

УДК 531.383
DOI: 10.22213/2410-9304-2025-2-11-27

Повышение скорости измерения остаточных разночастотности и разнодобротности резонаторов интегрирующих твердотельных волновых гироскопов в режимах вращения

Р. И. Мингазов, аспирант, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова, Ижевск, Россия

В. Н. Сяктерев, кандидат технических наук, доцент, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова, Ижевск, Россия

К. В. Шишаков, доктор технических наук, доцент, РТУ МИРЭА, Москва, Россия

Целью статьи является разработка и анализ эффективности вариантов методик и вычислительных алгоритмов для проведения ускоренного комплексного контроля остаточных значений параметров разночастотности и разнодобротности резонаторов интегрирующих твердотельных волновых гироскопов. Предлагается выполнять измерения в режимах свободных колебаний резонатора вращающегося гироскопа. Это позволит ускорить проведение производственного контроля таких характеристик при балансировке резонаторов, а также при конструктивной сборке гироскопов. Кроме того, они могут оказаться полезными при выполнении эксплуатационной диагностики и контроля сохранности выделенных характеристик в рамках синтеза комплексной системы активного повышения точности рассматриваемых гироскопов.

За основу исследуемых методик выбраны двухуровневые схемы идентификации характеристик свободных колебаний резонаторов гироскопов со взаимным согласованием вычислительных алгоритмов двух уровней. В них первый уровень идентификации представляет собой обработку сигналов измерительного устройства гироскопа с целью выявления медленно изменяемых функций амплитуд и углов стоячих волн. Далее на этой основе на втором уровне вычислительной схемы выполняется идентификация конструктивных параметров математической модели свободных колебаний резонатора гироскопа, через которые уже рассчитываются параметры разночастотности и разнодобротности резонаторов.

Поэтому в статье рассмотрены следующие вопросы: математические постановки задач двухуровневой идентификации точностных механических характеристик резонатора; варианты выбора продолжительности режима измерений точностных механических характеристик резонатора; влияние интервала наблюдения на математические схемы решения обратных задач идентификации точностных механических характеристик резонаторов в режимах вращающихся гироскопов; алгоритмическое обеспечение методик производственного контроля параметров остаточных разночастотности и разнодобротности резонаторов при вращении с постоянной скоростью или с помощью поворота гироскопа с произвольной угловой скоростью; исследование эффективности алгоритмов обработки первичной информации; оценка влияния алгоритмов обработки первичной информации на эффективность идентификации точностных механических характеристик резонаторов.

Ключевые слова: твердотельный волновой гироскоп, резонансные колебания, волновая картина, идентификация, свободные колебания, колебательно-диссипативные характеристики, алгоритмы измерения.

Введение

Современные производственные задачи проведения быстрого и эффективного контроля точностных механических характеристик резонаторов волновых твердотельных гироскопов неразрывно связаны с главной задачей совершенствования ТВГ – повышение точности их выходных сигналов [1–3] (далее чаще будем использовать аббревиатуру ТВГ выпускаемых серий гироскопов [4]). При этом желательно, чтобы одновременно уменьшалась и себестоимость их производства.

В этом отношении повышение простоты и скорости выполнения, а также частоты проведения контроля остаточных значений параметров разночастотности и разнодобротности резонаторов в процессе их изготовления и после-

дующей точностной балансировки, несомненно, имеет свою практическую актуальность [5–7]. Поэтому в настоящее время расширяется производственное использование комплексных методик одновременного контроля их остаточных значений с помощью идентификации коэффициентов математической модели свободных колебаний резонатора гироскопа [8–10].

Не менее важной практической задачей является регулярное периодическое проведение контроля сохранности параметров остаточных разночастотности и разнодобротности резонаторов ТВГ в процессе их эксплуатации с целью гарантированного обеспечения заявленной точности гироскопов. Так, например, возможное эксплуатационное перераспределение внутренних микронапряжений в конструкции собранного гиро-

скопа может приводить к изменению параметров разночастотности [11]. При этом также следует учитывать, что при наличии всегда щей место на практике малой остаточной разбалансированности конструкции резонатора будет дополнительно наблюдаться его упругое взаимодействие с остальной механической конструкцией гироскопа [12, 13]. В этом случае даже небольшое изменение условий закрепления ТВГ на своих посадочных местах может влиять на появление изменений в параметрах остаточной разночастотности.

Похожие рассуждения можно привести и для параметров остаточной разнодобротности [14, 15]. Так, старение kleевых соединений и отслаивание напыляющих покрытий могут влиять на изменение параметров остаточной разнодобротности резонаторов гироскопов в процессе длительной эксплуатации [16, 17]. В то же время, исходя из физики перечисленных процессов, можно предположить, что вероятность изменения параметров разнодобротности будет ниже вероятности эксплуатационного изменения параметров разночастотности резонаторов.

При этом важность контроля сохранности указанных точностных характеристик резонаторов особенно будет возрастать для тех современных конструкций интегрирующих гироскопов, где используют традиционный для гироскопов режим повышения точности через использование алгоритмической коррекции выходного сигнала с помощью заранее выявленных функций компенсации систематических ошибок [18, 19]. Так, для твердотельных волновых гироскопов выявилось, что вводимые «функции антидрейфа» (функции частично регулируемой параметрической компенсации систематического ухода нуля выходного сигнала) оказались линейно зависимы от параметров остаточных разночастотности и разнодобротности резонаторов [20, 21]. В результате эксплуатационное изменение этих параметров может вдвое ухудшать точность выходного сигнала ТВГ, так как записанные в заводских условиях «функции антидрейфа» могут начать выполнять роль функций дополнительного систематического дрейфа выходного сигнала гироскопа. Поэтому введение режима быстрого контроля сохранности указанных точностных характеристик резонаторов, а также режима автоматической подстройки структуры «функций антидрейфа» являются не менее актуальными практическими задачами.

Исходя из сказанного, целью настоящей статьи выбран поиск новых возможностей построения

ускоренных алгоритмов проведения идентификации точностных механических характеристик резонаторов (параметров остаточных разнодобротности и разночастотности), для чего вводятся и анализируются специальные режимы обработки информации в условиях вращающихся твердотельных волновых гироскопов.

Это позволит ускорять проведение производственного контроля таких характеристик резонаторов при их балансировке и при сборке ТВГ. А также выполнять их эксплуатационные диагностику и контроль в рамках комплексной системы активного повышения точности интегрирующих ТВГ.

Основой предлагаемых методик выбраны двухуровневые схемы идентификации характеристик свободных колебаний резонаторов гироскопов со взаимным согласованием их вычислительных алгоритмов. В них первый уровень идентификации представляет собой обработку сигналов измерительного устройства ТВГ (аналогичного штатному алгоритму обработки) с целью выявления медленно изменяемых функций амплитуд и углов стоячих волн. Далее на этой основе на втором уровне вычислительной схемы выполняется идентификация конструктивных параметров математической модели свободных колебаний резонатора гироскопа, через которые уже рассчитываются параметры разночастотности и разнодобротности резонаторов.

Рассмотрение последующих математических выкладок будет частично опираться на материалы предыдущих статей авторов в журнале «Интеллектуальные системы в производстве (ИСП)» (2020, № 3; 2021, № 3; 2024, № 1–4), что позволило использовать ранее выведенные математические формулы в прежних обозначениях.

1. Математические постановки задач двухуровневой идентификации точностных механических характеристик резонатора

Важной особенностью уравнений свободных колебаний резонатора ТВГ, записанных в медленно изменяемых амплитудах рабочей и квадратурной стоячих волн, является их явная независимость от скорости Ω углового поворота гироскопа:

$$\begin{aligned} \ddot{a}_A + \nu[1 + \delta\mu \cos 4(\theta_A - \theta_\mu)] \cdot a_A + \\ + \Delta\omega \cdot \sin 4(\theta_A - \theta_\omega) \cdot a_B = 0, \\ \ddot{a}_B + \nu[1 - \delta\mu \cos 4(\theta_A - \theta_\mu)] \cdot a_B - \\ - \Delta\omega \cdot \sin 4(\theta_A - \theta_\omega) \cdot a_A = 0, \end{aligned}$$

где $2\Delta\omega = \Delta\omega_{pq} \equiv \omega_p - \omega_q$ – величина разночастотности между близкими резонансными частотами (ω_p, ω_q) по осям жесткости резонатора (p, q),

расположенным под углом θ_ω к осям измерительного устройства; параметр $\delta\mu$ характеризует величину разнодобротности $\Delta Q=4Q\cdot\delta\mu$ по осям вязкости, расположенным под углом θ_μ ; $Q=\omega/2\nu$ – величина добротности колебаний (ω – средняя частота; ν – коэффициент вязкости).

Отсутствие такой зависимости от Ω делает особенно удобным использование приведенных уравнений для идентификации точностных механических характеристик резонаторов (параметров остаточных разнодобротности и разночастотности) в разных режимах поворачивающихся (вращающихся) интегрирующих ТВГ.

При этом для формулировки и решения получаемых обратных задач уравнения свободных колебаний резонатора гироскопа математически удобнее представить в следующем развернутом виде:

$$\begin{aligned} \dot{a}_A + \nu \cdot a_A + \Delta\nu_C \cdot (a_A \cos 4\theta_A) + \\ + \Delta\nu_S \cdot (a_A \sin 4\theta_A) + \Delta\omega_C \cdot (a_B \sin 4\theta_A) - \\ - \Delta\omega_S \cdot (a_B \cos 4\theta_A) = 0; \\ \dot{a}_B + \nu \cdot a_B - \Delta\nu_C \cdot (a_B \cos 4\theta_A) - \\ - \Delta\nu_S \cdot (a_B \sin 4\theta_A) - \Delta\omega_C \cdot (a_A \sin 4\theta_A) + \\ + \Delta\omega_S \cdot (a_A \cos 4\theta_A) = 0; \end{aligned} \quad (1)$$

где $\Delta\nu_C \equiv \nu\delta\mu \cos 4\theta_\mu$, $\Delta\nu_S \equiv \nu\delta\mu \sin 4\theta_\mu$,
 $\Delta\omega_C \equiv \Delta\omega \cos 4\theta_\omega$, $\Delta\omega_S \equiv \Delta\omega \sin 4\theta_\omega$ –
вспомогательные параметры разночастотности и разнодобротности.

В результате поставленные задачи контроля становятся, по сути, двухуровневыми задачами идентификации.

