УДК 621.317.08
DOI: 10.22213/2410-9304-2025-3-96-104

# Метод и алгоритм быстрого параметрического дискретного преобразования Фурье с высокой разрешающей способностью по частоте в выбранной области спектра финитного дискретного сигнала

*О. В. Пономарева*, доктор технических наук, профессор,
ИжГТУ имени М. Т. Калашникова, Ижевск, Россия
*Н. В. Пономарева*, кандидат технических наук, доцент,
Севастопольский государственный университет, Севастополь, Россия
*А. В. Пономарев,* кандидат экономических наук, доцент,
ИжГТУ имени М. Т. Калашникова, Ижевск, Россия

*Статья посвящена развитию теории цифровой обработки сигналов, разработке эффективного метода быстрого параметрического преобразования Фурье финитных дискретных сигналов с высоким разрешением по частоте в выбранной области их полного частотного спектра. Разработка метода быстрого параметрического преобразования Фурье с высоким разрешением по частоте проведена на основе анализа внутренней организации (структуры) базиса дискретного параметрического преобразования Фурье – системы параметрических дискретных экспоненциальных функций.*

*Анализ структуры базиса дискретного параметрического преобразования Фурье позволил устранить один существенный недостаток алгоритмов быстрого параметрического преобразования Фурье – ограниченность длительностей финитных дискретных сигналов, которые допускают применение быстрых процедур. Разработанный метод быстрого параметрического преобразования Фурье финитных дискретных сигналов позволяет существенно расширить количество длительностей допускающих применение быстрых процедур, при незначительном увеличении вычислительных затрат. В работе рассмотрено обобщение классических дискретных преобразований Фурье путем введения в их базисы параметров во временной или частотной области.*

*Работа является продолжением исследований авторов в области цифрового спектрального анализа: в частности, в ней предложен новый базис дискретного преобразования Фурье, который предусматривает переход в частотную область с выбранным параметром финитного дискретного сигнала во временной области. В статье дано теоретическое и экспериментальное обоснование эффективности и результативности предложенного метода и алгоритма быстрого параметрического преобразования Фурье финитных дискретных сигналов с высоким разрешением по частоте в выбранной области спектра финитного дискретного сигнала.*

*Предложенный метод быстрого параметрического дискретного преобразования Фурье в силу доказанной его результативности и эффективности существенно расширяет возможности методов цифрового спектрального и векторного анализа финитных дискретных сигналов различной структуры во многих областях науки и техники. Подчеркивается роль работы в таких областях, как виброакустическое функциональное диагностирование объектов в машиностроении, в медицине, в гидролокации.*

**Ключевые слова:** финитный дискретный сигнал, дискретное преобразование Фурье, быстрое преобразование Фурье, параметрическое дискретное преобразование Фурье, параметрическое быстрое преобразование Фурье.

## Введение

В настоящее время эффективность и результативность применения классических дискретных преобразований Фурье (ДПФ) на основе быстрых алгоритмов – алгоритмов БПФ в различных областях цифровой обработки сигналов (ЦОС) можно считать проверенным и доказанным временем фактом [1–20].

Отметим также, что эволюционное совершенствование базиса ДПФ с целью устранения имеющихся у него недостатков продолжается и в настоящее время. Например, в работах авторов настоящей работы [21-25] предложены и исследованы два вида параметрических дискретных преобразований Фурье (ДПФ-П). Первый вид ДПФ-П имеет варьируемый параметр $\theta_1$ по частоте:

$$\mathbf{S}_{N,\theta_1,1} = \frac{1}{N}\mathbf{F}_{N,\theta_1,1}\cdot\mathbf{X}_N; \quad 0 \le \theta_1 < 1; \qquad (1)$$

где $\mathbf{X}_N$ – векторное описание финитного дискретного сигнала $x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$, в $N$-мерном пространстве; $\mathbf{F}_{N,\theta_1,1}$ – базис ДПФ-П первого вида в матричной форме:

$$\mathbf{F}_{N,\theta,1}=\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc}0 & 1 & .\,. & (N-1) & n\end{array}\\ \begin{array}{c}0\\1\\.\\.\\(N-1)\\k\end{array} & \left[\begin{array}{cccc}1 & W_N^{\theta_1} & .\,. & W_N^{\theta_1(N-1)}\\ 1 & W_N^{(1+\theta_1)} & .\,. & W_N^{(1+\theta_1)(N-1)}\\ . & . & .\,. & .\\ . & . & .\,. & .\\ 1 & W_N^{(N-1+\theta_1)} & .\,. & W_N^{(N-1+\theta_1)(N-1)}\end{array}\right]\end{array};\quad(2)$$

где

$$\mathrm{W}_{\mathrm{N}}^{(\mathrm{k}+\theta_1)\mathrm{n}}=exp\left(-\mathrm{j}\frac{2\pi}{\mathrm{N}}(\mathrm{k}+\theta_1)\mathrm{n}\right);\ \mathrm{k,n}=\overline{0,\mathrm{N}-1};\ 0\le\theta_1<1;$$

$\mathbf{S}_{N,\theta_1,1}$ – векторное описание коэффициентов разложения $\mathbf{X}_N$ по системе параметрических дискретных экспоненциальных функций (ДЭФ) первого вида, согласно матрице (2).

