УДК 621.317.08
DOI: 10.22213/2410-9304-2025-2-112-120

Быстрое дискретное преобразование Фурье комплексных финитных сигналов с числом отсчетов, не равным степени двух, при ограниченных возможностях вычислительных средств

А. В. Пономарев, кандидат экономических наук, доцент, ИжГТУ имени М.Т. Калашникова, Ижевск, Россия
Н. В. Пономарева, кандидат технических наук, доцент, Севастопольский государственный университет, Севастополь, Россия
О. В. Пономарева, доктор технических наук, профессор, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова, Ижевск, Россия

Статья посвящена развитию теории цифровой обработки финитных дискретных сигналов, разработке метода и алгоритма быстрого дискретного преобразования Фурье комплексных финитных сигналов с числом отсчетов, не равным степени двух, при ограниченных возможностях вычислительных средств. Разработка метода и алгоритма проведена на основе анализа внутренней структуры базиса дискретного преобразования Фурье – системы дискретных экспоненциальных функций. Анализ структуры базиса дискретного преобразования Фурье позволил устранить один существенный недостаток алгоритмов быстрого преобразования Фурье – ограниченность длительностей финитных дискретных сигналов, которые допускают применение быстрых процедур. Работа является продолжением исследований авторов в области цифрового спектрального и векторного анализа: в частности, в ней рассмотрен новый базис дискретного преобразования Фурье, который предусматривает переход в частотную область с выбранным параметром финитного дискретного сигнала во временной области. В статье дано теоретическое и экспериментальное обоснование эффективности и результативности предложенного метода и алгоритма быстрого преобразования Фурье комплексных финитных сигналов с числом отсчетов, не равным степени двух, при ограниченных возможностях вычислительных средств. Результативность и эффективность предлагаемого метода и алгоритма быстрого дискретного преобразования Фурье подтверждается следующими доказанными положениями. Во-первых, существенно расширяется диапазон длительностей финитных дискретных сигналов, исследуемых быстрыми методами. Во-вторых, исследователь может реализовать преимущества метода и алгоритма при ограниченных возможностях, имеющихся вычислительных средств. В-третьих, с помощью предлагаемого метода и алгоритма быстрого дискретного преобразования Фурье возможно вычислять коэффициенты (бины) ДПФ в выбранной области спектра финитного дискретного комплексного сигнала. Роль и место работы представляется важным и актуальным во многих предметных областях науки и техники, таких, например, как виброакустическое функциональное диагностирование объектов в машиностроении и медицине, а также в обнаружении и классификации объектов.

Ключевые слова: быстрое преобразование Фурье, финитный дискретный сигнал, спектральный анализ, векторный анализ, упорядочение по модулю.

Введение

Трудно назвать область приложения цифровой обработки сигналов (ЦОС), которая бы не опиралась на дискретное преобразование Фурье (ДПФ) и быстрый алгоритм его вычисления – быстрое преобразование Фурье (БПФ) несмотря на то что термин БПФ является в настоящее время устоявшимся термином ЦОС, представляет собой дословный перевод английского термина FFT, но он является в то же время неудачным и некорректным. Действительно, термин БПФ (впрочем, как и FFT) обозначает не новое преобразование, а лишь алгоритм быстрой реализации ДПФ.

Даже краткий анализ отечественных и зарубежных информационных источников [1–20] позволяет положительно ответить на вопрос об эффективности и результативности применения спектрального и векторного анализа во многих предметных областях науки и техники. Однако алгоритмы БПФ обладают одним существенным недостатком: число отсчетов в анализируемых финитных дискретных сигналах должно быть степенью основания используемого алгоритма БПФ.

Наиболее часто используются алгоритмы БПФ по основанию два. В этом случае длительности финитных дискретных сигналов должны быть $N = 2^p$, где p – любое целое положительное число. Нетрудно убедиться, что число отсчетов в финитных дискретных сигналах, которые возможно обрабатывать алгоритмами БПФ представляет собой геометрическую прогрессию, «шаг» которой определяется основанием применяемого алгоритма БПФ.

Несложно убедиться и в том, что в настоящее время отсутствуют методы вычисления быстрого дискретного преобразования Фурье комплексных финитных дискретных сигналов с числом отсчетов, не равным степени двух, и длительностями, большими, чем вычислительные возможности применяемого алгоритма БПФ (алгоритм БПФ может быть реализован как аппаратными, так и программными средствами).

Целью исследования является разработка метода и алгоритма быстрого дискретного преобразования Фурье свободного от указанных выше недостатков.

Классическое прямое дискретное преобразование Фурье финитного дискретного сигнала размерностью $2^p \cdot r$

Матричная форма классического прямого ДПФ финитного дискретного сигнала размерностью Nr, где $N = 2^p$, p, r – любые целые положительные числа, задается следующим матричным уравнением:

$$\mathbf{S}_N = \frac{1}{Nr}\mathbf{F}_{Nr}\mathbf{X}_{Nr}\,, \qquad (1)$$

где $\mathbf{X}_{Nr} = \left[x(0), x(1),....., x(Nr-1)\right]^T$ – представление $x(n)$, $n = \overline{0, Nr-1}$, в виде вектора Nr-мерного линейного пространства; T – знак транспонирования; $\mathbf{S}_{Nr} = \left[s(0), s(1),..., s(Nr-1)\right]^T$ – вектор коэффициентов разложения $\mathbf{X}_{Nr}$ по системе ДЭФ, задаваемой матрицей $\mathbf{F}_{Nr}$:

$$\mathbf{F}_{Nr} = \begin{array}{c|ccccc} & 0 & 1 & . & . & (Nr-1) \;\; n \\ \hline 0 & 1 & 1 & . & . & 1 \\ 1 & 1 & W_{Nr}^{1} & . & . & W_{Nr}^{(Nr-1)} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ (Nr-1) & 1 & W_{Nr}^{(Nr-1)} & . & . & W_{Nr}^{(Nr-1)(Nr-1)} \\ k & & & & & \end{array}, \qquad (2)$$

где $W_{Nr}^{kn} = \exp\left(-j\dfrac{2\pi}{Nr}kn\right)$; $k, n = \overline{0, Nr-1}$; k – дискретная переменная, отвечающая за частоту; n – дискретная переменная, отвечающая за время.