В них на первом уровне выполняется расчет (идентификация) входящих в (1) медленно изменяющихся волновых переменных $\{\theta_A(t), a_A(t), a_B(t)\}$ через оцифрованные сигналы $S_C(t)$ и $S_D(t)$ измерительного устройства емкостного типа со своими шумами ε_C и ε_D и частотой АЦП:

$$S_C(t) = C(t) + \varepsilon_C, S_D(t) = D(t) + \varepsilon_D. \quad (2)$$

Такая задача решается на интервалах T_a условной неизменности вычисляемых функций $\{\theta_A(t), a_A(t), a_B(t)\}$. Их длительность обычно более чем на порядок превышает временной интервал дискретизации АЦП $T_{\text{АЦП}}$. При этом за нижнюю границу T_a будем принимать одно колебание резонатора на резонансной частоте (это примерно в 20 раз выше типового значения $T_{\text{АЦП}}$). Выбранная граница будет задавать верхнее ограничение на разрешенную скорость поворота ТВГ. В свою очередь, верхняя граница выбираемых T_a будет ограничиваться выбором

величины приемлемой погрешности сохранности постоянства функций $\{\theta_A(t), a_A(t), a_B(t)\}$ на таких интервалах T_a

Найденные на первом этапе «прореженные» массивы идентифицированных дискретных значений функций $\{\theta_A(t), a_A(t), a_B(t)\}$ становятся исходными данными для решения задач идентификации второго уровня. В них на основе модели (1) выполняется расчет значений вспомогательных параметров разночастотности и разнодобротности, из которых уже непосредственно выделяются интересующие нас точностные механические характеристики:

$$\begin{aligned} tg4\theta_\omega &= \frac{\Delta\omega_S}{\Delta\omega_C}, \quad \Delta\omega^2 = \Delta\omega_S^2 + \Delta\omega_C^2; \\ tg4\theta_\mu &= \frac{\Delta\nu_S}{\Delta\nu_C}, \quad \delta\mu^2 = \frac{\Delta\nu_S^2 + \Delta\nu_C^2}{\nu^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Очевидно, что ограничений на интервал времени решения таких обратных задач не накладывается, так как искомые в них параметры (3) являются принципиально постоянными.

Для нахождения входящих в (3) параметров $\Delta\nu_C$, $\Delta\nu_S$, $\Delta\omega_C$, $\Delta\omega_S$ можно применить традиционные вычислительные схемы решения идентификационных обратных задач. Последние наиболее часто представляют собой решение задач минимизации квадратичного функционала интегральной ошибки базовой модели. В нашем случае для модели (1) получаем задачу:

$$\begin{aligned} J = &<[\dot{a}_A + \nu \cdot a_A + \Delta\nu_C \cdot (a_A \cos 4\theta_A) + \\ &+ \Delta\nu_S \cdot (a_A \sin 4\theta_A) + \\ &+ \Delta\omega_C \cdot (a_B \sin 4\theta_A) - \Delta\omega_S \cdot (a_B \cos 4\theta_A)]^2> + \\ &+ <[\dot{a}_B + \nu \cdot a_B - \Delta\nu_C \cdot (a_B \cos 4\theta_A) - \\ &- \Delta\nu_S \cdot (a_B \sin 4\theta_A) - \\ &- \Delta\omega_C \cdot (a_A \sin 4\theta_A) + \Delta\omega_S \cdot (a_A \cos 4\theta_A)]^2> \Rightarrow \\ &\Rightarrow \min(\nu, \Delta\nu_C, \Delta\nu_S, \Delta\omega_C, \Delta\omega_S). \end{aligned} \quad (4)$$

При этом введение режима вращающегося гироскопа будет обеспечивать в (4) хорошую временную изменяемость угла положения $\theta_A(t)$ рабочей стоячей волны, что позволит улучшить вычислительную обусловленность математических схем решения получаемых обратных задач.

В то же время важно отметить, что на практике в большинстве режимов вращения (при отсутствии сверхмедленного поворота) скорость изменения входящих в (4) амплитуд $a_A(t)$, $a_B(t)$ рабочей и квадратурной стоячих волн останется малой (примерно такой же, как и у неподвижного гироскопа).

При организации многоэтапного контроля разных производственных операций общая задача комплексного контроля на основе задачи (4) может разделяться и на частные подза-

дачи. Поэтому выделим и будем рассматривать в дальнейшем следующие три варианта постановки двухуровневых идентификационных задач.

Первой задачей выберем измерения только доминирующих параметров разночастотности резонатора (при известных его диссипативных характеристиках или когда ими можно пренебречь по причине малости). В этом случае функционал (4) будет минимизироваться по двум параметрам:

$$J = <[\Delta\omega_C \cdot (a_B \sin 4\theta_A) - \Delta\omega_S \cdot (a_B \cos 4\theta_A) - \Phi_{Av}]^2 + \\ + [-\Delta\omega_C \cdot (a_A \sin 4\theta_A) + \Delta\omega_S \cdot (a_A \cos 4\theta_A) - \Phi_{Bv}]^2 > \Rightarrow \min(\Delta\omega_C, \Delta\omega_S), \quad (5)$$

где $\Phi_{Av} \equiv -\dot{a}_A - \nu \cdot a_A - \Delta\nu_C \cdot (a_A \cos 4\theta_A) - \Delta\nu_S \cdot (a_A \sin 4\theta_A)$,
 $\Phi_{Bv} \equiv -\dot{a}_B - \nu \cdot a_B + \Delta\nu_C \cdot (a_B \cos 4\theta_A) + \Delta\nu_S \cdot (a_B \sin 4\theta_A)$;

параметры вязкости ν , $\Delta\nu_C$, $\Delta\nu_S$ считаются уже известными, причем часто можно полагать $\Delta\nu_C \approx 0$, $\Delta\nu_S \approx 0$ для случаев малой разнодобротности.

Второй задачей будем выбирать измерения только доминирующих параметров разнодобротности резонатора (при известных его упругих характеристиках, или когда ими можно пренебречь по причине малости, или когда измерения выполняются при одновременно работающей системе автоматической коррекции осей жесткости резонатора с помощью дополнительных емкостных напряжений). Здесь функционал (4) будет минимизироваться по трем параметрам:

$$J = <[\nu \cdot a_A + \Delta\nu_C \cdot (a_A \cos 4\theta_A) + \Delta\nu_S \cdot (a_A \sin 4\theta_A) - \Phi_{Av}]^2 + \\ + [\nu \cdot a_B - \Delta\nu_C \cdot (a_B \cos 4\theta_A) - \Delta\nu_S \cdot (a_B \sin 4\theta_A) - \Phi_{Bv}]^2 > \Rightarrow \min(\nu, \Delta\nu_C, \Delta\nu_S), \quad (6)$$

где $\Phi_{Av} \equiv -\dot{a}_A - \Delta\omega_C \cdot (a_B \sin 4\theta_A) + \Delta\omega_S \times (a_B \cos 4\theta_A)$,
 $\Phi_{Bv} \equiv -\dot{a}_B + \Delta\omega_C \cdot (a_A \sin 4\theta_A) - \Delta\omega_S \cdot (a_A \cos 4\theta_A)$;

причем в них при наличии малой остаточной разночастотности ($\Delta\omega \rightarrow 0$) часто можно принимать: $\Phi_{Av} \approx -\dot{a}_A$, $\Phi_{Bv} \approx -\dot{a}_B$.

Однако, если в (6) средний коэффициент демпфирования ν отдельно измерен заранее, вычисление оставшихся вспомогательных параметров $\Delta\nu_C$, $\Delta\nu_S$ будет напоминать решение предыдущей задачи (5).

Наконец, третьей, наиболее общей задачей будем рассматривать одновременное измерение параметров остаточной разночастотности и разнодобротности резонатора, в которой минимизируется полный функционал (4) по пяти искомым постоянным параметрам.

2. Варианты выбора продолжительности режима измерений точностных механических характеристик резонатора

Из вида функционала (4) вытекает, что с точки зрения синтеза простых математических формулировок алгоритмов идентификации наиболее удобным является режим вращения основания гироскопа с постоянной угловой скорости $\Omega \approx \text{const}$.

На практике такой режим легко реализовать, например, с помощью шагового двигателя (при этом если возникнет начальный участок набора требуемой угловой скорости, то его следует вырезать из массива измерений).

Это удобство объясняется тем, что при $\Omega \approx \text{const}$ наиболее просто заменить интегрирование по времени в функционалах типа (4) на интегрирование по углу поворота стоячей волны: $\theta_A = K\Omega \cdot t$ (K – масштабный коэффициент выходного сигнала ТВГ; $K\Omega \approx \text{const}$) при сохранении ортогональности соответствующих тригонометрических функций на тактах отсчета АЦП:

$$\langle f \rangle = (1/T) \int_0^T f(t) dt \Rightarrow \langle f \rangle = (1/\Delta\theta) \int_0^{\Delta\theta} f(\theta_A) d\theta_A \approx \sum_i^n f / n, \quad (7)$$

где n – число тактов усреднения.

При этом важно отдельно остановиться на особенностях выбора интервала интегрирования $\Delta\theta$ в (7), который надлежащим образом «вырезается» из общего массива измерений.

Чтобы входящие в (4) гармонические функции четвертого порядка по углу ($4\theta_A$) оставались взаимно ортогональными (на интервалах приближенного постоянства амплитуд $a_A(t)$, $a_B(t)$), период интегрирования в (7) лучше всего выбирать кратным $\pi/4$: $\Delta\theta = m\pi/4$, где m – целое число. В то же время важно обратить внимание, что в (7) будет выполняться операция усреднения ограниченных гармонических функций.

Поэтому при значениях $m > 10$ величину $\Delta\theta$ часто ужеможно будет устанавливать приближенно (точную синхронизацию по тактам АЦП с $\pi/4$ здесь соблюдать не потребуется).

Несмотря на доминирование угловой координаты $\theta_A(t)$, малые изменения амплитуд ($a_A(t)$, $a_B(t)$) тоже должны происходить (иначе уравнения (1) не будут выполняться).

Поэтому наиболее малый поворот по углу $\Delta\theta = \pi/4 (m = 1)$ будет соответствовать наиболее малой скорости вращения Ω .