Второй вид ДПФ-П имеет варьируемый параметр $\theta_2$ по времени[1]:

$$\mathbf{S}_{N,\theta_2,2}=\frac{1}{N}\mathbf{F}_{N,\theta_2,1}\cdot\mathbf{X}_N;\qquad 0\le\theta_2<1;\qquad(3)$$

где $\mathbf{F}_{N,\theta_2,2}$ – базис ДПФ-П второго вида в матричной форме:

$$\mathbf{F}_{N,\theta_2,2}=\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc}0 & 1 & .\,. & (N-1) & n\end{array}\\ \begin{array}{c}0\\1\\.\\.\\(N-1)\\k\end{array} & \left[\begin{array}{cccc}1 & 1 & .\,. & 1\\ W_N^{\theta_2} & W_N^{(1+\theta_2)} & .\,. & W_N^{(N-1+\theta_2)}\\ . & . & .\,. & .\\ . & . & .\,. & .\\ W_N^{(N-1)\theta_2} & W_N^{(N-1)(1+\theta_2)} & .\,. & W_N^{(N-1)(N-1+\theta_2)}\end{array}\right]\end{array},\quad(4)$$

где $W_N^{k(n+\theta_2)}=\exp\left(-j\frac{2\pi}{N}k(n+\theta_2)\right);\ k,n=\overline{0,N-1};\ 0\le\theta_2<1;$

$\mathbf{S}_{N,\theta_1,2}$ – векторное описание коэффициентов разложения $\mathbf{X}_N$ по системе параметрических дискретных экспоненциальных функций (ДЭФ-П) второго вида, согласно матрице (4).

При значении параметра $\theta_1$ равным нулю первый вид ДПФ-П и при значении параметра $\theta_2$ равным нулю второй вид ДПФ-П переходят в стандартное (классическое) ДПФ с базисом дискретных экспоненциальных функций (ДЭФ) в матричной форме:

$$\mathbf{F}_N=\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc}0 & 1 & .\,. & (N-1) & n\end{array}\\ \begin{array}{c}0\\1\\.\\.\\(N-1)\\k\end{array} & \left[\begin{array}{cccc}1 & 1 & .\,. & 1\\ 1 & W_N^{1} & .\,. & W_N^{(N-1)}\\ . & . & .\,. & .\\ . & . & .\,. & .\\ 1 & W_N^{(N-1)} & .\,. & W_N^{(N-1)(N-1)}\end{array}\right]\end{array},\quad(5)$$

где векторное описание финитного дискретного сигнала.

Отметим, что для алгоритмов БПФ существует два класса равноправных алгоритмов: прореживания по времени и прореживания по частоте.

В то время как для алгоритмов БПФ-П первого вида существуют только алгоритмы прореживания по времени, то для алгоритмов БПФ-П второго вида существуют только алгоритмы прореживания по частоте.

Такое разделение алгоритмов БПФ-П объясняется организацией (структурой) базисов: ДПФ (5), ДПФ-П первого вида(2) и ДПФ-П второго вида (4).

**Цель работы**

Целью работы является разработка эффективного и результативного метода и алгоритма быстрого параметрического дискретного преобразования Фурье с высокой разрешающей способностью по частоте в выбранной области спектра финитного дискретного сигнала.

**Блочная структура базисной системы параметрического дискретного преобразования Фурье размером $\mathbf{2^p\cdot r\times 2^p\cdot r}$ первого вида**

Рассмотрим блочную структуру матрицы ДЭФ-П первого вида размерностью $2^p\cdot r\times 2^p\cdot r$, где $p,r$ – любые целые положительные числа. Матричная форма ДПФ – П первого вида (1) финитного дискретного сигнала $\mathbf{X}_{Nr}$ задается матричным уравнением: $\mathbf{S}_{Nr,\theta_1,1}=\frac{1}{Nr}\mathbf{F}_{Nr,\theta_1,1}\mathbf{X}_{Nr}$.

Система ДЭФ-П первого вида согласно формуле (2) задается матрицей $\mathbf{F}_{Nr,\theta_1,1}$

$$\mathbf{F}_{Nr,\theta_1,1}=\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc}0 & 1 & .\,. & (Nr-1) & n\end{array}\\ \begin{array}{c}0\\1\\.\\.\\(Nr-1)\\k\end{array} & \left[\begin{array}{cccc}1 & W_{Nr}^{\theta_1} & .\,. & W_{Nr}^{\theta_1(Nr-1)}\\ 1 & W_{Nr}^{(1+\theta_1)} & .\,. & W_{Nr}^{(1+\theta_1)(Nr-1)}\\ . & . & .\,. & .\\ . & . & .\,. & .\\ 1 & W_{Nr}^{(Nr-1+\theta_1)} & .\,. & W_{Nr}^{(Nr-1+\theta_1)(Nr-1)}\end{array}\right]\end{array}.\quad(6)$$

Обозначим множество номеров столбцов матрицы $\mathbf{F}_{Nr,\theta_1,1}$ через $D$: $D=\{0,1,2,...,(Nr-1)\}$.

Применим к множеству $D$ отношение сравнимости по модулю $r$.

[1] По устоявшейся в ЦОС практике переменная, отвечающая за частоту, обозначается через $k$, а переменная, отвечающая за время, обозначается через $n$.Часто, если это не вызывает путаницы, варьируемые параметры $\theta_1$ и $\theta_2$ обозначают одной буквой.