Отметим, что при значениях r, не являющихся степенью двух применение алгоритма БПФ по основанию два для сигнала $\mathbf{X}_{Nr}$, невозможно по определению.

Параметрическое прямое дискретное преобразование Фурье второго вида финитного дискретного сигнала размерностью 2^p

В работах [21–25] авторами настоящей статьи введено и исследовано параметрическое преобразование Фурье. Там же доказано, что для данных унитарных преобразований при $N = 2^p$ существуют быстрые алгоритмы параметрического дискретного преобразования Фурье – алгоритмы БПФ-П.

Исходя из целей настоящего исследования приведем формулу параметрического прямого дискретного преобразования Фурье второго вида. Матричная форма прямого ДПФ-П второго вида задается следующим матричным уравнением:

$$\mathbf{S}_{N,\theta} = \frac{1}{N}\mathbf{F}_{N,\theta,1}\mathbf{X}_N\,; \qquad 0 \le \theta < 1, \qquad (3)$$

где $\mathbf{S}_{N,\theta} = \left[s(0,\theta), s(1,\theta),..., s((N-1),\theta)\right]^T$ – вектор коэффициентов ДПФ-П, полученных путем измерения спектра в системе ДЭФ-П, которая задается матрицей $\mathbf{F}_{N,\theta,1}$:

$$\mathbf{F}_{N,\theta,1} = \begin{array}{c|ccccc} & 0 & 1 & . & . & (N-1) \;\; n \\ \hline 0 & 1 & 1 & . & . & 1 \\ 1 & W_N^{\theta} & W_N^{(1+\theta)} & . & . & W_N^{(N-1+\theta)} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ (N-1) & W_N^{(N-1)\theta} & W_N^{(N-1)(1+\theta)} & . & . & W_N^{(N-1)(N-1+\theta)} \\ k & & & & & \end{array}, \qquad (4)$$

где $W_N^{k(n+\theta)} = \exp\left(-j\dfrac{2\pi}{N}kn\right)$; $k, n = \overline{0, N-1}$; $0 \le \theta < 1$.

Блочная организация базисной системы дискретного преобразования Фурье размерностью $2^p \cdot r \times 2^p \cdot r$

Предположим, что в распоряжении исследователя есть алгоритм по основанию два размерностью $N = 2^p$, p и необходимо найти вектор коэффициентов разложения $\mathbf{X}_{Nr}$ по системе ДЭФ, задаваемой матрицей $\mathbf{F}_{Nr}$ (2).

Для решения этой задачи воспользуемся свойствами блочной структуры базисной системы дискретного преобразования Фурье (2), для выявления которых применим операцию сравнимости по модулю r к множеству номеров столбцов матрицы $\mathbf{F}_{Nr}$ (2). Обозначим это множество через D: $D = \{\, 0,1,2,..., (Nr-1) \,\}$.

Применим к множеству D отношение сравнимости по модулю r. В силу того, что это отношение является отношением эквивалентности, оно разбивает множество D на r классов вычетов по модулю r:

$$D_0 = \{\, 0,\, r,...,\, r(N-1) \,\};$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$D_{r-1} = \{\, r-1\,, r + (r-1),..., Nr-1 \,\}; \qquad (5)$$
$$D_i \ne \varnothing; \qquad D_i \bigcap_{i \ne j} D_j = \varnothing; \qquad \bigcup_{i=0}^{r-1} D_i = D.$$

Переупорядочим столбцы матрицы $\mathbf{F}_{Nr}$, (2) в соответствии с классами D_i вычетов по модулю r (3). Обозначим полученную матрицу через

$\mathbf{B}_r$. Матрицу $\mathbf{B}_r$, рассечем вертикальными линиями на r блоков (на r прямоугольных матриц) $\mathbf{B}_{i,\text{блок}}$, где $\mathrm{i}=\overline{0,(\mathrm{r}-1)}$ размером $Nr \times N$ каждый (каждая):

$$\mathbf{B}_{0,\text{блок}} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 0 & r & . & . & (N-1)r \end{array} \quad n \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ (Nr-1) \end{array} & \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & . & . & 1 \\ 1 & W_{Nr}^{r} & . & . & W_{Nr}^{r(N-1)} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 1 & W_{Nr}^{(Nr-1)r} & . & . & W_{Nr}^{(N-1)r(Nr-1)} \end{array} \right] \\ k & \end{array}; \quad (6)$$

$$\begin{array}{c} . \\ . \\ . \end{array}$$

$$\mathbf{B}_{i,\text{блок}} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} i & r+i & . & . & (N-1)r+i \end{array} \quad n \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ (Nr-1) \end{array} & \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & . & . & 1 \\ W_{Nr}^{i} & W_{Nr}^{(r+i)} & . & . & W_{Nr}^{(N-1)r+i} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ W_{Nr}^{(Nr-1)i} & W_{Nr}^{(Nr-1)(r+i)} & . & . & W_{Nr}^{((N-1)r+i)(Nr-1)} \end{array} \right] \\ k & \end{array}; \quad (7)$$

$$\begin{array}{c} . \\ . \\ . \end{array}$$

$$\mathbf{B}_{(r-1),\text{блок}} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} r-1 & 2r-1 & . & . & (Nr-1) \end{array} \quad n \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ (Nr-1) \end{array} & \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & . & . & 1 \\ W_{Nr}^{(r-1)} & W_{Nr}^{(2r-1)} & . & . & W_{Nr}^{(Nr-1)} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ W_{Nr}^{(Nr-1)(r-1)} & W_{Nr}^{(Nr-1)(2r-1)} & . & . & W_{N}^{(Nr-1)(Nr-1)} \end{array} \right] \\ k & \end{array}. \quad (8)$$

