-state wave gyroscope]. *Vestnik MGTU. Ser. Priborostroenie*. 2020. No. 1. Pp. 20–63 (in Russ.).

11. Krivov A.V., Melnikov R.V., Spiridonov F.I., Trutnev G.A. [Determination of the parameters of the resonator of a solid-state wave gyroscope and modeling according to experimental data]. *Vestnik Kazanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. A. N. Tupoleva*. 2019. No. 2, issue 1, p. 22 (in Russ.).

12. Shchenyatsky A.V., Kotelnikov M.A., Basharova A.A. [Influence of constructive parameters of a sensi-

tive element on the technical characteristics of TVG]. *Vestnik PNIPU. Mashinostroenie, materialovedenie*. 2017. Vol. 19, no. 2. Pp. 92-105 (in Russ.).

13. Trutnev G.A., Shchenyatsky A.V. [Computational component of TVG for measuring component on variable voltage]. *Vestnik MGTU im. N. E. Baubana. Ser. Priborostroenie*. 2022. No. 3. Pp. 78-91 (in Russ.).

14. Perelyaev S. E. [Review and Analysis of the Directions of Creating Strapdown Inertial Navigation Systems on Wave Solid-State Gyroscopes]. *Novosti navigatsii*. 2018. No. 2. Pp. 21-27 (in Russ.).

15. Delaye F. [Space Naute® onboard inertial coordinate system for the European launch vehicle "Ariane-

6" based on the wave solid-state gyroscope]. *Giroskopiya i navigatsiya*. 2018. Vol. 26, no. 4. Pp. 3-13 (in Russ.).

16. Naraykin O.S., Sorokin F.D., Guskov A.M., Kozubnyak S.A., Vakhlyarsky D.S. [Calculation of natural frequency splitting of a cylindrical resonator of a solid-state wave gyroscope based on high-precision numerical integration]. *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii*. 2019. No. 5. P. 4 (in Russ.).

17. Lunin B.S., Lopatin V.M. [Surface Internal Friction in High-Quality Resonators of Quartz Glass]. *Neorganicheskie materialy*. 2022. Vol. 58, no. 6. Pp. 658-665 (in Russ.).

\* \* \*

### Condition Analysis for the Effective Use of Identification Algorithms of Solid-State Wave Gyroscope Resonator Mechanical Characteristic Accuracy

R. I. Mingazov, Post-graduate, Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk, Russia

K. V. Shishakov, DSc in Engineering, Professor, MIREA — Russian Technological University, Moscow, Russia

*The article is aimed at analyzing the conditions for the effective use of algorithms to measure the resonator mechanical characteristic accuracy of integrating solid-state wave gyroscopes, which include the residual values of the resonator frequency and quality parameters. At the same time, the main measurement modes are the free oscillation modes of the stationary gyroscope resonator.*

*The considered algorithms for measuring the residual values of the frequency and quality resonator parameters are implemented via standard computational procedures for identifying the differential equation coefficients of resonator-free oscillations. The resonator oscillation equations in the axes of the working and quadrature standing waves, recorded for their slowly changing amplitudes, were chosen as a basic identification model. Initial signals for the primary information preparation for identification tasks are generated in a measuring device similar to the standard one of an integrating solid-state wave gyroscope.*

*Various problem formulations to identify the parameters of residual different-quality and multi-frequency resonators both separately and simultaneously are discussed. As a result, well-conditioned computational schemes that do not require the introduction of additional regularization of inverse identification problems are proposed and analyzed.*

*These schemes are reasonably linked to mathematical algorithms for the primary information preparation for the identification problems to be solved, being formed in the form of arrays of intermediately calculated amplitudes of and quadrature standing waves at work. The effect of calculation errors these amplitudes on the accuracy of identification of the parameters of different-quality and multi-frequency resonators is shown. In addition, the possibilities of improving the accuracy of amplitude calculation under measurement noise are discussed.*

*The revealed accuracy conditions for the application of algorithms for identifying the parameters of residual different-quality and multi-frequency resonators of gyroscopes through finding the coefficients of differential equations and their free oscillations make it possible to increase the efficiency of setting up production control methods.*

**Keywords:** solid-state wave gyroscope, resonant oscillations, wave pattern, identification, free oscillations, oscillatory-dissipative characteristics, measurement techniques.

Получено: 16.07.24

#### Образец цитирования

Мингазов Р. И., Шишаков К. В. Анализ условий эффективного применения алгоритмов идентификации точностных механических характеристик резонаторов твердотельных волновых гироскопов // Интеллектуальные системы в производстве. 2024. Т. 22, № 4. С. 4–14. DOI: 10.22213/2410-9304-2024-4-4-14.

#### For Citation

Mingazov R.I., Shishakov K.V. [Analysis of the conditions for the effective use of identification algorithms accuracy mechanical characteristics of resonators solid-state wave gyroscopes]. *Intellektual'nye sistemy v proizvodstve*. 2024, vol. 22, no. 4, pp. 4-14 (in Russ.). DOI: 10.22213/2410-9304-2024-4-4-14.