В силу того что это отношение является отношением эквивалентности, т. е. обладает свойствами рефлексивности[2] симметричности[3] и транзитивности [4], оно разбивает множество $D$ на $r$ классов вычетов по модулю $r$:

$$\begin{aligned} &D_0 = \{ 0, r, ..., r(N-1) \}; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &D_{r-1} = \{ r-1, r+(r-1), ..., Nr-1 \}; \end{aligned} \qquad (7)$$

$$D_i \neq \varnothing; \qquad D_i \bigcap_{i \neq j} D_j = \varnothing; \qquad \bigcup_{i=0}^{r-1} D_i = D.$$

Переупорядочим столбцы матрицы $\mathbf{F}_{Nr,\,\theta_1,\,1}$, (6) в соответствии с классами $D_i$ вычетов по модулю $r$. Обозначим полученную матрицу через $\mathbf{B}_r$. Матрицу $\mathbf{B}_r$, рассечем вертикальными линиями на $r$ блоков (на $r$ прямоугольных матриц) $\mathbf{B}_{i,блок}$, где $i = \overline{0,(r-1)}$ размером $Nr \times N$ каждый (каждая):

$$\mathbf{B}_{0,блок} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 0 & r & \cdots & (N-1)r \end{array} \quad n \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ (Nr-1) \\ k \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & W_{Nr}^{\theta_1 r} & \cdots & W_{Nr}^{\theta_1 (N-1)r} \\ 1 & W_{Nr}^{(1+\theta_1)r} & \cdots & W_{Nr}^{(1+\theta_1)(N-1)r} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & W_{Nr}^{(Nr-1+\theta_1)r} & \cdots & W_{Nr}^{(Nr-1+\theta_1)(N-1)r} \end{bmatrix} \end{array}; \qquad (8)$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{B}_{i,блок} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} i & r+i & \cdots & (N-1)r+i \end{array} \quad n \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ (Nr-1) \\ k \end{array} & \begin{bmatrix} W_{Nr}^{\theta_1 i} & W_{Nr}^{\theta_1 (r+i)} & \cdots & W_{Nr}^{\theta_1((N-1)r+i)} \\ W_{Nr}^{(1+\theta_1)i} & W_{Nr}^{(1+\theta_1)(r+i)} & \cdots & W_{Nr}^{r(1+\theta_1)(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ W_{Nr}^{(Nr-1+\theta_1)i} & W_{Nr}^{(Nr-1+\theta_1)(r+i)} & \cdots & W_{Nr}^{(Nr-1+\theta_1)((N-1)r+i)} \end{bmatrix} \end{array}; \qquad (9)$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{B}_{(r-1),блок} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} r-1 & 2r-1 & \cdots & (Nr-1) \end{array} \quad n \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ (Nr-1) \\ k \end{array} & \begin{bmatrix} W_{Nr}^{\theta_1 (r-1)} & W_{Nr}^{\theta_1 (2r-1)} & \cdots & W_{Nr}^{\theta_1((Nr-1))} \\ W_{Nr}^{(1+\theta_1)(r-1)} & W_{Nr}^{(1+\theta_1)(2r-1)} & \cdots & W_{Nr}^{r(1+\theta_1)(Nr-1)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ W_{Nr}^{(Nr-1+\theta_1)(r-1)} & W_{Nr}^{(Nr-1+\theta_1)(2r-1)} & \cdots & W_{Nr}^{(Nr-1+\theta_1)((Nr-1)} \end{bmatrix} \end{array}. \qquad (10)$$

Матрицы $\mathbf{B}_{i,блок}$, $i = \overline{0,(r-1)}$, также представим в виде блочных матриц, рассекая каждую из них горизонтальными линиям на $r$ блоков по $N$ строк в каждом блоке. В результате получим следующие блочные матрицы:

$$\mathbf{B}_{0,блок} = \begin{array}{cc} & 0 \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ (r-1) \end{array} & \begin{bmatrix} B_{0,0} \\ B_{1,0} \\ \vdots \\ B_{(r-1),0} \end{bmatrix} \end{array}; \ldots; \mathbf{B}_{i,блок} = \begin{array}{cc} & i \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ (r-1) \end{array} & \begin{bmatrix} B_{0,i} \\ B_{1,i} \\ \vdots \\ B_{(r-1),i} \end{bmatrix} \end{array}; \mathbf{B}_{(r-1),блок} = \begin{array}{cc} & (r-1) \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ (r-1) \end{array} & \begin{bmatrix} B_{0,(r-1)} \\ B_{1,(r-1)} \\ \vdots \\ B_{(r-1),(r-1)} \end{bmatrix} \end{array}. \qquad (11)$$

[2] Рефлексивность – одно из свойств бинарных отношений. Отношение $R$ на множестве $A$ называется рефлексивным, если $aRa$ для любого $a \in A$.

[3] Симметричность – одно из свойств бинарных отношений. Отношение $R$ на множестве $A$ называется симметричным, если для любой пары элементов $a, b \in A$ из $aRc$ следует $bRc$.

[4] Транзитивность – одно из важнейших свойств бинарных отношений. Отношение $R$ на множестве $A$ называется транзитивным, если для любых $a, b, c \in A$ из условий $aRb$ и $bRc$ вытекает, что $aRc$.

Блочные матрицы (11) позволяют представить матрицу $\mathbf{B}_r$ в следующем виде:

$$\mathbf{B}_r = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & . & . & (r-1) \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ (r-1) \end{array} & \begin{bmatrix} B_{0,0} & B_{0,1} & . & . & B_{0,(r-1)} \\ B_{1,0} & B_{1,1} & . & . & B_{1,(r-1)} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ B_{(r-1),0} & B_{(r-1),1} & . & . & B_{(r-1),(r-1)} \end{bmatrix} \end{array}. \qquad (12)$$

Введя матрицу поправочных коэффициентов $\mathbf{F}_r$:

$$\mathbf{F}_r = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & . & . & (r-1) & n \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ (r-1) \\ k \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & . & . & 1 \\ 1 & W_r^1 & . & . & W_r^{(r-1)} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 1 & W_r^{(r-1)} & . & . & W_r^{(r-1)(r-1)} \end{bmatrix} \end{array} \qquad (13)$$