Матрицы $\mathbf{B}_{i,\text{блок}}$, $i=\overline{0,(r-1)}$, также представим в виде блочных матриц, рассекая каждую из них горизонтальными линиям на r блоков по N строк в каждом блоке. В результате получим следующие блочные матрицы:

$$\mathbf{B}_{0,\text{блок}} = \begin{array}{cc} & 0 \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ (r-1) \end{array} & \left[\begin{array}{c} B_{0,0} \\ B_{1,0} \\ . \\ . \\ B_{(r-1),0} \end{array} \right] \end{array}; \ldots; \quad \mathbf{B}_{i,\text{блок}} = \begin{array}{cc} & i \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ (r-1) \end{array} & \left[\begin{array}{c} B_{0,i} \\ B_{1,i} \\ . \\ . \\ B_{(r-1),i} \end{array} \right] \end{array};$$

$$\mathbf{B}_{(r-1),\text{блок}} = \begin{array}{cc} & (r-1) \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ (r-1) \end{array} & \left[\begin{array}{c} B_{0,(r-1)} \\ B_{1,(r-1)} \\ . \\ . \\ B_{(r-1),(r-1)} \end{array} \right] \end{array}. \quad (9)$$

Блочные матрицы (9) позволяют представить матрицу $\mathbf{B}_r$ в блочной форме:

$$\mathbf{B}_r = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & . & . & (r-1) \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ (r-1) \end{array} & \left[\begin{array}{ccccc} B_{0,0} & B_{0,1} & . & . & B_{0,(r-1)} \\ B_{1,0} & B_{1,1} & . & . & B_{1,(r-1)} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ B_{(r-1),0} & B_{(r-1),1} & . & . & B_{(r-1),(r-1)} \end{array} \right] \end{array}. \quad (10)$$

С учетом (6), (7), (8), (9) можно установить общую структуру, блочных матриц $B_{0,m}$, $m=\overline{0,(r-1)}$, составляющих нулевую строку блочной матрицы $\mathbf{B}_{r.}$ (10):

$$B_{0,m} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & . & . & (N-1) \end{array} \quad n \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ (N-1) \end{array} & \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & . & . & 1 \\ W_N^{\frac{m}{r}} & W_N^{(1+\frac{m}{r})} & . & . & W_N^{(N-1+\frac{m}{r})} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ W_N^{(N-1)\frac{m}{r}} & W_N^{(N-1)(1+\frac{m}{r})} & . & . & W_N^{(N-1)(N-1+\frac{m}{r})} \end{array} \right] \\ k & \end{array}. \quad (11)$$

Сравнив матрицы $B_{0,m}$, $m=\overline{0,(r-1)}$ с матрицей прямого преобразования ДПФ-П второго вида (4) при различных значениях параметра θ, несложно установить их идентичность при $\theta=\frac{m}{r}$, $m=\overline{0,(r-1)}$. Введя матрицу поправочных коэффициентов $\mathbf{F}_r$:

$$\mathbf{F}_r = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & . & . & (r-1) \end{array} \quad n \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ (r-1) \end{array} & \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & . & . & 1 \\ 1 & W_r^{1} & . & . & W_r^{(r-1)} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 1 & W_r^{(r-1)} & . & . & W_r^{(r-1)(r-1)} \end{array} \right] \\ k & \end{array} \quad (12)$$

и воспользовавшись операцией произведения двух матриц по Адамару, представим матрицу $\mathbf{B}_r$ в следующем виде:

$$\mathbf{B}_r = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & . & . & (r-1) \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ (r-1) \end{array} & \left[\begin{array}{ccccc} B_{0,0} & B_{0,1} & . & . & B_{0,(r-1)} \\ B_{0,0} & W_r^{1} B_{0,1} & . & . & W_r^{(r-1)} B_{0,(r-1)} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ B_{0,0} & W_R^{(r-1)} B_{0,1} & . & . & W_r^{(r-1)(r-1)} B_{0,(r-1)} \end{array} \right] \end{array}. \quad (13)$$

Матрица (13) открывает путь к построению алгоритма быстрого дискретного преобразования Фурье комплексных финитных сигналов с числом отсчетов не равным степени двух при ограниченных возможностях вычислительных средств.

Метод и алгоритм быстрого дискретного преобразования Фурье комплексных финитных сигналов с числом отсчетов, не равным степени двух при ограниченных возможностях вычислительных средств

Обозначим множество строк вектора $\mathbf{X}_{Nr}$ (1) через $C : C = \{\, 0,1,2,...,(Nr-1)\,\}$. Применив к множеству C отношение сравнимости по модулю r (28), получим r векторов $\mathbf{X}_{N,i}$, $i = \overline{0,(r-1)}$:

$$\mathbf{X}_{N,0} = \begin{array}{c} 0 \\ r \\ . \\ . \\ (N-1)r \end{array} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(r) \\ . \\ . \\ x(N-1)r \end{bmatrix}; \qquad (14)$$

.

.

.

$$\mathbf{X}_{N,i} = \begin{array}{c} i \\ r+i \\ . \\ . \\ (N-1)r+i \end{array} \begin{bmatrix} x(i) \\ x(r+i) \\ . \\ . \\ x((N-1)r+i) \end{bmatrix}; \qquad (15)$$

.