В то же время расширение интервала $\Delta\theta = t\pi/4$ через увеличение t позволит увеличить Ω , а также уменьшить влияние шумов измерений сигналов (2) на идентифицируемые точностные механические характеристики, что станет особенно важной задачей при малых амплитудах $a_B(t)$ квадратурной стоячей волны. Здесь с каждым следующим интервалом $\pi/4$ (что составляет полный оборот 2π для угла $8\theta_A$) будет иметь место условное повторение угловых положений рабочей стоячей волны, но с небольшим изменением амплитуд $a_A(t)$, $a_B(t)$.

Последовательное увеличение t на практике позволит организовать настраиваемый по времени контроль точности идентифицируемых коэффициентов с пошаговым увеличением продолжительности измерений. В этом режиме, как только будет видна асимптотическая сходимость идентифицируемых параметров, процесс измерений следует остановить.

В целом представляется, что достигаемая точность идентификации механических характеристик резонатора будет определяться главным образом временем интервала идентификации. Так как уравнения (1) от Ω не зависят, поэтому ожидается, что массивы исходных данных, сформированные за малый поворот с замедленной скоростью или за несколько оборотов с повышенной скоростью будут похожи по своим внутренним пропорциям. Однако выбор несколько оборотов (с увеличением Ω) позволит в соответствии с (7) ослабить требования к контролю требуемой длины интервала для обеспечения ортогональности соответствующих тригонометрических функций.

Математически более сложные алгоритмы расчета будут иметь место для режимов проведения измерений при произвольной скорости поворота основания ТВГ ($\Omega \neq \text{const}$). В этом случае АЦП производит съем измерительных сигналов (2) с постоянной во времени частотой. Но при переходе от временной координаты к угловой получим в (4), (7) уже неравномерную по углу дискретную сетку измерений. При этом вычислительная ортогональность гармонических угловых функций четвертого порядка в (4) будет в общем случае ухудшаться, что следует учитывать при синтезе идентификационных алгоритмов для малых интервалов измерения $\Delta\theta$.

В то же время при больших значениях $\Delta\theta$ эти эффекты, как уже указывалось ранее, будут нивелироваться операциями усреднения в (7). В

этом случае можно повторять все вычисления типа (7), но уже на неравномерной сетке суммирования (то есть заменять интегралы типа (7) на обычное усредняющее суммирование). Однако для повышения точности вычислений можно применить и операцию численного интегрирования на неравномерной сетке, вводя соответствующие весовые коэффициенты в (7) в зависимости от измеряемых углов θ_A .

В результате такого предварительного обсуждения режимов измерений в условиях вращающихся ТВГ можно выделить следующие постановки задач нахождения математических алгоритмов идентификации значений параметров остаточных разночастотности и разнодобротности резонаторов:

- 1) для длительного производственного операционного контроля в режиме вращающегося с постоянной скоростью ($\Omega \approx \text{const}$) гироскопа;
- 2) для ускоренного производственного операционного контроля в режиме вращающегося с постоянной скоростью ($\Omega \approx \text{const}$) гироскопа;
- 3) для быстрого производственного контроля с поворотом гироскопа с произвольной угловой скоростью ($\Omega \neq \text{const}$);
- 4) для быстрого контроля сохранности значений параметров остаточных разночастотности и разнодобротности резонаторов с помощью неравномерного поворота ТВГ ($\Omega \neq \text{const}$) в условиях эксплуатации.

Перед тем как перейти к их непосредственному обсуждению, рассмотрим более детально влияние выбора интервала наблюдения (интегрирования в (4)) на особенности решения получающихся идентификационных задач. Это математически наиболее просто сделать через приводимый ниже анализ интегральных свойств базовой модели (1).

3. Влияние интервала наблюдения на математические схемы решения обратных задач идентификации точностных механических характеристик резонаторов в режимах вращающихся ТВГ

Данный вопрос наиболее просто раскрыть через анализ интегральных свойств базовой модели (1), выбранной для решения задач идентификации параметров остаточных разночастотности и разнодобротности резонаторов в режимах вращающихся ТВГ.

Для этого каждое уравнение (1) поочередно умножим на $\cos 4\theta_A$ и $\sin 4\theta_A$ с последующим интегрированием по углу в соответствии с (7). В общем случае получим следующие четыре независимые уравнения:

$$\begin{aligned}
& 2\Delta v_C < a_A \cos^2 4\theta_A > + \Delta v_S < a_A \sin 8\theta_A > + \\
& + \Delta\omega_C < a_B \sin 8\theta_A > - \\
& - 2\Delta\omega_S < a_B \cos^2 4\theta_A > = \\
& = -2 < (\dot{a}_A + \nu a_A) \cos 4\theta_A > ; \\
& \Delta v_C < a_A \sin 8\theta_A > + 2\Delta v_S < a_A \sin^2 4\theta_A > + \\
& + 2\Delta\omega_C < a_B \sin^2 4\theta_A > - \\
& - \Delta\omega_S < a_B \sin 8\theta_A > = -2 < (\dot{a}_A + \\
& + \nu a_A \sin 4\theta_A) > ; \quad (8) \\
& 2\Delta v_C < a_B \cos^2 4\theta_A > + \\
& + \Delta v_S < a_B \sin 8\theta_A > + \\
& + \Delta\omega_C < a_A \sin 8\theta_A > - \\
& - 2\Delta\omega_S < a_A \cos^2 4\theta_A > = \\
& = 2 < (\dot{a}_B + \nu a_B) \cos 4\theta_A > ; \\
& \Delta v_C < a_B \sin 8\theta_A > + \\
& + 2\Delta v_S < a_B \sin^2 4\theta_A > + \\
& + 2\Delta\omega_C < a_A \sin^2 4\theta_A > - \\
& - \Delta\omega_S < a_A \sin 8\theta_A > = \\
& = 2 < (\dot{a}_B + \nu a_B) \sin 4\theta_A > .
\end{aligned}$$

Видно, что при известном коэффициенте демпфирования ν отсюда через решение системы четырех алгебраических уравнений (8) можно вычислить четыре вспомогательных параметра Δv_C , Δv_S , $\Delta\omega_C$, $\Delta\omega_S$. Из них далее по формулам (3) легко находятся итоговые параметры остаточных разночастотности и разнодобротности резонаторов. При этом коэффициент общего демпфирования ν можно заранее измерить по уменьшению во времени колебательной энергии резонатора наноподвижном основании (она будет пропорциональна уменьшению во времени функции $a_A^2 + a_B^2 = a_C^2 + a_D^2$ в условиях свободных колебаний).

Таким образом, выполнение идентификации точностных механических характеристик через решение системы уравнений (8) позволяет решать задачу в произвольных режимах продолжительного и ускоренного контроля. При этом в случае продолжительных интервалов наблюдения будем иметь явное изменение во времени амплитуд (a_B , a_A), что не позволит воспользоваться в (8) свойствами ортогональности функций ($\cos 4\theta_A$, $\sin 4\theta_A$).

В то же время (8) иногда удается упростить для случаев коротких наблюдений с недостаточно развитой квадратурной волной, когда можно пренебречь вкладом малых величин порядка $a_B/a_A \rightarrow 0$. Еще большее упрощение (8) получается при проведении измерений с дополнительным специальным выбором углового интервала наблюдения из общего массива.

Так, при измерениях на укороченных интервалах наблюдения амплитуды (a_B , a_A) можно считать почти постоянными и вынести их из-

под знаков интегралов в (8). Тогда для $\Delta\theta = m\pi/4$ (m – целое число) будут иметь место:

$$\begin{aligned}
& < \sin 8\theta_A > \geq 0, \quad 2 < \sin^2 4\theta_A > = \\
& = 1 - < \cos 8\theta_A > = 1, \quad (9) \\
& < \cos 8\theta_A > \geq 0, \quad 2 < \cos^2 4\theta_A > = \\
& = 1 - < \cos 8\theta_A > = 1.
\end{aligned}$$

В итоге получим хорошо вычислительно обусловленную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
& -\Delta v_C \cdot a_A + \Delta\omega_S \cdot a_B = b_1; \\
& \Delta v_S \cdot a_A + \Delta\omega_C \cdot a_B = b_3; \\
& \Delta v_C \cdot a_B - \Delta\omega_S \cdot a_A = b_2; \\
& \Delta v_S \cdot a_B + \Delta\omega_C \cdot a_A = b_4. \quad (10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& b_1 \equiv 2 < (\dot{a}_A + \nu a_A) \cos 4\theta_A >; \quad b_2 \equiv \\
& \equiv 2 < (\dot{a}_B + \nu a_B) \cos 4\theta_A >; \quad (11) \\
& b_3 \equiv -2 < (\dot{a}_A + \nu a_A) \sin 4\theta_A >; \quad b_4 \equiv \\
& \equiv 2 < (\dot{a}_B + \nu a_B) \sin 4\theta_A > .
\end{aligned}$$

Здесь имеем две независимые, хорошо обусловленные системы линейных алгебраических уравнений второго порядка, из которых легко вычисляются вспомогательные параметры Δv_C , Δv_S , $\Delta\omega_C$, $\Delta\omega_S$.

Если же в (10) на коротких интервалах еще и пренебречь «неразвитой» квадратурной волной ($a_B/a_A \rightarrow 0$), тогда сразу найдем грубые оценки:

$$\begin{aligned}
& \Delta v_C \approx -b_1/a_A; \quad \Delta v_S \approx b_3/a_A; \\
& \Delta\omega_S \approx -b_2/a_A; \quad \Delta\omega_C \approx b_4/a_A. \quad (12)
\end{aligned}$$

Важно подчеркнуть, что в (10) функции $(\dot{a}_A + \nu a_A)$ и $(\dot{a}_B + \nu a_B)$ должны изменяться внутри интервала $\Delta\theta$. Иначе при $\Delta\theta = m\pi/2$ получим вырождение задачи (все $b_i = 0$) независимо от выбора начального угла интервала θ_{A0} . Поэтому на практике нужно подобрать такие условия проведения контроля, когда функции (11) будут ненулевыми. Их малость очевидна, так как в соответствии с (12) они пропорциональны малым остаточным параметрам разночастотности и разнодобротности.