и с учетом формул (8)–(11) установим структуру организации блочной матрицы $\mathbf{B}_r$ (12), которую, воспользовавшись произведением Кронекера (Адамара), представим в следующем виде:

$$\mathbf{B}_r = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & . & . & (r-1) \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ (r-1) \end{array} & \begin{bmatrix} B_{0,0} & B_{0,1} & . & . & B_{0,(r-1)} \\ B_{0,0} & W_r^1 B_{0,1} & . & . & W_r^{(r-1)} B_{0,(r-1)} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ B_{0,0} & W_R^{(r-1)} B_{0,1} & . & . & W_r^{(r-1)(r-1)} B_{0,(r-1)} \end{bmatrix} \end{array} \qquad (14)$$

### Метод и алгоритм быстрого параметрического дискретного преобразования Фурье с высокой разрешающей способностью по частоте в выбранной области спектра финитного дискретного сигнала

С необходимостью определения параметрического дискретного преобразования Фурье с высокой разрешающей способностью по частоте в выбранной области спектра финитного дискретного сигнала сталкиваются во многих областях науки и техники. Среди них, например, виброакустическое функциональное диагностирование, акустика, анализ биомедицинских сигналов.

Выявление цифровыми методами скрытых периодичностей в выбранной области спектра, исследуемых финитных дискретных сигналов, позволяет получить важную информацию о состоянии объекта, процессах, происходящих в нем[5].

Метод и алгоритм параметрического дискретного преобразования Фурье с высокой разрешающей способностью по частоте в выбранной области спектра финитного дискретного сигнала заключается в выполнении ДПФ-П финитного дискретного сигнала с помощью алгоритмов БПФ-П. Затем не интересующие нас коэффициенты Фурье ДПФ-П, полученные с помощью БПФ-П, отбрасываются.

Неэффективность такого подхода к обнаружению скрытых периодичностей, определения их параметров очевидна. Действительно, для обеспечения высокого разрешения по частоте необходимо вычислять спектры финитных дискретных сигналов большой длительности.

В этом случае ситуацию не спасает и применение БПФ, поскольку затраты памяти и вычислительные затраты слишком велики.

Матрица (14) открывает путь к построению метода и алгоритма быстрого параметрического дискретного преобразования Фурье с высокой разрешающей способностью по частоте в выбранной области спектра финитного дискретного сигнала.

Введем в рассмотрение вектор $\mathbf{Y}_{Nr}$ в виде векторного описания финитной дискретной экспоненты:

$$y(n) = \exp\left( -j\frac{2\pi}{N}\theta_1 n \right);\ n = \overline{0, Nr-1};\ 0 \le \theta_1 < 1 \qquad (15)$$

и сформируем вектор $\mathbf{Z}_{Nr}$, представляющий собой почленное произведение векторов $\mathbf{X}_{Nr}$ и $\mathbf{Y}_{Nr}$.

Обозначим множество строк вектора $\mathbf{Z}_{Nr}$ через $C: C = \{\, 0,1,2,\ldots,(Nr-1) \,\}$. Применив к множеству $C$ отношение сравнимости по модулю $r$ (7), получим $r$ векторов $\mathbf{Z}_{Nr}$, $\mathrm{i} = \overline{0,(\mathrm{r}-1)}$:

$$\mathbf{Z}_{N,\theta_1,0} = \begin{array}{c} 0 \\ r \\ . \\ . \\ (N-1)r \end{array} \begin{bmatrix} z(0) \\ z(r) \\ . \\ . \\ z(N-1)r \end{bmatrix}; \qquad (16)$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{Z}_{N,\theta_1,i} = \begin{array}{c} i \\ r+i \\ . \\ . \\ (N-1)r+i \end{array} \begin{bmatrix} z(i) \\ z(r+i) \\ . \\ . \\ z((N-1)r+i) \end{bmatrix}; \qquad (17)$$

$$\vdots$$

[5] Часто получить аналогичную информацию другими методами просто невозможно

$$\mathbf{Z}_{N,\theta_1,(r-1)} = \begin{array}{r} r-1 \\ 2r-1 \\ . \\ . \\ (Nr-1) \end{array} \begin{bmatrix} z(r-1) \\ z(2r-1) \\ . \\ . \\ z((Nr-1) \end{bmatrix}. \quad (18)$$

$$B_{0,0} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ (N-1) \\ k \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & . & . & (N-1) \end{array} \quad n \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & . & . & 1 \\ 1 & W_N & . & . & W_N^{(N-1)} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 1 & W_N^{(N-1)} & . & . & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \\ \\ \end{array}; \quad (19)$$

Раскрыв общую структуру блочных матриц $B_{0,m}$ при $m=\overline{0,(r-1)}$:

$$B_{0,1} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ (N-1) \\ k \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & . & . & (N-1) \end{array} \quad n \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & . & . & 1 \\ W_N^{\frac{1}{r}} & W_N^{(1+\frac{1}{r})} & . & . & W_N^{(N-1+\frac{1}{r})} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ W_N^{(N-1)\frac{1}{r}} & W_N^{(N-1)(1+\frac{1}{r})} & . & . & W_N^{(N-1)(N-1+1)} \end{bmatrix} \\ \\ \end{array}; \quad (20)$$

.

.