.

.

$$\mathbf{X}_{N,(r-1)} = \begin{array}{c} r-1 \\ 2r-1 \\ . \\ . \\ (Nr-1) \end{array} \begin{bmatrix} x(r-1) \\ x(2r-1) \\ . \\ . \\ x((Nr-1) \end{bmatrix}. \qquad (16)$$

Раскрыв общую структуру блочных матриц $B_{0,m}$, при $m = \overline{0,(r-1)}$:

$$B_{0,0} = \begin{array}{c|ccccc} & 0 & 1 & . & . & (N-1) \quad n \\ \hline 0 & 1 & 1 & . & . & 1 \\ 1 & 1 & W_N & . & . & W_N^{(N-1)} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ (N-1) & 1 & W_N^{(N-1)} & . & . & W_N^{(N-1)(N-1)} \\ k & & & & & \end{array}; \qquad (17)$$

$$B_{0,1} = \begin{array}{c|ccccc} & 0 & 1 & . & . & (N-1) \quad n \\ \hline 0 & 1 & 1 & . & . & 1 \\ 1 & W_N^{\frac{1}{r}} & W_N^{(1+\frac{1}{r})} & . & . & W_N^{(N-1+\frac{1}{r})} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ (N-1) & W_N^{(N-1)\frac{1}{r}} & W_N^{(N-1)(1+\frac{1}{r})} & . & . & W_N^{(N-1)(N-1+1)} \\ k & & & & & \end{array}; \qquad (18)$$

.

.

.

$$B_{0,(r-1)} = \begin{array}{c|ccccc} & 0 & 1 & . & . & (N-1) \quad n \\ \hline 0 & 1 & 1 & . & . & 1 \\ 1 & W_N^{\frac{(r-1)}{r}} & W_N^{(1+\frac{(r-1}{r})} & . & . & W_N^{(N-1+\frac{(r-1)}{r})} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ (N-1) & W_N^{(N-1)\frac{(r-1)}{r}} & W_N^{(N-1)(1+\frac{(r-1)}{r})} & . & . & W_N^{(N-1)(N-1+\frac{(r-1)}{r})} \\ k & & & & & \end{array} \qquad (19)$$

можно найти матричные произведения:

$$\mathbf{G}_{0,0} = B_{0,0} \cdot \mathbf{X}_{N,0}\,; \mathbf{G}_{0,1} = B_{0,1} \cdot \mathbf{X}_{N,1}\,; \cdot \quad \cdot \quad \cdot\,;$$

$$\mathbf{G}_{0,(r-1)} = B_{0,(r-1)} \cdot \mathbf{X}_{N,(r-1)}\,. \qquad (20)$$

Просуммировав полученные матричные произведения в соответствии с матрицей поправочных коэффициентов $\mathbf{F}_r$ (12), получим все N коэффициентов (бинов) ДПФ финитного сигнала длительностью в Nr отсчетов.

Отметим при этом, что, во-первых, N коэффициентов (бинов) ДПФ финитного сигнала будут получены быстрым методом, поскольку матричные произведения $\mathbf{G}_{0,0}$, $\mathbf{G}_{0,1}$, $\cdot \ \cdot \ \cdot$, $\mathbf{G}_{0,(r-1)}$ могут выполняться с помощью алгоритмов БПФ-П. И во-вторых, последовательности финитного сигнала длительностью в $2^p r$ (1) отсчетов представляют собой арифметическую последовательность, в $2^p r$ (1) отсчетов «шаг» которой значительно меньше, чем у геометрической последовательности в 2^p отсчетов.

Это обстоятельство является дополнительным преимуществом предлагаемого метода и алгоритма быстрого дискретного преобразования Фурье комплексных финитных сигналов.

Для подтверждения полученных теоретических результатов о внутренней структуре базиса ДПФ проведено численное моделирование при различных $N = 2^p$ и r.

Часть результатов численного моделирования для $N = 2^p = 8$ и $r = 3$ приведены в табл. 1–11.

В табл. 1 приведен смоделированный случайный финитный дискретный сигнал $\mathbf{X}_{Nr}$, значения которого распределены по нормальному закону с математическим ожиданием 0 и среднеквадратическим отклонением 1.

В табл. 2 приведено ДПФ случайного комплексного финитного дискретного сигнала $\mathbf{X}_{Nr}$.

В табл. 3–5 приведены векторы, упорядоченные по модулю r: $\mathbf{X}_{N,0}$, $\mathbf{X}_{N,1}$, $\mathbf{X}_{N,1}$.

В табл. 6–8 приведены спектральные векторы $\mathbf{G}_{0,0}$, $\mathbf{G}_{0,1}$, $\mathbf{G}_{0,2}$.

В табл. 9–11 приведены спектральные векторы $\mathbf{S}_{0,0}$, $\mathbf{S}_{0,1}$, $\mathbf{S}_{0,2}$.