Если же выбрать $\Delta\theta = \pi/4$ и принять эти функции условно постоянными, тогда при дополнительном выборе начального угла отсчета $\theta_{A0} = \pi/16$ этого интервала будем иметь:

$$\begin{aligned}
& b_1 = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(\dot{a}_A + \nu a_A); \\
& b_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(\dot{a}_B + \nu a_B); \\
& b_3 = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(\dot{a}_A + \nu a_A); \\
& b_4 = (\sqrt{2}/2)(\dot{a}_B + \nu a_B). \quad (13)
\end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что при других начальных углах θ_{A0} интервала $\Delta\theta = \pi/4$ величины b_i будут изменяться от нуля (при $\theta_{A0} = 0$) до своих максимальных значений, а левые части в (10) останутся прежними. Причем при $\theta_{A0} = 0$ получим вырождение задачи (10).

Также можно попробовать выбрать интервал $\Delta\theta = \pi/8$, но получаемые преобразования уравнений (8) будут более громоздкими.

Заметим также, что в большинстве случаев на таких коротких интервалах амплитуда a_A будет меняться слабо: $\dot{a}_A \approx 0$. Однако изменяемость скорости амплитуды малой квадратурной волны может быть значительной, так как для высокодобротных резонаторов имеет место:

$$\begin{aligned} a_A^2 + a_B^2 &= a_p^2 + a_q^2 \sim \text{const} \Rightarrow \\ \dot{a}_B &\sim -\dot{a}_A \cdot (a_A/a_B). \end{aligned} \quad (14)$$

Таким образом, в рассматриваемых режимах контроля лучше всего выбирать интервалы длиной $\Delta\theta = m\pi/2$. При этом выбор целого числа m следует производить из условия достижения надежных малых значений коэффициентов (11) (их малость непосредственно вытекает из (10)). В свою очередь это будет определять время контроля. А увеличение m в интервале $\Delta\theta = m\pi/2$ позволит с учетом усреднения (7) обеспечить естественное выполнение (9) и для других продолжительных интервалов произвольной длины. В то же время введение режима $m = 1$ с крайне замедленной Ω не позволит перейти к упрощенной задаче (10), а потребует решения полной задачи (8).

Заметим, что вычисление коэффициентов (11) должно проводиться заранее, до решения идентификационной задачи (10). Поэтому здесь появляется отдельная задача аппроксимации массивов $(\dot{a}_A + va_A)$ и $(\dot{a}_B + va_B)$ плавными ненулевыми функциями (например, линейными или квадратичными).

Таким образом, рассмотренные в данном пункте математические схемы (8), (10), (12) решения обратных задач идентификации точностных механических характеристик резонаторов в режимах вращающихся ТВГ подчеркивают особенную важность точного измерения скоростей (\dot{a}_B, \dot{a}_A) и особенно скорости изменения \dot{a}_B малой по амплитуде квадратичной волны. Для этого следует использовать специально выбираемый продолжительный интервал наблюдения за изменениями во времени амплитуд $a_A(t)$, $a_B(t)$ с последующей их аппроксимацией гладкими функциями и дифференцированием. Чтобы проявились их ускорения, требуется настраивать отдельно длину интервала интегриро-

вания (увеличением m) и скорость поворота основания гироскопа.

Учитывая интегральные свойства базовой модели (1), далее рассмотрим решение задачи идентификации параметров остаточных разночастотности и разнодобротности резонаторов в их традиционной постановке через минимизацию соответствующих функционалов квадратичных ошибок (4)–(6). По сравнению с (8) такой подход позволит одновременно выявлять и значение коэффициента демпфирования v без дополнительного отдельного измерения. При этом математические выражения описываемого второго уровня идентификации будут чуть более громоздкими, но зато при программировании они будут лучше согласованы с расчетными схемами преобразования измерительных сигналов (2) на первом уровне идентификации.

4. Алгоритмическое обеспечение методик производственного контроля параметров остаточных разночастотности и разнодобротности резонаторов при вращении ТВГ с $\Omega = \text{const}$

Для упрощения записи математических формул переход к общей комплексной задаче идентификации погрешностей жесткостных и вязкостных свойств резонатора проведем через рассмотрение двух частных задач раздельного измерения параметров разночастотности и разнодобротности резонатора.

В первой задаче, дифференцируя функционал (5) по искомым параметрам жесткости и приравнивая результаты нулю, получим следующую систему из двух линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \Delta\omega_C \cdot &< a_+^2 \sin^2 4\theta_A > - \\ &- 0,5 \Delta\omega_S \cdot < a_+^2 \sin 8\theta_A > = \\ &= < (\Phi_{Av} \cdot a_B - \Phi_{Bv} \cdot a_A) \sin 4\theta_A > = - \\ &\quad < (\dot{a}_A a_B - \dot{a}_B a_A) \sin 4\theta_A > + \\ &+ \Delta\nu_C (a_A a_B) \sin 8\theta_A + 2\Delta\nu_S (a_A a_B) \sin^2 4\theta_A >; \\ 0,5 \Delta\omega_C \cdot &< a_+^2 \sin 8\theta_A > - \\ &- \Delta\omega_S \cdot < a_+^2 \cos^2 4\theta_A > = \quad (15) \\ &= < (-\Phi_{Av} \cdot a_B + \Phi_{Bv} \cdot a_A) \cos 4\theta_A > = \\ &= < (\dot{a}_A a_B - \dot{a}_B a_A) \cos 4\theta_A > + \\ &+ 2\Delta\nu_C (a_A a_B) \cos^2 4\theta_A + \Delta\nu_S (a_A a_B) \sin 8\theta_A >, \end{aligned}$$

где $a_+^2 \equiv a_A^2 + a_B^2 = a_C^2 + a_D^2$ легко вычисляется через измеряемые сигналы.

Например, в случае большого или целого числа периодов колебаний резонатора в интервале T_a для выделения медленно изменяющихся амплитуд колебаний из сигналов (2) будем иметь: $a_C^2 \approx 2 \langle S_C^2 \rangle_a$, $a_D^2 \approx 2 \langle S_D^2 \rangle_a$.

Остальные волновые функции связаны с измеряемыми сигналами (2) по чуть более сложным известным формулам:

$$\begin{aligned} a_A a_B &= a_D a_C \sin \Delta \varphi_{CD}; \operatorname{tg} 4 \theta_A = \\ &= 2 a_C a_D \cos \Delta \varphi_{CD} / (a_C^2 - a_D^2); \\ a_A^2 &= a_C^2 \cos^2 2 \theta_A + a_D^2 \sin^2 2 \theta_A + \\ &+ a_C a_D \cos \Delta \varphi_{CD} \sin 4 \theta_A, \\ a_B^2 &= a_C^2 \sin^2 2 \theta_A + \\ &+ a_D^2 \cos^2 2 \theta_A - a_C a_D \cos \Delta \varphi_{CD} \sin 4 \theta_A. \end{aligned}$$

Во второй задаче, дифференцируя функционал (6) по искомым параметрам вязкости и приравнивая результаты нулю, получим уже систему из трех линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} v \cdot < a_+^2 > + \Delta v_C \cdot < a_+^2 \cos 4 \theta_A > + \\ &+ \Delta v_S \cdot < a_+^2 \sin 4 \theta_A > = \\ &= < \Phi_{A\omega} a_A + \Phi_{B\omega} a_B > = \\ &= - < 0,5 (da_+^2 / dt) >; \\ v \cdot < a_-^2 \cos 4 \theta_A > + \Delta v_C \cdot < a_+^2 \cos^2 4 \theta_A > + \\ &+ 0,5 \Delta v_S \cdot < a_+^2 \sin 8 \theta_A > = \\ &= < (\Phi_{A\omega} a_A - \Phi_{B\omega} a_B) \cos 4 \theta_A > = \\ &= - < 0,5 (da_-^2 / dt) \cos 4 \theta_A + \\ &+ \Delta \omega_C (a_A a_B) \sin 8 \theta_A - \\ &- 2 \Delta \omega_S (a_A a_B) \cos^2 4 \theta_A >; \quad (16) \\ v \cdot < a_-^2 \sin 4 \theta_A > + \\ &+ 0,5 \Delta v_C \cdot < a_+^2 \sin 8 \theta_A > + \\ &+ \Delta v_S \cdot < a_+^2 \sin^2 4 \theta_A > = \\ &= < (\Phi_{A\omega} a_A - \Phi_{B\omega} a_B) \sin 4 \theta_A > = \\ &= - < 0,5 (da_-^2 / dt) \sin 4 \theta_A + \\ &+ 2 \Delta \omega_C (a_A a_B) \sin^2 4 \theta_A - \\ &- \Delta \omega_S (a_A a_B) \sin 8 \theta_A >, \end{aligned}$$

где $a_-^2 = (a_A^2 - a_B^2) = a_\Sigma^2 - 2a_B^2$;

$da_+^2 / dt = 2(\dot{a}_A a_A + \dot{a}_B a_B)$;

$da_-^2 / dt = 2(\dot{a}_A a_A - \dot{a}_B a_B)$.

И наконец, для общей задачи комплексного контроля разночастотности и разнодобротности уравнения (15), (16) следует просто объединить в систему из пяти линейных алгебраических уравнений относительно пяти искомых неизвестных. Она является наиболее общей и поэтому может быть использована для проведения как длительных, так и укороченных измерений в разных вариантах и режимах контроля.

Чтобы уменьшить вычислительную сложность такой системы, а также улучшить обусловленность решения соответствующих обратных задач, в ряде случаев ее решение может оказаться удобным заменить на поочередное многошаговое решение систем уравнений более низкого порядка (15) и (16).

Для интересующих нас режимов проведения ускоренного контроля выявленная структура уравнений (15), (16) позволяет выполнить ряд упрощений. Для этого на относительно корот-

ких интервалах измерений можно использовать следующие, выделенные ранее в пункте 3, два важных свойства: 1) квадратурная стоячая волна в свободных колебаниях резонатора не успевает «развиться», сохраняя свою малость $a_B / a_A \rightarrow 0$, что позволяет в ряде случаев пренебрегать некоторыми малыми составляющими в вычислительных схемах; 2) амплитуды стоячих волн можно условно принимать постоянными: $a_A(t) \approx \text{const}$, $a_B(t) \approx \text{const}$, что позволяет выносить эти почти постоянные амплитуды из-под знаков усреднения.

Последнее свойство наиболее важно для упрощения вычислительных схем задач идентификации в режимах контроля вращающихся ТВГ. На практике оно обеспечивается правильным выбором соотношения между интервалами идентификации первого и второго уровня. Так, при крайне медленной скорости Ω нарушение этого условия может наблюдаться уже на интервалах $0 \leq \theta_A \leq \pi / 4$.