.

$$B_{0,(r-1)} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ (N-1) \\ k \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & . & . & (N-1) \end{array} \quad n \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & . & . & 1 \\ W_N^{\frac{(r-1)}{r}} & W_N^{(1+\frac{(r-1)}{r})} & . & . & W_N^{(N-1+\frac{(r-1)}{r})} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ W_N^{(N-1)\frac{(r-1)}{r}} & W_N^{(N-1)(1+\frac{(r-1)}{r})} & . & . & W_N^{(N-1)(N-1+\frac{(r-1)}{r})} \end{bmatrix} \\ \\ \end{array}; \quad (21)$$

можно найти матричные произведения:

$$\mathbf{G}_{0,\theta_1,0} = B_{0,0\cdot} \cdot \mathbf{Z}_{N,\theta_1,0};$$

$$\mathbf{G}_{0,\theta_1,1} = B_{0,1\cdot} \cdot \mathbf{Z}_{N,\theta_1,1}; \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$;\mathbf{G}_{0,\theta_1,(r-1)} = B_{0,(r-1)\cdot} \cdot \mathbf{Z}_{N,\theta_1,(r-1)}. \quad (22)$$

Просуммировав полученные матричные произведения в соответствии с матрицей поправочных коэффициентов $\mathbf{F}_r$ (13), получим $N$ коэффициентов (бинов) ДПФ-П в выбранном диапазоне частот :

$$\mathbf{S}_{N,\theta_1,0} = \frac{1}{Nr}\left[\mathbf{G}_{0,\theta_1,0} + \mathbf{G}_{0,\theta_1,1} + \ldots + \mathbf{G}_{0,\theta_1,(r-1)}\right]; \quad (23)$$

$$\mathbf{S}_{N,\theta_1,1} = \frac{1}{Nr}\Big[\mathbf{G}_{0,\theta_1,0} + W_r^1\mathbf{G}_{0,\theta_1,1} + \ldots + W_r^{(r-1)}\mathbf{G}_{0,\theta_1,(r-1)}\Big]; \quad (24)$$

.

.

.

$$\mathbf{S}_{N,\theta_1,(r-1)} = \frac{1}{Nr}\Big[\mathbf{G}_{0,\theta_1,0} + W_r^{(r-1)}\mathbf{G}_{0,\theta_1,1} + \ldots + W_r^{(r-1)(r-1)}\mathbf{G}_{0,\theta_1,(r-1)}\Big]. \quad (25)$$

Для подтверждения полученных теоретических результатов о внутренней организации базиса ДПФ-П и возможности построения алгоритма быстрого параметрического дискретного преобразования Фурье с высокой разрешающей способностью по частоте в выбранной области спектра финитного дискретного сигнала проведено численное моделирование при различных $N = 2^p$ и $r$.

Результаты численного моделирования подтвердили полученные теоретические результаты о внутренней организации базиса ДПФ-П и возможности построения метода и алгоритма быстрого параметрического дискретного преобразования Фурье с высокой разрешающей способностью по частоте в выбранной области спектра финитного дискретного сигнала.

**Результативность и эффективность метода быстрого дискретного преобразования Фурье с высокой разрешающей способностью по частоте в выбранной области спектра финитного дискретного сигнала**

Предлагаемый алгоритм быстрого параметрического дискретного преобразования Фурье с высокой разрешающей способностью по частоте позволяет анализировать сигналы длительностью $N = 2^p \cdot r$ ; где $p, r$ – некоторые целые, положительные числа.

Результативность разработанного метода быстрого преобразования Фурье финитных сигналов с высоким разрешением по частоте в выбранной области спектра финитного дискретного сигнала очевидна и подтверждается:

- во-первых, увеличением диапазона анализируемых длительностей финитных дискретных сигналов быстрыми методами, учитывая различия между «шагами» возрастающей геометрической прогрессии и возрастающей арифметической прогрессии;
- во-вторых, возможностью анализировать быстрым преобразованием Фурье финитных дискретных сигналов с высоким разрешением по частоте в выбранной области спектра финитного дискретного сигнала при отсутствии средств вычисления БПФ размером большим $N$. В настоящее время такая возможность отсутствует.

Оценим эффективность предлагаемого метода быстрого преобразования Фурье финитных сигналов с высоким разрешением по частоте. В качестве критерия эффективности выберем количество комплексных умножений, необходимых для выполнения ДПФ-П и БПФ-П для сигнала длительностью $N = 2^p \cdot r$ ; где $p, r$ – некоторые целые, положительные числа.

При оценке эффективности предложенного метода будем различать 2 случая:

- длительность финитного дискретного сигнала равная $N \cdot r$ является степенью 2;
- длительность финитного дискретного сигнала равная $N \cdot r$ не является степенью 2.

Их следует различать, поскольку во втором случае нужно сравнивать количество комплексных умножений необходимых для выполнения алгоритмов ДПФ-П и БПФ-П, а в первом случае – алгоритмов БПФ-П и БПФ-П [6].

Можно показать, что в первом случае эффективность предложенного метода быстрого дискретного преобразования Фурье с высоким разрешением по частоте равна:

$$\lambda_1 = \frac{log_2 \mathrm{Nr}}{(log_2 \mathrm{N} + 2 / \mathrm{N})}. \qquad (26)$$

Во втором случае эффективность предложенного метода быстрого дискретного преобразования Фурье с с высоким разрешением по частоте равна:

$$\lambda_2 = \frac{2\mathrm{Nr}}{(log_2 \mathrm{N} + 2 / \mathrm{N})}. \qquad (27)$$

**Заключение**

Разработан эффективный и результативный метод и алгоритм быстрого параметрического дискретного преобразования Фурье с высокой разрешающей способностью по частоте в выбранной области спектра финитного дискретного сигнала на основе:

- анализа внутренней организации (структуры) экспоненциального базиса параметрического дискретного преобразования Фурье;
- применения аналитических свойств, разработанных авторами статьи обобщений классического дискретного преобразования Фурье в виде параметрических дискретных преобразований Фурье первого и второго вида.