Таблица 1. **Случайный комплексный финитный дискретный сигнал** $\mathbf{X}_{Nr}$

Table 1. **Random complex finite discrete signal** $\mathbf{X}_{Nr}$

1,203 + 2,19i	1,737 – 0,70i	–0,474 + 2,090i	1,677 + 1,260i	–1,280 – 0,744i	–0,942 + 0,746i	0,270 –0,229i	0,270 –0,229i
–1,428 + 0,399i	–0,509 + 0,835i	0,068 + 0,755i	–0,374 –1,360i	1,531 + 0,371i	–0,100 –0,384i	–0,680 –1,887i	–0,754 –0,063i
1,165 + 0,202i	1,155 – 0,425i	0,730 + 2,137i	1,478 + 0,055i	–0,593 + 0,224i	0,281 + 1,503i	–1,224 –1,820	0,023 –1,130i

Таблица 2. **ДПФ комплексного финитного дискретного сигнала** $\mathbf{X}_{Nr}$

Table 2. **DFT of a complex finite discrete signal** $\mathbf{X}_{Nr}$

0,151 + 0,198i	0,230 + 0,331i	0,041 –0,317i	0,251 –0,385i	0,306 + 0,040i	–0,225 + 0,073i	0,329 + 0,151i	0,030 + 0,362i
0,153 + 0,201i	–0,108 + 0,262i	0,061 + 0,245i	0,050 –0,054i	0,113 + 0,277i	–0,061 –0,369i	0,244 –0,376i	–0,113 + 0,009i
–0,161 + 0,599i	0,043 + 0,306i	–0,001 + 0,148i	0,035 + 0,100i	0,068 + 0,045i	–0,308 + 0,271i	0,060 + 0,070i	0,011 + 0,006i

Таблица 3. **Комплексный финитный дискретный сигнал** $\mathbf{X}_{N,0}$

Table 3. **Complex finite discrete signal** $\mathbf{X}_{N,0}$

1,203 + 2,199i	–0,474 + 2,090i	–0,942 + 0,746i	–0,509 + 0,835i	1,531 + 0,371i	–0,680 – 1,887i	0,730 + 2,137i	0,281 + 1,503i

Таблица 4. **Комплексный финитный дискретный сигнал** $\mathbf{X}_{N,1}$

Table 4. **Complex finite discrete signal** $\mathbf{X}_{N,1}$

0,667 + 0,725i	1,677 + 1,260i	0,270 – 0,229i	0,068 + 0,755i	–0,100 – 0,384i	1,165 + 0,202i	1,478 + 0,055i	–1,224 – 1,820i

Таблица 5. **Комплексный финитный дискретный сигнал** $\mathbf{X}_{N,1}$

Table 5. **Complex finite discrete signal** $\mathbf{X}_{N,1}$

1,737 – 0,700i	–1,280 – 0,744i	–1,428 + 0,399i	–0,374 – 1,360i	–0,754 – 0,063i	1,155 – 0,425i	–0,593 + 0,224i	0,023 – 1,130i

Таблица 6. **Спектральный вектор** $\mathbf{G}_{0,0}$

Table 6. **Spectral vector** $\mathbf{G}_{0,0}$

0,142 + 0,999i	0,165 + 0,899i	0,101 + 0,076i	0,337 – 0,339i	0,488 + 0,364i	–0,595 – 0,024i	0,635 – 0,154i	–0,071 + 0,378i

Таблица 7. **Спектральный вектор** $\mathbf{G}_{0,1}$

Table 7. **Spectral vector** $\mathbf{G}_{0,1}$

0,500 + 0,070i	0,301 – 0,084i	–0,072 – 0,461i	0,342 – 0,395i	0,014 – 0,082i	0,513 + 0,336i	0,564 + 0,463i	0,079 + 0,246i

Таблица 8. **Спектральный вектор $\mathbf{G}_{0,2}$**

Table 8. **Spectral vector $\mathbf{G}_{0,2}$**

0,189 – 0,475i	0,224 + 0,179i	0,095 – 0,569i	0,074 – 0,421i	0,416 – 0,159i	–0,595 – 0,092i	–0,210 + 0,145i	0,084 + 0,462i

Таблица 9. **Спектральный вектор $\mathbf{S}_{0,0}$**

Table 9. **Spectral vector $\mathbf{S}_{0,0}$**

0,151 + 0,198i	0,230 + 0,331i	0,041 – 0,317i	0,251 – 0,385i	0,306 + 0,040i	–0,225 + 0,073i	0,329 + 0,151i	0,030 + 0,362i

Таблица 10. **Спектральный вектор $\mathbf{S}_{0,1}$**

Table 10. **Spectral vector $\mathbf{S}_{0,1}$**

0,153 + 0,201i	–0,108 + 0,262i	0,061 + 0,245i	0,050 – 0,054i	0,113 + 0,277i	–0,061 – 0,369i	0,244 – 0,376i	–0,113 + 0,009i

Таблица 11. **Спектральный вектор $\mathbf{S}_{0,2}$**

Table 11. **Spectral vector $\mathbf{S}_{0,2}$**

–0,161 + 0,599i	0,043 + 0,306i	–0,001 + 0,148i	0,035 + 0,100i	0,068 + 0,045i	–0,308 + 0,271i	0,060 + 0,070i	0,011 + 0,006i

Результаты численного моделирования, в том числе и приведенные в табл. 1–11, подтвердили полученные теоретические результаты о внутренней организации базиса ДПФ и возможности построения метода и алгоритма быстрого дискретного преобразования Фурье комплексных финитных сигналов с числом отсчетов не равным степени двух при ограниченных возможностях вычислительных средств.

Результативность и эффективность метода и алгоритма быстрого дискретного преобразования Фурье комплексных финитных сигналов с числом отсчетов, не равным степени двух, при ограниченных возможностях вычислительных средств

Результативность и эффективность предлагаемого метода и алгоритма быстрого дискретного преобразования Фурье комплексных финитных сигналов с числом отсчетов, не равным степени двух, при ограниченных возможностях вычислительных средств подтверждается следующими доказанными положениями.

Во-первых, предлагаемый метод и алгоритм быстрого дискретного преобразования Фурье позволяет анализировать финитные дискретные комплексные сигналы длительностью $N = 2^p \cdot r$; где p, r – некоторые целые, положительные числа. Это, с одной стороны, позволяет анализировать быстрыми алгоритмами комплексные финитные сигналы с числом отсчетов, не равным степени двух (Поскольку в настоящее время такая возможность отсутствует), с другой – существенно расширяет диапазон длительностей исследуемых сигналов.