В свою очередь, при увеличении Ω наблюдения следует проводить в течение нескольких оборотов гироскопа с последующей «нарезкой» массива данных на интервалы выбранной длины $\Delta \theta$. При таких скоростях на каждом из них условия $a_A(t) \approx \text{const}$, $a_B(t) \approx \text{const}$ будут выполняться. В то же время длительность общего интервала наблюдения следует выбирать из условия возможности корректного измерения скоростей изменения этих амплитуд.

Рассмотрим упрощение уравнений (15), (16) на укороченных подынтервалах, когда можно считать $a_A(t) \approx \text{const}$, $a_B(t) \approx \text{const}$ для режима измерений с $\Omega = \text{const}$. Здесь, как и ранее, суммирование по интервалам времени в функционале (4) заменим на суммирование по угловой координате θ_A в соответствии с (7): $\theta_A = K\Omega \cdot t$. По аналогии с (11) выберем случай $\Delta \theta = m\pi / 2$, где m – целое число. Для него уравнениям (15), (16) можно придать простой вид:

$$\begin{aligned} v \cdot < a_+^2 > &= - < 0,5 (da_+^2 / dt) >; \\ \Delta \omega_C \cdot a_+^2 - 2 \Delta v_S (a_A a_B) &= \\ = -2 < (\dot{a}_A a_B - \dot{a}_B a_A) \sin 4 \theta_A >; \\ 2 \Delta \omega_C (a_A a_B) - \Delta v_S \cdot a_+^2 &= \\ = < (da_-^2 / dt) \sin 4 \theta_A >; \quad (17) \\ \Delta \omega_S \cdot a_+^2 - 2 \Delta v_C (a_A a_B) &= \\ = -2 < (\dot{a}_A a_B - \dot{a}_B a_A) \cos 4 \theta_A >; \\ 2 \Delta \omega_S (a_A a_B) + \Delta v_C \cdot a_+^2 &= \\ = - < (da_-^2 / dt) \cos 4 \theta_A >. \end{aligned}$$

Если здесь дополнительно учесть относительную малость амплитуды квадратурной волны ($a_B / a_A \rightarrow 0$), тогда итоговое решение получится сразу:

$$\begin{aligned}
 \Delta\omega_C &\approx 2(a_A/a_+^2) <\dot{a}_B \sin 4\theta_A>; \\
 \Delta\omega_S &\approx (a_A/a_+^2) <\dot{a}_B \cos 4\theta_A>; \\
 v &= -0,5 (da_+^2/dt)/a_+^2; \quad (18) \\
 \Delta\nu_C &\approx - <\left(\frac{da_-^2}{dt}\right) \cos 4\theta_A > \frac{1}{a_+^2}; \Delta\nu_S \approx \\
 &\approx - <(da_-^2/dt) \sin 4\theta_A > /a_+^2.
 \end{aligned}$$

Оно по физическому смыслу получилось похожим на ранее выписанные зависимости (12). То есть для нахождения приемлемого решения требуется достаточно точное нахождение ускорений изменения амплитуд ($a_A(t)$, $a_B(t)$), что можно сделать только на удлиненных интервалах наблюдения.

Заметим, что чуть понизить это требование на необходимость точного измерения только скоростей изменения амплитуд ($a_A(t)$, $a_B(t)$) в принципе позволяет переход к интегрированию на интервалах $\Delta\theta = m\pi/2 + \pi/4$. В этом случае на длинных наблюдениях сначала отдельно оценивается коэффициент демпфирования $v = -0,5 (da_+^2/dt)/a_+^2$. Далее из общего массива наблюдения выполняется специальная вырезка подинтервалов длиной $\Delta\theta = \pi/4$ с началом отсчета $\theta_{A0} = \pi/16$. Такой подход похож на (13), но требует большой аккуратности в практическом применении.

Таким образом, для режима ускоренного контроля в условиях вращения основания гироскопа с постоянной угловой скоростью $\Omega = \text{const}$ получили достаточно простые решения идентификационной задачи второго уровня. В ней, как и в предыдущем пункте, наиболее ответственной вычислительной операцией является точное измерение скоростей изменения амплитуд стоячих волн, особенно малой амплитуды квадратурной волны.

В следующем пункте обобщим такой подход на случаи измерений в режимах с произвольной угловой скоростью Ω , которую иногда тоже дополнительно потребуется измерять.

5. Алгоритмическое обеспечение методик быстрого производственного контроля параметров остаточных разночастотности и разнодобротности резонаторов с помощью поворота ТВГ с произвольной угловой скоростью ($\Omega \neq \text{const}$)

Заметим, что такое обеспечение хорошо подойдет и для задачи контроля сохранности параметров остаточных разночастотности и разнодобротности резонаторов интегрирующих гироскопов в условиях эксплуатации.

При произвольной угловой скорости Ω идентификацию точностных механических характеристик резонаторов достаточно просто выполнить на специально разреженной сетке измере-

ний. Для этого массив исходных данных $\{\theta_A(t)$, $a_A(t)$, $a_B(t)\}$ будем формировать только в углах $4\theta_A = m\pi/2$, $m = 0, 1, 2, 3$ и т. д. Для этих точек (с периодичным продолжением) в уравнениях (1) следует заменить:

$$\begin{aligned}
 m = 0 \Rightarrow &\cos 4\theta_A = 1, \sin 4\theta_A = 0; \\
 m = 1 \Rightarrow &\cos 4\theta_A = 0, \sin 4\theta_A = 1; \\
 m = 2 \Rightarrow &\cos 4\theta_A = -1, \sin 4\theta_A = 0; \\
 m = 3 \Rightarrow &\cos 4\theta_A = 0, \sin 4\theta_A = -1.
 \end{aligned}$$

В результате уравнения (1) станут более разреженными – упростятся похоже на (10). При этом функционал идентификации можно сформировать как среднее по ошибкам получаемых уравнений в наборе выбранных точек. Видно, что данный подход не зависит от равномерности скорости Ω . В свою очередь, контроль точек $\theta_A = m\pi/8$ производится непосредственно, так как на первом уровне идентификации совместно с $\{a_A(t)$, $a_B(t)\}$ вычисляется и $\theta_A(t)$.

В более распространенных режимах с частой сеткой решения первой идентификационной задачи следует использовать прежние общие уравнения (15), (16). Кратко остановимся на некоторых появляющихся особенностях.

В таких режимах с переменной $\Omega(t)$, как и ранее, массив измерений сигналов (2) формируется с частотой АЦП. Далее на интервалах первого уровня идентификации вычисляются амплитуды стоячих волн $a_A(t)$, $a_B(t)$ и соответствующие им угловые положения $\theta_A(t)$ (изменение которых для интегрирующего ТВГ пропорциональны угловой скорости Ω). При этом решение задач первого уровня идентификации не зависит от требований к Ω .

Из полученного нового массива, являющегося исходными данными задачи идентификации второго уровня, требуется специальным способом «нарезать» требуемые интервалы ее решения. Такую настройку интервалов наблюдения можно выполнять по аналогии с (9) из условия обеспечения в (15), (16) условий:

$$\begin{aligned}
 <(a_A a_B) \sin 8\theta_A> \rightarrow 0, \\
 <(a_A a_B) \cos 8\theta_A> \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

В то же время требуется обеспечить высокую точность предварительного нахождения ненулевых малых значений:

$$\begin{aligned}
 &<(\dot{a}_A a_B - \dot{a}_B a_A) \sin 4\theta_A>, \\
 &<(\dot{a}_A a_B - \dot{a}_B a_A) \cos 4\theta_A>, \\
 &<(da_-^2/dt) \cos 4\theta_A>, \\
 &<(da_-^2/dt) \sin 4\theta_A>.
 \end{aligned}$$

Для случая коротких измерений амплитуды стоячих волн можно вынести из-под знаков ус-

реднения. Тогда в случае очень коротких интервалов интеграл (7) может потребоваться брать разными численными схемами на неравномерной сетке с учетом введения весовых коэффициентов, зависящих от изменений угла $\theta_A(t)$ на сетке. При этом желательно добиться:

$$\langle \cos 4\theta_A \rangle \approx 0, \langle \sin 4\theta_A \rangle \approx 0,$$

$$\langle \sin 8\theta_A \rangle \approx 0.$$

Однако для случая достаточно длинных интервалов эти условия часто удается обеспечить и обычным суммированием без использования информации об $\theta_A(t)$.

Окончательные выражения здесь выписывать не будем из-за их громоздкости. Структурно они будут похожи на (17).

6. Исследование эффективности

алгоритмов обработки первичной информации для идентификации точностных механических характеристик резонаторов

Рассмотрим более подробно задачу первого уровня идентификации, где производится расчет функций: $\{a_A(t), a_B(t), \theta_A(t)\}$. Они нужны, чтобы сформировать массив исходной информации для решения идентификационной задачи второго уровня (4). При этом дискретизация этих функций проводится на интервалах их малой изменяемости.

Заметим, что расчет углового положения $\theta_A(t)$ важен для выполнения интегрирования (7). Кроме этого, для расчета добротности $Q = \omega / 2\nu$ и разнодобротности $\Delta Q = 4Q \cdot \delta\mu$ потребуется еще и измерение частоты ω стоячих волн (которая в зависимости от угла $\theta_A(t)$ будет плавно изменяться между близкими резонансными частотами (ω_p, ω_q) по отношению к осям жесткости резонатора, расположенным под углом θ_ω к осям измерительного устройства). Особое значение измерение $\theta_A(t)$ будет иметь при решении задач идентификации в режимах с неизвестной $\Omega \neq \text{const}$.

Подчеркнем, что в интересующих нас случаях проведения ускоренного контроля выбираются режимы вращающихся гироскопов, которые характеризуются ускоренной изменяемостью функции $\theta_A(t)$ углового положения рабочей стоячей волны. Это в свою очередь будет уменьшать интервалы идентификации задач первого уровня. Поэтому ниже с помощью имитационного моделирования оценим возможности разных алгоритмов измерения волновых функций $\{a_A(t), a_B(t), \theta_A(t)\}$ на наиболее коротких интервалах.

Для таких измерений в условиях синхронизации тактов АЦП с периодом колебаний ре-

зонатора в статье авторов в журнале ИСП (2021, № 3) были описаны четыре варианта алгоритмов расчета волновых функций $\{a_A(t), a_B(t), \theta_A(t), \omega\}$, в которых задача идентификации сводится к аналитическим формулам и однопараметрической оптимизации для уточнения частоты ω .