В статье предложен метод устранения одного существенного недостатка алгоритмов быстрого преобразования Фурье – ограниченность длительностей финитных дискретных сигналов, допускающих применение быстрых процедур.

Предложенный метод быстрого параметрического дискретного преобразования Фурье в силу доказанной его результативности и эффективности существенно расширяет возможности методов цифрового спектрального и векторного анализа финитных дискретных сигналов различной структуры во многих областях науки и техники.

**Библиографические ссылки**

1. *Gonzalez R.C., Woods R.E.* Digital Image Processing, 4th Ed. Published by Pearson. 2018.–1168 pages**.**

2. *Marple S.L.Jr.* Digital Spectral Analysis**.** 2nd edition. New York: Dover Publications, 2019. 435 p.

3. *Лобатый А. А., Бумай А. Ю.* Особенности построения алгоритмов оценивания параметров многомерных случайных процессов // Системный анализ и прикладная информатика. 2020. № 1. С. 24–32. URL: https://doi.org/10.21122/2309-4923-2020-1-24-32.

4. *Zamparo M.* Large Deviations in Discrete-Time Renewal Theory // Stochastic Process. Appl. 2021. V. 139. P. 80–109. URL: https://doi.org/10.1016/j.spa.2021. 04.01 4

5. *Fahelelbom KM, Saleh A, Al-Tabakha MMA, Ashames AA.* Recent applications of quantitative analytical FTIR spectroscopy in pharmaceutical, biomed-

[6]Число комплексных умножений, необходимых для выполнения ДПФ – $(\mathrm{N})^2$ ; БПФ – $\mathrm{N}/2 \cdot log_2 \mathrm{N}$ : БПФ-П – $\mathrm{N}/2 \cdot log_2 \mathrm{N}$.

ical, and clinical fields: A brief review. *Rev Anal Chem*. 2022; 41(1):21-33. doi:10.1515/revac-2022-0030

6. *Ribeiro da Cunha B, Fonseca LP, Calado CRC*. Metabolic fingerprinting with Fourier-transform infrared (FTIR) spectroscopy: Towards a high-throughput screening assay for antibiotic discovery and mechanism-of-action elucidation. *Metabolites*. 2020;10(4):145. doi:10.3390/metabo10040145.

7. *Куприянова Д. В., Перцев Д. Ю., Татур М. М.* Классификация методов сегментации снимков земной поверхности // Системный анализ и прикладная информатика. 2023. № 4. С. 20–28. https://doi.org/10.21122/2309-4923-2023-4-20-28.

8. *Rohman A., Ghazali MAB, Windarsih A.*, et al. Comprehensive review on application of FTIR spectroscopy coupled with chemometrics for authentication analysis of fats and oils in the food products. *Molecules*. 2020; 25(22): 5485. doi:10.3390/molecules25225485.

9. *Richard G. Lyons* Understanding Digital Signal Processing, Third Edition, 2019, pp. 709.Upper Sydney.

10. *Рангайян А. М.* Анализ биомедицинских сигналов. Практический подход. М. : Физматгиз, 2007. 440 с.

11. *Трахтман А. М.* Введение в обобщенную спектральную теорию. М. : Сов. радио, 1972, 352 с.

12. Sun Qi., Zhao Ya., Wang Yu., Wang R. Verification and Analysis of The Pavement System Transfer Function Based on Falling Weight Deflectometer Testing/ Journal of Nondestructive Evaluation. 2024. Vol. 43. No. 4. С. 110.

13. Hamarsheh Q., Daoud O., Baniyounis M., Damati A. Narrowband Internet-of-Things to Enhance the Vehicular Communications Performance\ Future Internet. 2023. Vol. 15. No. 1.

14. *Cabrel W., Mumanikidzwa G.T., Shen J., Yan Yu.* Enhanced Fourier Transform Using Wavelet Packet Decomposition\ Journal of Sensor Technology. 2024. Vol. 14. No. 1.

15. *Pavlenko I., Savchenko I., Ivanov V., Ruban A., Pitel J.* Diagnostics of the Rotor-Stator Contact by Spectral Analysis of the Vibration State for Rotor Machines\ In: Advanced Manufacturing Processes III. InterPartner: Grabchenko's International Conference on Advanced Manufacturing Processes. Cham, 2022.

16. *Bühling B., Maack S.,* Strangfeld C., Schweitzer T. Enhancing the Spectral Signatures of Ultrasonic Fluidic Transducer Pulses for Improved Time-of-Flight Measurements/ Ultrasonics. 2022. Vol. 119. С. 106612.

17. *Luo J., Shi J.* Sinusoidal Representation of a Transient Signal Based On The Hilbert Transform/ Power System Protection and Control. 2022. Vol. 50. No 1. DOI: 10.19783/j.cnki.pspc.210309.

18. *Song Y., Duan F., Wu F., Liu Z., Gao S.* Assessment of the Current Collection Quality of Pantograph-Catenary with Contact Line Height Variability In Electric Railways/ IEEE Transactions on Transportation Electrification. 2022. Vol. 8. № 1.

19. *Lin H., Izabal I., Govalkar A., Melgoza C.M., Groom T., George K., Lee K., Codding A., Erdogan A.* Signal Generation and Continuous Tracking with Signal Attribute Variations Using Software Simulation/ In: Proceedings of CONECCT 2021: 7th IEEE International Conference on Electronics, Computing and Communication Technologies. 7. 2021.