Во-вторых, исследователь может реализовать указанные выше преимущества при ограниченных возможностях имеющихся у него вычислительных средств.

В-третьих, с помощью предлагаемого метода и алгоритма быстрого дискретного преобразования Фурье возможно вычислять коэффициенты (бины) ДПФ в выбранной области спектра финитного дискретного сигнала.

Заключение

Разработан эффективный и результативный метод и алгоритм быстрого дискретного преобразования Фурье комплексных финитных сигналов с числом отсчетов, не равным степени двух при ограниченных возможностях вычислительных средств.

В статье предложен метод устранения существенного недостатка алгоритмов быстрого преобразования Фурье – ограниченность длительностей комплексных и действительных финитных дискретных сигналов степенью основания применяемого алгоритма БПФ.

Используя свойство комплексной симметрии спектра действительных финитных дискретных сигналов, можно дополнительно сократить вычислительные затраты на получение бинов ДПФ.

Предложенный метод быстрого дискретного преобразования Фурье в силу доказанной его результативности и эффективности существенно расширяет возможности методов цифрового спектрального и векторного анализа комплексных и действительных финитных дискретных сигналов различной структуры во многих предметных областях науки и техники.

Библиографические ссылки

1. Gonzalez R.C., Woods R.E. Digital Image Processing, 4th Ed. Published by Pearson. 2018. 1168 p**.**

2. *Marple S. L. Jr.* Digital Spectral Analysis**.** 2nd edition. New York: Dover Publications, 2019. 435 p.

3. *Лобатый А. А., Бумай А. Ю.* Особенности построения алгоритмов оценивания параметров многомерных случайных процессов // Системный анализ и прикладная информатика. 2020. № 1. С. 24–32. URL: https://doi.org/10.21122/2309-4923-2020-1-24-32

4. *Zamparo M.* Large Deviations in Discrete-Time Renewal Theory // Stochastic Process. Appl. 2021. V. 139. P. 80–109. URL: https://doi.org/10.1016/j.spa.2 021. 04.01 4

5. *Fahelelbom KM, Saleh A, Al-Tabakha MMA, Ashames AA.* Recent applications of quantitative analytical FTIR spectroscopy in pharmaceutical, biomedical, and clinical fields: A brief review. *Rev Anal Chem*. 2022; 41(1): 21-33. doi:10.1515/revac-2022-0030.

6. *Ribeiro da Cunha B, Fonseca LP, Calado CRC*. Metabolic fingerprinting with Fourier-transform infrared (FTIR) spectroscopy: Towards a high-throughput screening assay for antibiotic discovery and mechanism-of-action elucidation. *Metabolites*. 2020;10(4):145. doi: 10.3390/metabo10040145.

7. *Куприянова Д. В., Перцев Д. Ю., Татур М. М.* Классификация методов сегментации снимков земной поверхности // Системный анализ и прикладная информатика. 2023. № 4. С. 20–28. URL: https://doi.org/10.21122/2309-4923-2023-4-20-28.

8. *Rohman A., Ghazali M.A.B., Windarsih A.*, et al. Comprehensive review on application of FTIR spectroscopy coupled with chemometrics for authentication analysis of fats and oils in the food products. *Molecules*. 2020; 25(22): 5485. doi:10.3390/molecules25225485.

9. *Richard G. Lyons* Understanding Digital Signal Processing, Third Edition, 2019, pp. 709.Upper Sydney.

10. *Рангайян А. М.* Анализ биомедицинских сигналов. Практический подход. М. : Физматгиз, 2007. 440 с.

11. *Трахтман А. М.* Введение в обобщенную спектральную теорию. М. : Сов. радио. 1972, 352 с.

12. Sun Qi., Zhao Ya., Wang Yu., Wang R. Verification and Analysis of The Pavement System Transfer Function Based on Falling Weight Deflectometer Testing/ Journal of Nondestructive Evaluation. 2024. Vol. 43. No. 4. C. 110.

13. Hamarsheh Q., Daoud O., Baniyounis M., Damati A. Narrowband Internet-of-Things to Enhance the Vehicular Communications Performance\ Future Internet. 2023. Vol. 15. No. 1.

14. Cabrel W., Mumanikidzwa G.T., Shen J., Yan Yu. Enhanced Fourier Transform Using Wavelet Packet Decomposition\ Journal of Sensor Technology. 2024. Vol. 14. No. 1.

15. Pavlenko I., Savchenko I., Ivanov V., Ruban A., Pitel J. Diagnostics of the Rotor-Stator Contact by Spectral Analysis of the Vibration State for Rotor Machines\ In: Advanced Manufacturing Processes III. InterPartner: Grabchenko's International Conference on Advanced Manufacturing Processes. Cham, 2022.

16. Bühling B., Maack S., Strangfeld C., Schweitzer T. Enhancing the Spectral Signatures of Ultrasonic Fluidic Transducer Pulses for Improved Time-of-Flight Measurements/ Ultrasonics. 2022. Vol. 119. C. 106612.

17. Luo J., Shi J. Sinusoidal Representation of a Transient Signal Based On The Hilbert Transform/ Power System Protection and Control. 2022. Vol. 50. No 1. DOI: 10.19783/j.cnki.pspc.210309.

18. Song Y., Duan F., Wu F., Liu Z., Gao S. Assessment of the Current Collection Quality of Pantograph-Catenary with Contact Line Height Variability In Electric Railways/ IEEE Transactions on Transportation Electrification. 2022. Vol. 8. No. 1.