В первом алгоритме производится обработка результатов измерений без учета квадратурной волны (алгоритм «БУК»). Он предлагается для формирования начального приближением в задаче уточняющей многопараметрической оптимизации функционала ошибки идентификации. Во втором алгоритме обработка результатов измерений выполняется с использованием информации о фазовом сдвиге сигналов измерительного устройства (алгоритм «ФСС»). Он позволяет одновременно легко контролировать моменты времени прохождения стоячими волнами осей измерительного устройства – по критерию резкого увеличения фазового сдвига на $\pi/2$. В третьем алгоритме для обработки результатов измерений предложен виртуальный переход к подвижным осям стоячих волн (алгоритм «ВППО»). Его преимуществом является лучшая физическая наглядность промежуточных результатов. В четвертом алгоритме идентификации обработка результатов измерений производится с использованием численных процедур цифровой демодуляции (алгоритм «ЧЦД»).

С точки зрения практического использования первый алгоритм удобен для формирования начальных приближений в задачах уточняющей оптимизации функционалов идентификации в остальных методиках; второй алгоритм ориентирован на измерительное устройство с каналом измерения фазового сдвига его двух сигналов; третий алгоритм обеспечивает наиболее понятную физическую наглядность поведения стоячих волн; четвертый алгоритм ориентирован на измерительное устройство с демодуляцией измерительных сигналов.

Эти четыре алгоритма имеют наиболее простые вычислительные схемы, но для коротких интервалов (меньше 10 периодов колебаний резонатора) показали высокую чувствительность к ошибкам синхронизации тактов АЦП с периодом колебаний резонатора.

Поэтому для таких коротких интервалов в статье авторов в журнале ИСП (2022, № 1) были предложены еще четыре алгоритма без настройки вычислений на периодичность сигналов. Они в основном представляют собой соот-

ветствующие модификации предыдущих алгоритмов, когда учитывается нарушение ортогональности входящих тригонометрических функций. В первом алгоритме для обработки результатов измерений введен виртуальный переход к подвижным осям стоячих волн без учета влияния квадратурной стоячей волны (алгоритм «ЧПМВППО»). Он показал невысокую точность, но оказался удобен для формирования начальных приближений в задачах уточняющей оптимизации функционалов идентификации в остальных алгоритмах. Второй алгоритм основан на непосредственной пятипараметрической численной минимизации функционала ошибки методом сопряженного градиента (алгоритм «МСГ»). Чтобы избежать локальных экстремумов, его рекомендуется применять в роли уточняющего. В третьем алгоритме улучшена вычислительная обусловленность на коротких интервалах идентификации для работы при повышенном уровне шумов измерений (алгоритм «ЧПМ»). Он основан на четырехпараметрической минимизации функционала ошибки по амплитудам и фазам измерительных сигналов с модуляцией измерительных сигналов. В четвертом алгоритме обработка результатов измерений производится с использованием численных процедур цифровой демодуляции в условиях шумов (алгоритм «ФАПЧ»). В нем применяется математический аппарат задачи фазовой автоподстройки частоты. Модуляция измерительных сигналов выполняется с последующей фильтрацией полученных данных.

На практике выбор соответствующего алгоритма из восьми приведенных (или их комбинации) определяется удобством программной установки на конкретное измерительное устройство гироскопа.

Сравнение точности работы этих алгоритмов выполнялось методами имитационного моделирования. Для этого рассчитывались: 1) получающиеся ошибки идентификации в зависимости от длины интервала наблюдения при фиксированной и переменной пропорции частот цифровой дискретизации и колебаний резонатора; 2) среднеквадратические ошибки идентификации в зависимости от уровня шума в измерительных сигналах (который изменялся от нуля до 20 % от основной амплитуды колебаний). Заметим, что приводимые далее графики представляют собой рассчитанные дискретные точки, условно соединенные между собой линейными функциями.

Процесс моделирования выполнялся по следующей схеме. Сначала были заданы условно

типовые для операций внутреннего контроля безразмерные значения амплитуд: $a_A = 2$, $a_B = 0,1$, а также другие важные величины: $\theta_A = \pi /6$; $\omega/2\pi = 5332$ Гц; частота АЦП = 10^5 (примерно 19 точек на период колебаний резонатора). На этой основе были сформированы функции: $A(t) = a_A \cos \omega t$, $B(t) = a_B \sin \omega t$, а также входящие в измерительные сигналы (2) функции: $C(t) = A \cos 2\theta_A - B \sin 2\theta_A$, $D(t) = A \sin 2\theta_A + B \cos 2\theta_A$.

При отсутствии шумов измерений (когда они крайне малы) на рис. 1 показано сравнение получившихся ошибок в зависимости от числа периодов наблюдения (горизонтальные оси) раздельно по восстановленным параметрам: а) a_A ; б) a_B ; в) θ_A ; г) f . По вертикали на рис. 1, д показано имевшее в расчетах относительное отклонение интервала идентификации дискретизации от периода колебаний резонатора.

Соответствующие графики для заданного короткого интервала идентификации в один период колебаний резонатора в зависимости от частоты АЦП показаны на рис. 2. Здесь по горизонтали указано участвующее в расчетах количество точек на одном периоде колебаний резонатора. Для второй группы алгоритмов влияние частоты дискретизации оказалось неизначительным. А для первой группы алгоритмов улучшение результатов с ростом частоты АЦП объясняется уменьшением влияния нарушения условия периодичности исходных данных. Например, при выполнении условия периодичности для случаев 75 и 150 дискретных значений сигнала на период, ошибки становятся минимальными.

Таким образом, на коротких интервалах идентификации для эффективного применения алгоритмов с настройкой на периодичность сигналов требуется либо увеличивать количество периодов, на которых оцениваются волновые характеристики, либо увеличивать плотность точек дискретизации сигналов. Еще одним решением является введение аппаратной синхронизации оцифровки измерительных сигналов.

На рис. 3 отдельно исследовано влияние шума измерительных сигналов (2) на точность расчета: а) a_A ; б) a_B ; в) θ_A ; г) f . По горизонтали отложено СКО шума в процентах от уровня амплитуды a_A (до 20 %). Приведенные результаты соответствуют средним значениям после обработки 100 000 независимых выборок. При этом график алгоритма БУК на рис. 3, б нарисован условно, показывая отличие принятого алгоритмом значения $a_B = 0$ от выбранного для моделирования $a_B = 0,1$.

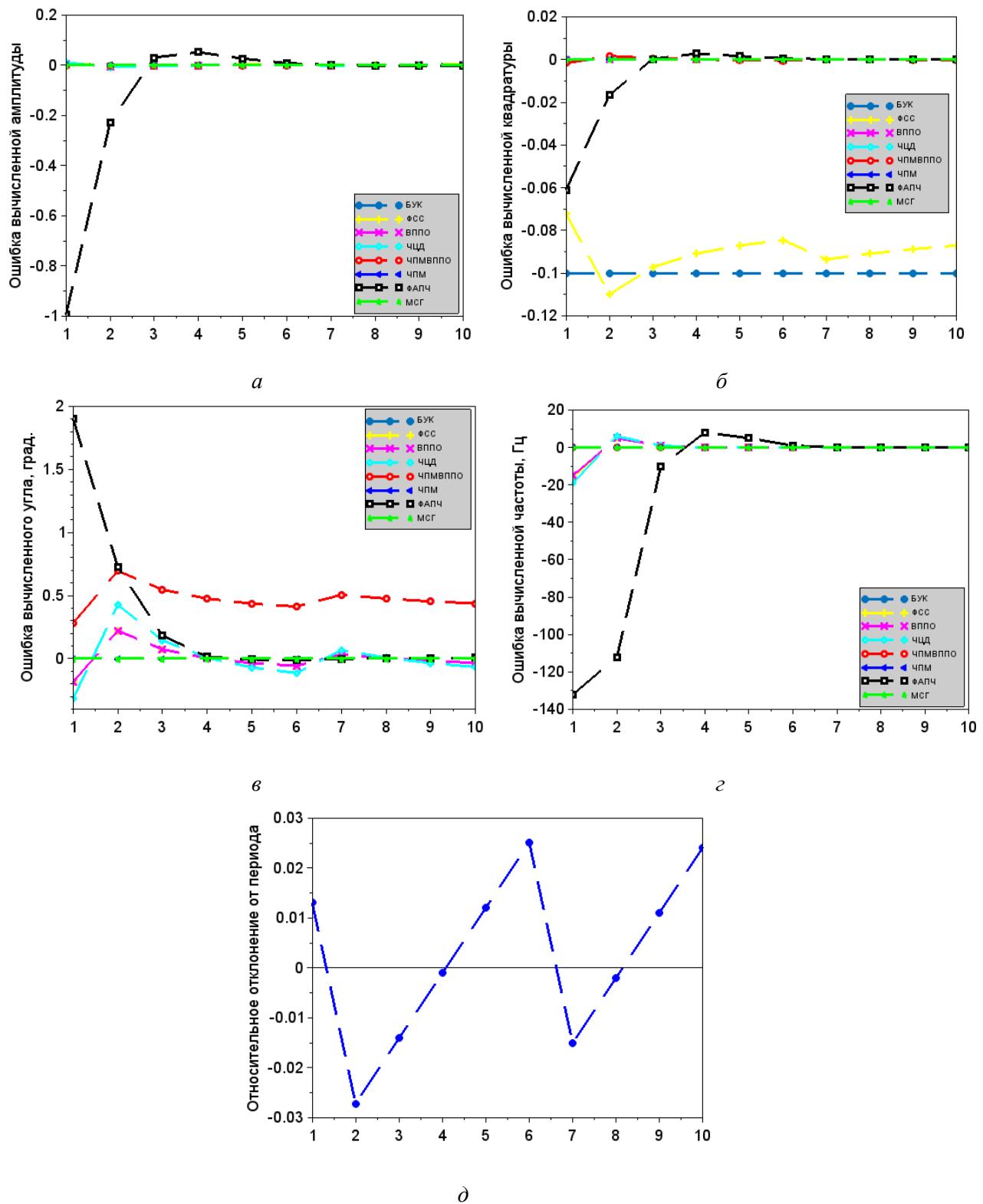


Рис. 1. Ошибки идентификации в зависимости от числа периодов наблюдения по восстановленным параметрам: а – a_A ; б – a_B ; в – θ_A ; г – f ; с учетом имевшего место в расчетах относительного отклонения (d) интервала идентификации от периода колебаний резонатора