20. *Pan J., Li L.-P., You Z.-H., Yu C.-Q., Ren Z.-H., Guan Y.-J.* Prediction of Protein–Protein Interactions In Arabidopsis, Maize, and Rice by Combining Deep Neural Network With Discrete Hilbert Transform/ Frontiers in Genetics. 2021. Т. 12. № FEB. С. 745228.

21. *Ponomareva O.V., Ponomarev A.V.* Theoretical Foundations of digital Vector Fourier Analysis of two-dimensional Signals Padded with Zero Samples|// Information and Control Systems. 2021, no. 1 (110), pp. 55-64.

22. *Пономарева О. В., Пономарев А. В., Смирнова Н. В.* Определение дискретно-частотного преобразования Фурье с варьируемым параметром в частотной области // Цифровая обработка сигналов. 2021. № 1. С. 3–9.

23. *Пономарева Н. В., Пономарева О. В.* Теория, методы и алгоритмы определения огибающих дискретных финитных действительных сигналов на основе параметрических преобразований Фурье // Цифровая обработка сигналов. 2023. № 4. С. 3–12.

24. *Alexey V.* Ponomarev Systems Analysis of Discrete Two-Dimensional Signal Processingin Fourier Bases. Springer Nature Switzerland AG 2020 M. Favorskaya and L. C. Jain (eds.), Advances in Signal Processing, Intelligent Systems Reference Library 184, https://doi.org/10.1007/978-3-030-40312-6_7.

25. *Ponomareva O.V., Ponomarev A.V.* Theoretical Foundations of digital Vector Fourier Analysis of two-dimensional Signals Padded with Zero Samples|// Information and Control Systems. 2021. No. 1 (110), pp.55-64.

## References

1. Gonzalez R.C., Woods R.E. Digital Image Processing, 4th Ed. Published by Pearson. 2018. 1168 pages**.**

2. *Marple S.L.Jr.* Digital Spectral Analysis**.** 2nd edition. – New York: Dover Publications, 2019. 435 p.

3. Lobaty A.A., Bumai A.Y. [Features of construction of evaluation algorithms multidimensional random processes]. System analysis and applied information science. 2020. No. 1, pp. 24-32 (in Russ.) https://doi.org/10.21122/2309-4923-2020-1-24-32.

4. *Zamparo M.* Large Deviations in Discrete-Time Renewal Theory // Stochastic Process. Appl. 2021. V. 139. P. 80–109. https://doi.org/10.1016/j.spa.2 021. 04.01 4

5. *Fahelelbom KM, Saleh A, Al-Tabakha MMA, Ashames AA.* Recent applications of quantitative analytical FTIR spectroscopy in pharmaceutical, biomedical, and clinical fields: A brief review. *Rev*

*Anal Chem*. 2022; 41(1):21-33. doi:10.1515/revac-2022-0030

6. *Ribeiro da Cunha B, Fonseca LP, Calado CRC*. Metabolic fingerprinting with Fourier-transform infrared (FTIR) spectroscopy: Towards a high-throughput screening assay for antibiotic discovery and mechanism-of-action elucidation. *Metabolites*. 2020;10(4):145. doi:10.3390/metabo10040145

7. Kypriyanava D.V., Pertsau D.Y., Tatur M.M. [Classification of earth surface image segmentation methods]. System analysis and applied information science. 2023. No. 4. Pp. 20-28 (in Russ.) https://doi.org/10.21122/2309-4923-2023-4-20-28.

8. *Rohman A., Ghazali MAB, Windarsih A.*, et al. Comprehensive review on application of FTIR spectroscopy coupled with chemometrics for authentication analysis of fats and oils in the food products. *Molecules*. 2020;25(22):5485. doi:10.3390/molecules25225485

9. *Richard G. Lyons* Understanding Digital Signal Processing, Third Edition, 2019, pp. 709.Upper Sydney

10. Rangajyan A. M. *Analiz biomedicinskih signalov. Prakticheskij podhod* [Analysis of biomedical signals. Practical approach]. Moscow, Fizmatgiz, 2007. 440 p. (in Russ.).

11. Trahtman A.M. *Vvedenie v obobshchennuyu spektral'nuyu teoriyu.* [Introduction to Generalized Spectral Theory]. Moscow, Soviet radio, 1982, 352 p. (in Russ.)

12. Sun Qi., Zhao Ya., Wang Yu., Wang R. Verification and Analysis of The Pavement System Transfer Function Based on Falling Weight Deflectometer Testing/ Journal of Nondestructive Evaluation. 2024. Vol. 43. No. 4. C. 110.

13. Hamarsheh Q., Daoud O., Baniyounis M., Damati A. Narrowband Internet-of-Things to Enhance the Vehicular Communications Performance\ Future Internet. 2023. Vol. 15. No. 1.

14. Cabrel W., Mumanikidzwa G.T., Shen J., Yan Yu. Enhanced Fourier Transform Using Wavelet Packet Decomposition\ Journal of Sensor Technology. 2024. Vol. 14. No. 1.

15. Pavlenko I., Savchenko I., Ivanov V., Ruban A., Pitel J. Diagnostics of the Rotor-Stator Contact by Spectral Analysis of the Vibration State for Rotor Machines\ In: Advanced Manufacturing Processes III. InterPartner: Grabchenko's International Conference on Advanced Manufacturing Processes. Cham, 2022.

16. Bühling B., Maack S., Strangfeld C., Schweitzer T. Enhancing the Spectral Signatures of Ultrasonic Fluidic Transducer Pulses for Improved Time-of-Flight Measurements/ Ultrasonics. 2022. Vol. 119. C. 106612.

17. Luo J., Shi J. Sinusoidal Representation of a Transient Signal Based On The Hilbert Transform/ Power System Protection and Control. 2022. Vol. 50. No 1. DOI: 10.19783/j.cnki.pspc.210309.