19. Lin H., Izabal I., Govalkar A., Melgoza C.M., Groom T., George K., Lee K., Codding A., Erdogan A. Signal Generation and Continuous Tracking with Signal Attribute Variations Using Software Simulation/ In: Proceedings of CONECCT 2021: 7th IEEE International Conference on Electronics, Computing and Communication Technologies. 7. 2021.

20. Pan J., Li L.-P., You Z.-H., Yu C.-Q., Ren Z.-H., Guan Y.-J. Prediction of Protein–Protein Interactions In Arabidopsis, Maize, and Rice by Combining Deep Neural Network With Discrete Hilbert Transform/ Frontiers in Genetics. 2021. T. 12. № FEB. C. 745228.

21. Ponomareva O.V., Ponomarev A.V. Theoretical Foundations of digital Vector Fourier Analysis of two-dimensional Signals Padded with Zero Samples|// Information and Control Systems. 2021, no. 1 (110), pp. 55-64.

22. *Пономарева О. В, Пономарев А. В., Смирнова Н. В.* Определение дискретно-частотного преобразования Фурье с варьируемым параметром в частотной области // Цифровая обработка сигналов. 2021. №1. С. 3–9.

23. *Пономарева Н. В., Пономарева О. В.* Теория, методы и алгоритмы определения огибающих дискретных финитных действительных сигналов на основе параметрических преобразований Фурье // Цифровая обработка сигналов. 2023. № 4. С. 3–12.

24. Alexey V. Ponomarev Systems Analysis of Discrete Two-Dimensional Signal Processingin Fourier Bases. Springer Nature Switzerland AG 2020 M. Favorskaya and L. C. Jain (eds.), Advances in Signal Processing, Intelligent Systems Reference Library 184, https://doi.org/10.1007/978-3-030-40312-6_7.

25. Ponomareva O.V., Ponomarev A.V. Theoretical Foundations of digital Vector Fourier Analysis of two-dimensional Signals Padded with Zero Samples|// Information and Control Systems. 2021. no. 1 (110), pp. 55-64.

References

1. Gonzalez R.C., Woods R.E. Digital Image Processing, 4th Ed. Published by Pearson. 2018.–1168 pages**.**

2. *Marple S.L.Jr.* Digital Spectral Analysis**.** 2nd edition. – New York: Dover Publications, 2019. – 435 p.

3. Lobaty A.A., Bumai A.Y. [Features of construction of evaluation algorithms multidimensional random processes]. *System analysis and applied information science*. 2020. No. 1. Pp. 24-32 (in Russ.) https://doi.org/10.21122/2309-4923-2020-1-24-32.

4. *Zamparo M.* Large Deviations in Discrete-Time Renewal Theory // Stochastic Process. Appl. 2021. V. 139. P. 80–109. https://doi.org/10.1016/j.spa.2 021. 04.01 4.

5. *Fahelelbom KM, Saleh A, Al-Tabakha MMA, Ashames AA.* Recent applications of quantitative analytical FTIR spectroscopy in pharmaceutical, biomedical, and clinical fields: A brief review. *Rev Anal Chem*. 2022; 41(1):21-33. doi:10.1515/revac-2022-0030.

6. *Ribeiro da Cunha B, Fonseca LP, Calado CRC*. Metabolic fingerprinting with Fourier-transform infrared (FTIR) spectroscopy: Towards a high-throughput screening assay for antibiotic discovery and mechanism-of-action elucidation. *Metabolites*. 2020;10(4):145. doi:10.3390/metabo10040145.

7. Kypriyanava D.V., Pertsau D.Y., Tatur M.M. [Classification of earth surface image segmentation methods]. *System analysis and applied information science*. 2023. No. 4. Pp. 20-28 (in Russ.) https://doi.org/10.21122/2309-4923-2023-4-20-28

8. *Rohman A, Ghazali MAB, Windarsih A*, et al. Comprehensive review on application of FTIR spectroscopy coupled with chemometrics for authentication analysis of fats and oils in the food products. *Molecules*. 2020;25(22):5485. doi:10.3390/molecules25225485

9. *Richard G. Lyons* Understanding Digital Signal Processing, Third Edition, 2019, pp. 709.Upper Sydney

10. Rangajyan A. M. *Analiz biomedicinskih signalov. Prakticheskij podhod* [Analysis of biomedical signals. Practical approach]. Moscow, Fizmatgiz, 2007. 440 p. (in Russ.).

11. Trahtman A.M. *Vvedenie v obobshchennuyu spektral'nuyu teoriyu.* [Introduction to Generalized Spectral Theory]. Moscow, Soviet radio, 1982, 352 p. (in Russ.)

12. Sun Qi., Zhao Ya., Wang Yu., Wang R. Verification and Analysis of The Pavement System Transfer Function Based on Falling Weight Deflectometer Testing/ Journal of Nondestructive Evaluation. 2024. Vol. 43. No. 4. C. 110.

13. Hamarsheh Q., Daoud O., Baniyounis M., Damati A. Narrowband Internet-of-Things to Enhance the Vehicular Communications Performance\ Future Internet. 2023. Vol. 15. No. 1.

14. Cabrel W., Mumanikidzwa G.T., Shen J., Yan Yu. Enhanced Fourier Transform Using Wavelet Packet Decomposition\ Journal of Sensor Technology. 2024. Vol. 14. No. 1.

15. Pavlenko I., Savchenko I., Ivanov V., Ruban A., Pitel J. Diagnostics of the Rotor-Stator Contact by Spectral Analysis of the Vibration State for Rotor Machines\ In: Advanced Manufacturing Processes III. InterPartner: Grabchenko's International Conference on Advanced Manufacturing Processes. Cham, 2022.