Fig. 1. Identification errors depending on the number of observation periods for the reconstructed parameters: а – a_A ; б – a_B ; в – θ_A ; г – f ; taking into account the relative deviation (d) of the identification interval from the resonator oscillation period that took place in the calculations

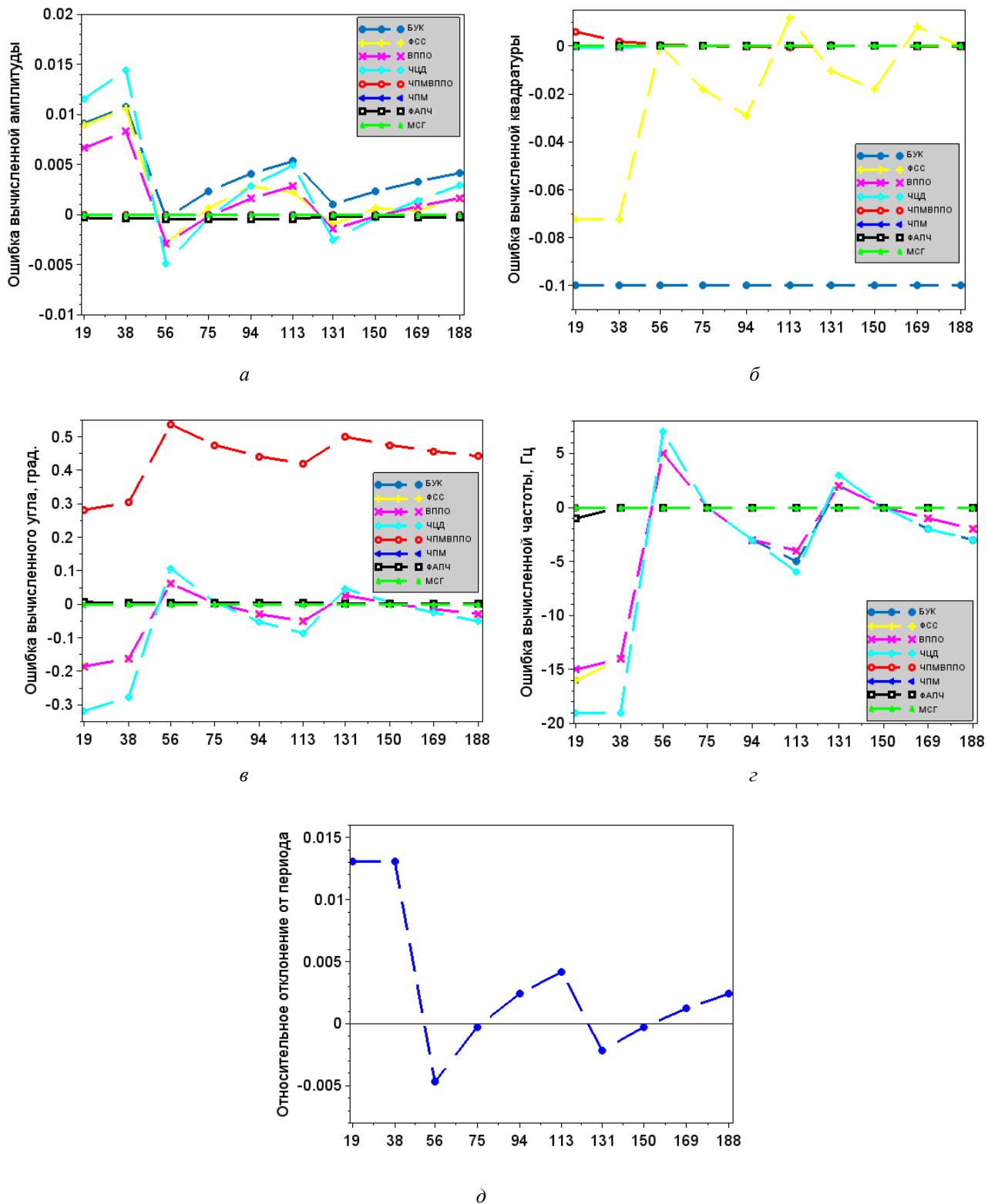


Рис. 2. Графики, аналогичные рис. 1, но построенные в зависимости от частоты АЦП для интервала идентификации в один период колебаний резонатора

Fig. 2. Graphs similar to Fig. 1, but plotted depending on the ADC frequency for the identification interval in one period of resonator oscillations

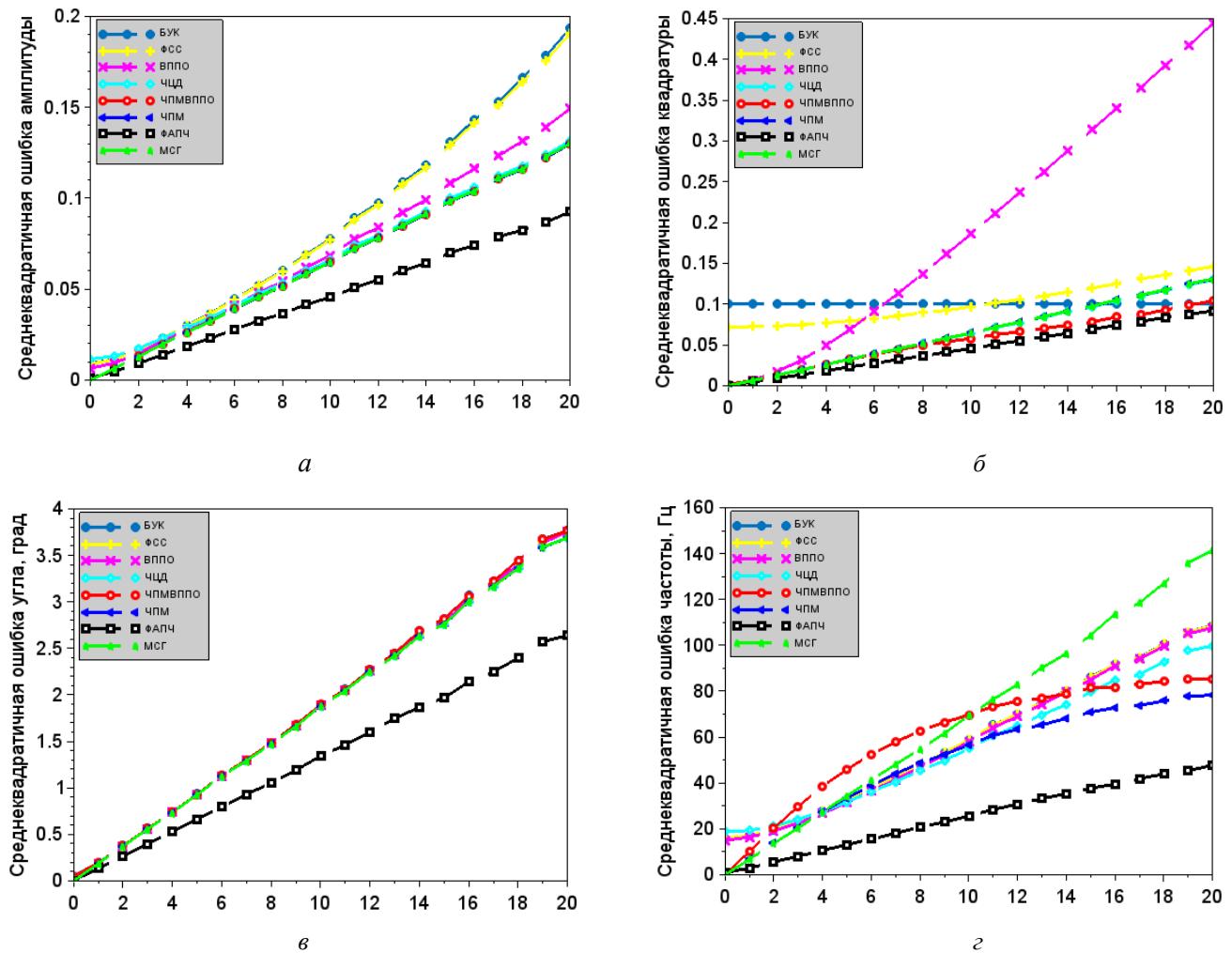


Рис. 3. Влияние шума измерительных сигналов (в процентах от уровня амплитуды a_A) на точность расчета: $a - a_A$; $b - a_B$; $\mathbf{в} - \theta_A$; $\mathbf{г} - f$

Fig. 3. The influence of noise of measuring signals (as a percentage of the amplitude level a_A) on the calculation accuracy: $a - a_A$; $b - a_B$; $\mathbf{в} - \theta_A$; $\mathbf{г} - f$

В расчетах повышенные шумы измерительных сигналов заметно сказывались на работе алгоритма МСГ из-за усиления проявлений локальных минимумов в ходе градиентной оптимизации нелинейного функционала ошибки.

Среди рассмотренных алгоритмов наилучшие результаты при работе в условиях повышенных шумов измеряемых сигналов показал алгоритм ФАПЧ. Это объясняется в первую очередь присутствием в нем дополнительного фильтра низких частот, дополнительно сглаживающего измерительные сигналы.

7. Оценка влияния алгоритмов обработки первичной информации на эффективность идентификации точностных механических характеристик резонаторов

Здесь приведем только некоторые предварительные результаты пробного экспериментального исследования эффективности работы алгоритмов второго уровня идентификации. Для этого был выбран один технологический вариант неподвижного гироскопа. Алгоритм второго уровня идентификации не был настроен на проведение ускоренного контроля.

Рассматривался типовой запуск свободных колебаний резонатора из разных угловых положений до момента их фактической остановки. Полученные рассмотренными алгоритмами результаты приведены в таблице.