18. Song Y., Duan F., Wu F., Liu Z., Gao S. Assessment of the Current Collection Quality of Pantograph-Catenary with Contact Line Height Variability In Electric Railways/ IEEE Transactions on Transportation Electrification. 2022. Vol.. 8. № 1.

19. Lin H., Izabal I., Govalkar A., Melgoza C.M., Groom T., George K., Lee K., Codding A., Erdogan A. Signal Generation and Continuous Tracking with Signal Attribute Variations Using Software Simulation/ In: Proceedings of CONECCT 2021: 7th IEEE International Conference on Electronics, Computing and Communication Technologies. 7. 2021.

20. Pan J., Li L.-P., You Z.-H., Yu C.-Q., Ren Z.-H., Guan Y.-J. Prediction of Protein–Protein Interactions In Arabidopsis, Maize, and Rice by Combining Deep Neural Network With Discrete Hilbert Transform/ Frontiers in Genetics. 2021. T. 12. № FEB. C. 745228.

21. Ponomareva O.V., Ponomarev A.V. Theoretical Foundations of digital Vector Fourier Analysis of two-dimensional Signals Padded with Zero Samples|// Information and Control Systems. 2021, no. 1 (110), pp. 55-64.

22. Ponomareva O.V, Ponomarev A.V., Smirnova N.V. [Definition of discrete-frequency Fourier transform with variable parameter in frequency domain]. Cifrovaya obrabotka signalov, 2021, no. 1, pp.3-9 (in Russ.).

23. Ponomareva N.V., Ponomareva O.V. [Theory, methods and algorithms for determining the envelopes of discrete finite real signals based on parametric Fourier transforms]. Cifrovaya obrabotka signalov, 2023, no. 4, pp. 3-12 (in Russ.).

24. Alexey V. Ponomarev Systems Analysis of Discrete Two-Dimensional Signal Processingin Fourier Bases. Springer Nature Switzerland AG 2020 M. Favorskaya and L. C. Jain (eds.), Advances in Signal Processing, Intelligent Systems Reference Library 184, https://doi.org/10.1007/978-3-030-40312-6_7

25. Ponomareva O.V., Ponomarev A.V. Theoretical Foundations of digital Vector Fourier Analysis of two-dimensional Signals Padded with Zero Samples|// Information and Control Systems. 2021. no. 1 (110), pp. 55-64.

**Method and Algorithm of fast Parametric Discrete Fourier Transform with High Frequency Resolution in the Selected Spectral Region of a Finite Discrete Signal**

*O. V. Ponomareva,* Doctor of Technical Sciences, Professor, Izhevsk State Technical University named after M. T. Kalashnikov, Izhevsk, Russia
*N. V. Ponomareva,* Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Sevastopol State University, Sevastopol, Russia
*A. V. Ponomarev,* Candidate of Economic Sciences, Associate Professor, Izhevsk State Technical University named after M. T. Kalashnikov, Izhevsk, Russia

*The article is devoted to the development of the theory of digital signal processing, the development of an effective method for the fast parametric Fourier transform of finite discrete signals with high frequency resolution in the selected region of their full frequency spectrum. The development of the method for the fast parametric Fourier transform with high frequency resolution is based on the analysis of the internal organization (structure) of the basis of the discrete parametric Fourier transform - a system of parametric discrete exponential functions. The analysis of the structure of the basis of the discrete parametric Fourier transform made it possible to eliminate one significant drawback of the algorithms for the fast parametric Fourier transform - the limited durations of finite discrete signals that allow the use of fast procedures. The developed method for the fast parametric Fourier transform of finite discrete signals allows one to significantly expand the number of durations that allow the use of fast procedures, with an insignificant increase in computational costs. The paper considers a generalization of classical discrete Fourier transforms by introducing parameters in the time or frequency domain into their bases. The work is a continuation of the authors' research in the field of digital spectral analysis: in particular, it proposes a new basis for the discrete Fourier transform, which provides for a transition to the frequency domain with a selected parameter of a finite discrete signal in the time domain. The article provides a theoretical and experimental justification for the efficiency and effectiveness of the proposed method and algorithm for the fast parametric Fourier transform of finite discrete signals with high frequency resolution in the selected region of the spectrum of a finite discrete signal. Due to its proven efficiency and effectiveness, the proposed method of the fast parametric discrete Fourier transform significantly expands the capabilities of the methods of digital spectral and vector analysis of finite discrete signals of various structures in many areas of science and technology. The role of the work in such areas as vibroacoustic functional diagnostics of objects in mechanical engineering, medicine, and sonar is emphasized.*

**Keywords:** finite discrete signal, discrete Fourier transform, fast Fourier transform, parametric discrete Fourier transform, parametric fast Fourier transform.

Получено: 17.05.25

**Образец цитирования**

*Пономарева О. В.*, *Пономарева Н. В.*, *Пономарев А. В.* Метод и алгоритм быстрого параметрического дискретного преобразования Фурье с высокой разрешающей способностью по частоте в выбранной области спектра финитного дискретного сигнала // Интеллектуальные системы в производстве. 2025. Т. 23, № 3. С. 96–104. DOI: 10.22213/2410-9304-2025-2-96–104.

**For Citation**

Ponomareva O.V., Ponomareva N.V., Ponomarev A.V. [Method and algorithm of fast parametric discrete Fourier transform with high frequency resolution in the selected spectral region of a finite discrete signal]. *Intellektual'nye sistemy v proizvodstve.* 2025, vol. 23, no. 3, pp. 96–104. DOI: 10.22213/2410-9304-2025-2-96–104.