16. Bühling B., Maack S., Strangfeld C., Schweitzer T. Enhancing the Spectral Signatures of Ultrasonic Fluidic Transducer Pulses for Improved Time-of-Flight Measurements/ Ultrasonics. 2022. Vol. 119. C. 106612.

17. Luo J., Shi J. Sinusoidal Representation of a Transient Signal Based On The Hilbert Transform/ Power System Protection and Control. 2022. Vol. 50. No 1. DOI: 10.19783/j.cnki.pspc.210309.

18. Song Y., Duan F., Wu F., Liu Z., Gao S. Assessment of the Current Collection Quality of Pantograph-Catenary with Contact Line Height Variability In Electric Railways/ IEEE Transactions on Transportation Electrification. 2022. Vol.. 8. № 1.

19. Lin H., Izabal I., Govalkar A., Melgoza C.M., Groom T., George K., Lee K., Codding A., Erdogan A. Signal Generation and Continuous Tracking with Signal Attribute Variations Using Software Simulation/ In: Proceedings of CONECCT 2021: 7th IEEE International Conference on Electronics, Computing and Communication Technologies. 7. 2021.

20. Pan J., Li L.-P., You Z.-H., Yu C.-Q., Ren Z.-H., Guan Y.-J. Prediction of Protein–Protein Interactions In Arabidopsis, Maize, and Rice by Combining Deep Neural Network With Discrete Hilbert Transform/ Frontiers in Genetics. 2021. T. 12. № FEB. C. 745228.

21. Ponomareva O.V., Ponomarev A.V. Theoretical Foundations of digital Vector Fourier Analysis of two-dimensional Signals Padded with Zero Samples|// Information and Control Systems. 2021, no. 1 (110), pp. 55-64.

22. Ponomareva O.V, Ponomarev A.V., Smirnova N.V. [Definition of discrete-frequency Fourier transform with variable parameter in frequency domain]. Cifrovaya obrabotka signalov, 2021, no. 1, pp. 3-9 (in Russ.).

23. Ponomareva N.V., Ponomareva O.V. [Theory, methods and algorithms for determining the envelopes of discrete finite real signals based on parametric Fourier transforms]. Cifrovaya obrabotka signalov, 2023, no. 4, pp. 3-12 (in Russ.).

24. Alexey V. Ponomarev Systems Analysis of Discrete Two-Dimensional Signal Processingin Fourier Bases. Springer Nature Switzerland AG 2020 M. Favorskaya and L. C. Jain (eds.), Advances in Signal Processing, Intelligent Systems Reference Library 184, https://doi.org/10.1007/978-3-030-40312-6_7

25. Ponomareva O.V., Ponomarev A.V. Theoretical Foundations of digital Vector Fourier Analysis of two-dimensional Signals Padded with Zero Samples|// Information and Control Systems. 2021. no. 1 (110), pp. 55-64.

Fast Discrete Fourier Transform of Complex Finite Signals with a Number of Samples Not Equal to a Power of Two with Limited Computing Function

A. V. Ponomarev, PhD in Economics, Associate Professor, Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk, Russia
N. V. Ponomareva, PhD in Engineering, Associate Professor, Sevastopol State University, Sevastopol, Russia
O. V. Ponomareva, DSc in Engineering, Professor, Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk, Russia

The article is devoted to the development of the theoryfor digital processing of finite discrete signals, the method and algorithm for the fast discrete Fourier transform of complex finite signals with a number of samples not equal to a power of two, with limited computing function. The development of the method and algorithm is implemented on the internal structure analysis of the discrete Fourier transform basis - a system of discrete exponential functions. Structure analysis of the discrete Fourier transform basis made it possible to eliminate a significant drawback of fast Fourier transform algorithms: limited durations of finite discrete signals that allow fast procedure application. The work is a continuation of the authors' research in the field of digital spectral and vector analysis; in particular, it considers a new basis for the discrete Fourier transform, which provides for a transition to the frequency domain with a selected parameter of a finite discrete signal in the time domain. The article provides a theoretical and experimental justification for the efficiency and effectiveness of the proposed method and algorithm for the fast Fourier transform of complex finite signals with a number of samples not equal to a power of two, with limited computing function. The effectiveness and efficiency of the proposed method and algorithm of fast discrete Fourier transform are confirmed by the following proven provisions. Firstly, the range of finite discrete signaldurations studied by fast methods is significantly expanded. Secondly, the researcher can realize the advantages of the method and algorithm with limited available computing function. Thirdly, using the proposed method and algorithm of fast discrete Fourier transform, it is possible to calculate the coefficients (bins) of the DFT in the selected spectrum region of a finite discrete complex signal. The role and place of the work seems to be important and relevant in many subject areas of science and technology, such as, for example, vibroacoustic functional diagnostics of objects in mechanical engineering and medicine, as well as in the detection and classification of objects.

Keywords: fast Fourier transform, finite discrete signal, spectral analysis, vector analysis, modulo ordering.

Получено: 30.04.25

Образец цитирования

Пономарев, А. В. Пономарева Н. В., Пономарева О. В. Быстрое дискретное преобразование Фурье комплексных финитных сигналов с числом отсчетов, не равным степени двух, при ограниченных возможностях вычислительных средств // Интеллектуальные системы в производстве. 2025. Т. 23, № 2. С. 112–120. DOI: 10.22213/2410-9304-2025-2-112-120.

For Citation

Ponomarev A.V., Ponomareva N.V., Ponomareva O.V. [Fast Discrete Fourier Transform of Complex Finite Signals with a Number of Samples Not Equal to a Power of Two with Limited Computing Function]. *Intellektual'nye sistemy v proizvodstve.* 2025, vol. 23, no. 2, pp. 112-120. DOI: 10.22213/2410-9304-2025-2-112-120.