Таблица

Table

Алгоритм	$\tau \equiv 1/\nu$, с	$\Delta\tau$, с	θ_μ , град	θ_ω , град	Δf , Гц	R^2
БУК	513,93	1,84	25,28	—	—	0,3746
ФСС	513,92	1,76	25,69	-1,72	1,29e-04	0,4165
ВППО	513,93	2,01	25	-42,07	1,35e-04	0,3513
ЧЦД	512,77	2,54	26,24	-41,8	1,31e-04	0,1393
ЧПМВППО	515,09	1,36	23,05	-41,8	1,31e-04	0,9226
ЧПМ	515,09	1,36	23,04	-41,8	1,31e-04	0,9226
ФАПЧ	515,22	1,4	24,42	-41,8	1,31e-04	0,8434
МСГ	515,15	1,34	22,9	-41,8	1,31e-04	0,9259

Оценки параметров резонатора на основе обработки измерительных сигналов всеми алгоритмами показали схожие оценки. Значения коэффициента детерминации R^2 для первой группы алгоритмов составили менее 0,5, что объясняется большой неопределенностью оценок колебательной картины, особенно амплитуды и квадратуры, так как настройка на периодичность в них не выполнялась. Наилучшее соответствие параметров резонатора модели получено на основе алгоритма метода сопряженных градиентов.

Заключение

Таким образом, для первого уровня идентификации на коротких интервалах наблюдения исследована точность алгоритмов обработки внутренних сигналов измерительного емкостного устройства ТВГ с разной формой физической интерпретации. Они позволяют эффективно формировать исходную информацию для идентификационных моделей нахождения характеристик остаточных разночастотности и разнодобротности резонаторов.

На этапах операционного контроля точностных механических характеристик резонаторов конструктивно разобранных ТВГ пробные исследования на стенде балансировки «Краудион ИТ1-14/1» подтвердили эффективность запрограммированных алгоритмов идентификации первого уровня. В то же время их выбранная программная реализация показала желательность учета синхронизации АЦП с периодом колебаний резонатора гироскопа или же переход к более сложным алгоритмам обработки измерительной информации, не требующие этой синхронизации.

Для второго уровня идентификации предложены алгоритмы ускоренного производственно-го контроля точностных механических характеристик резонаторов ТВГ и теоретически проанализированы их свойства применительно к специальным режимам контроля в условиях поворачивающегося основания гироскопа. Они

призваны уменьшить время проведения комплексного измерения характеристик разночастотности и разнодобротности резонаторов до 10 минут и менее.

Библиографические ссылки

1. Пешехонов В. Г. Перспективы развития гироскопии // Гироскопия и навигация. 2020. Т. 28, № 2 (109). С. 3–10.
2. Волновые твердотельные гироскопы: обзор публикаций / А. А. Маслов, Д. А. Маслов, И. Г. Ниналалов, И. В. Меркульев // Гироскопия и навигация. 2023. Т. 31, № 1 (120). С. 3–25.
3. Волновые твердотельные гироскопы (аналитический обзор) / И. А. Волчихин, А. И. Волчихин, Д. М. Малютин, В. В. Матвеев, В. Я. Распопов, С. В. Телухин, А. П. Шведов // Известия ТулГУ. Технические науки. 2017. Вып. 9. Ч. 2. С. 59–78.
4. Трутнев Г. А., Назаров С. Б., Перевозчиков К. К. Система съема и способы измерения колебаний резонатора твердотельного волнового гироскопа // Вестник МГТУ. Сер. Приборостроение №1 (130). 2020. С. 20–63
5. Басараб М. А., Лунин Б. С., Чуманкин Е. А. Балансировка металлических резонаторов волновых твердотельных гироскопов общего применения // Динамика сложных систем – XXI век. 2021. Т. 15, № 1. С. 58–68.
6. Настройка и калибровка волнового твердотельного гироскопа с металлическим резонатором, работающего в режиме датчика угловой скорости / В. Я. Распопов, Р. В. Алалуев, А. В. Ладонкин, В. В. Лихошерст, С. И. Шепилов // Гироскопия и навигация. 2020. Т. 28, № 1. С. 31–41.
7. Маслов А. А., Маслов Д. А., Меркульев И. В. Электрическая балансировка волнового твердотельного гироскопа с плоскими электродами // XXXI Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам : сборник материалов конференции. Санкт-Петербург, 27–29 мая 2024.
8. Определение параметров резонатора твердотельного волнового гироскопа и моделирование по экспериментальным данным / А. В. Кривов, Р. В. Мельников, Ф. И. Спиридовон, Г. А. Трутнев // Вестник Казанского государственного технического

университета им. А. Н. Туполева. 2019. Вып. 1, № 2. С. 22.

9. Переляев С. Е., Бодунов С. Б., Бодунов Б. П. Экспериментальные исследования основных параметров волнового твердотельного гироскопа в режиме свободной волны // XXXI Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам : сборник материалов конференции. Санкт-Петербург, 27–29 мая 2024.

10. Переляев С. Е., Журавлев В. Ф., Скрипкин А. А. Уравнения упругих колебаний в базисе собственных форм. Трехосный волновой твердотельный гироскоп // XXXI Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам : сборник материалов конференции. Санкт-Петербург, 27–29 мая 2024.

11. Shevchenko S. A., Konotopov O. I. The dynamic characteristics of a resonator of the gyroscope based on elastic waves in solids: finite-element modeling // St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 2021. Vol. 14, iss. 2. P. 65–80.

12. Разработка методики анализа амортизации блока твердотельных волновых гироскопов / Д. И. Мартыненко, А. С. Малюгин, Л. Е. Кочегизова, С. В. Фетисов // XXXI Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам : сборник материалов конференции. Санкт-Петербург, 27–29 мая 2024.

13. Переляев С. Е., Алексин А. В. Оценка резонансной частоты вибраций волнового твердотельного гироскопа // XXXI Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам : сборник материалов конференции. Санкт-Петербург, 27–29 мая 2024.

14. Лунин Б. С., Лопатин В. М. Поверхностное внутреннее трение в высокодобротных резонаторах из кварцевого стекла // Неорганические материалы. 2022. Т. 58, № 6. С. 658–665.

15. Шевченко С. А., Мельников Б. Е. Несовершенства кварцевого стекла и их влияние на динамику резонатора ВТГ // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 4. С. 611–618.

16. Лунин Б. С., Басараб М. А. Диссилияция энергии колебаний в клеевых соединениях механических резонаторов волновых твердотельных гироскопов // XXXI Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам : сборник материалов конференции. Санкт-Петербург, 27–29 мая 2024.

17. Лунин Б. С., Басараб М. А., Захарян Р. А. Рассечение энергии колебаний полусферического резонатора в области крепления // Гироскопия и навигация. 2024. Т. 32, № 2 (125). С. 35–45.

18. Бесплатформенная инерциальная навигационная система на базе твердотельного волнового гироскопа / Г. И. Джанджава, К. А. Бахонин, Г. М. Виноградов, А. В. Требухов // Гироскопия и навигация. 2008. № 1 (60). С. 22–32.

19. О возможностях выбора метода оценки дрейфовых характеристик волновых твердотельных гироскопов ГЕ 006 на основе экспериментального подтверждения / О. Н. Лузгина, С. А. Москалев, Н. В. Недопекин, А. С. Новоселов, А. А. Папко, А. В. Поспелов // Надежность и качество сложных систем. 2021. № 2. С. 53–61.

20. Лунин Б. С., Матвеев В. А., Басараб М. А. Волновой твердотельный гироскоп. Теория и технологии. М. : Радиотехника. 2014. 176 с.

21. Компенсация уходов волнового твердотельного гироскопа, вызванных анизотропией упругих свойств монокристаллического резонатора / А. А. Маслов, Д. А. Маслов, И. В. Меркуров, В. В. Подалков // Гироскопия и навигация. 2020. Т. 28, № 2 (109). С. 25–36.

* * *

Increase in the Measuring Speed of Residual Frequency Differences and Different Q of Resonators of Integrating Solid-State Wave Gyroscopes in Rotation Modes

R. I. Mingazov, Post-graduate, Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk, Russia

V. N. Syakterev, PhD in Engineering, Associate Professor, Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk, Russia

K. V. Shishakov, DSc in Engineering, Professor, MIREA – Russian Technological University, Moscow, Russia

The purpose of the article is to develop and analyze the effectiveness of various methods and computational algorithms for accelerated comprehensive control of resonator frequency and quality parameter residual values of integrating solid-state wave gyroscopes. It is proposed to perform measurements in the free oscillation modes of the rotating gyroscope resonator. This will speed up the production control of the characteristics during resonator balancing, as well as during the structural assembly of gyroscopes. In addition, they can be useful in performing operational diagnostics and monitoring the preservation of the selected characteristics as a part of the synthesis of an integrated system for actively improving the accuracy of the gyroscopes in question.

Two-level schemes for identifying characteristics of free oscillations of gyroscope resonators with mutual coordination of computational algorithms of the two levels were chosen as the basis for the studied methods. The first level of identification is the processing of signals from the gyroscope measuring device in order to detect slowly changing functions of the amplitudes and angles of standing waves. Then, on its basis, the identification of mathematical model

design parameters of gyroscope resonator free oscillations for further calculation of the resonator frequency and quality parameters is carried out on the second level of the computing circuit.

Therefore, the following issues are considered in the article: mathematical problem formulations of two-level identification of the resonator accuracy mechanical characteristics; options for choosing the duration of the measurement mode of the resonator accuracy mechanical characteristics; the influence of the observation interval on mathematical schemes for solving inverse problems of identifying the resonator accuracy mechanical characteristics in the modes of rotating gyroscopes; algorithmic support of methods for production control of the parameters of residual frequency and Q-of-Q resonators when rotating at a constant speed or by rotating the gyroscope at an arbitrary angular velocity; effectiveness of algorithms for processing primary information; evaluation of primary information processing algorithms on the efficiency of identification of accuracy mechanical characteristics of resonators.

Keywords: solid-state wave gyroscope, resonant oscillations, wave pattern, identification, free oscillations, oscillatory-dissipative characteristics, measurement techniques.

Получено: 11.02.25

Образец цитирования

Мингазов Р. И., Сыктерев В. Н., Шишацков К. В. Повышение скорости измерения остаточных разночастотности и разнодобротности резонаторов интегрирующих твердотельных волновых гироскопов в режимах вращения // Интеллектуальные системы в производстве. 2025. Т. 23, № 2. С. 12–27. DOI: 10.22213/2410-9304-2025-2-11-27.

For Citation

Mingazov R.I., Syakterev V.N., Shishakov K.V. [Increase in the Measuring Speed of Residual Frequency Differences and Different Q of Resonators of Integrating Solid-State Wave Gyroscopes in Rotation Modes]. *Intellektual'nye sistemy v proizvodstve*. 2025, vol. 23, no. 2, pp. 12-27 (in Russ.). DOI: 10.22213/2410-9304-2025-2-11-27.