

УДК 531.55+004.94

DOI: 10.22213/2410-9304-2025-3-105-116

## **Решение обратной задачи определения точки выстрела по зафиксированному участку траектории с применением нейронных сетей глубокого обучения**

*И. Г. Русяк, академик РАРАН, доктор технических наук, профессор,  
ИжГТУ имени М. Т. Калашникова, Ижевск, Россия*

*В. А. Тененев, доктор физико-математических наук, профессор,  
ИжГТУ имени М. Т. Калашникова, Ижевск, Россия*

*С. А. Королев, доктор технических наук, доцент, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова, Ижевск, Россия  
В. Г. Суфиянов, доктор технических наук, доцент, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова, Ижевск, Россия*

*В статье представлены математические модели и численные алгоритмы решения прямой и обратной задач внешней баллистики с целью восстановления траектории по зафиксированному участку и определения точки выстрела.*

*При решении обратных задач внешней баллистики рассматриваются два подхода. Первый подход основан на численных методах решения систем дифференциальных уравнений движения снаряда и алгоритмах решения обратных задач. Второй подход основан на обработке данных траекторных измерений с помощью нейронных сетей глубокого обучения.*

*Алгоритм решения обратной задачи с помощью численных методов состоит из нескольких этапов. Так как данные измерений координат снаряда получены с некоторой погрешностью, зависящей от характеристики локатора, то для получения гладких кривых применяется процедура аппроксимации данных полиномами 4-й степени. Для определения типа снаряда рассчитывается его баллистический коэффициент. По базе данных снарядов определяется снаряд с наиболее близким значением баллистического коэффициента и его основные характеристики. Расчет траектории от начала зафиксированного участка до точки выстрела производится путем численного интегрирования уравнений движения с отрицательным шагом по времени. Для уточнения траекторных параметров и координат точки выстрела решается задача минимизации отклонений расчетной траектории от точек, зафиксированных локатором.*

*Общий алгоритм решения задачи обратной задачи с помощью нейронных сетей включает следующие этапы: предобработка исходных данных; оценка дирекционного угла стрельбы; классификация типа снаряда; восстановление траектории снаряда; определение координат точки стрельбы из решения оптимационной задачи. Для решения задач классификации типа снаряда и восстановления траектории построены сверточные нейронные сети глубокого обучения. Данные для обучения нейронных сетей были получены в результате моделирования траекторий 20 типов снарядов с различными начальными углами стрельбы, направлением и скоростью ветра.*

*Представлены результаты исследования зависимости погрешности определения координат точки выстрела от среднеквадратической ошибки измерения координат снаряда радиолокатором.*

**Ключевые слова:** внешняя баллистика, прямая и обратная задача, баллистический коэффициент, нейронная сеть глубокого обучения, классификация типа снаряда, восстановление траектории.

### **Введение**

Разработка эффективных алгоритмов решения задачи восстановления траектории движения метаемого тела по зафиксированному участку траектории является актуальной задачей внешней баллистики. Это известная задача контрбатарейной борьбы, когда по зафиксированному радиолокатором участку траектории необходимо определить точку выстрела. Сложность решения задачи заключается в том, что неизвестны параметры летящего объекта и его координаты измеряются с некоторой погрешностью.

При решении обратных задач внешней баллистики рассматривается два подхода [1]. Первый подход основан на численных методах решения систем дифференциальных уравнений движения снаряда и алгоритмах решения обратных задач [2]. Второй подход основан на обработке данных траекторных измерений с помощью методов искусственного интеллекта, например нейронных сетей глубокого обучения.

В случае применения первого подхода необходимо многократно решать систему уравнений движения снаряда при неопределенных параметрах, минимизируя отклонение восстанов-

ленной траектории от точек на зафиксированном участке траектории.

Точность и оперативность решения задачи зависит от точности математической модели внешней баллистики и эффективности численных методов и алгоритмов решения систем дифференциальных уравнений и задачи минимизации.

В ряде работ при решении многопараметрических обратных задач внешней баллистики рассматриваются методы приближенного построения траектории полета снаряда. При этом используются упрощенные уравнения движения снаряда, не учитывающие различные факторы, влияющие на траекторию. Это позволяет использовать полуаналитические подходы для построения траектории, существенно повышающие скорость решения задачи.

В работе [3] для аппроксимации траектории в горизонтальной плоскости используется линейная аппроксимация (без учета бокового отклонения), а в вертикальной плоскости – квадратичная (без учета сопротивления воздуха) и кубическая (с приближенными функциями сопротивления) аппроксимации.

Допущение о квадратичной зависимости силы сопротивления от скорости с постоянным приведенным коэффициентом сопротивления снаряда позволяет проинтегрировать систему уравнений движения аналитически, используя замену переменных. Авторы работы [4] указывают, что такое приближенное решение задачи работает только на ограниченном участке траектории, исключающем начальный и конечный участок.

При обработке результатов измерений координат снаряда используются аппроксимации траекторных параметров различного порядка с помощью метода наименьших квадратов и метода максимального правдоподобия [5].

Для построения эффективных алгоритмов решения обратной задачи восстановления траектории необходим метод минимизации отклонений восстановленной траектории от точек измерений, обеспечивающий устойчивость сходимости и высокую скорость. В работе [6] задача минимизации отклонения восстановленной траектории от точек измерений решается с помощью оптимизационного алгоритма Левенберга – Марквардта, сочетающего устойчивость сходимости градиентного спуска и высокой скорости метода Ньютона – Гаусса.

Также к традиционным, широко используемым методам решения задачи восстановления траектории движения снаряда по участку тра-

ектории можно отнести фильтрацию Калмана, цепи Маркова, авторегрессионные модели и другие подходы к экстраполяции траектории [7].

Процесс решения обратной задачи обычно включает три этапа [8]:

- 1) радиолокационная станция (РЛС) с определенной частотой дискретизации фиксирует часть траектории движения снаряда по восходящей дуге, которая представляет собой последовательность пространственных координат снаряда в последовательные моменты времени;

- 2) на основе упрощенной баллистической модели в сочетании с алгоритмами отслеживания и фильтрации оцениваются баллистические параметры снаряда;

- 3) на основе уточненной баллистической модели восстанавливается траектория движения снаряда и определяется точка стрельбы.

В последнее время в литературе публикуются работы, связанные с использованием методов искусственного интеллекта для решения задач восстановления траектории движения не только снарядов [9], но и пешеходов [10], самолетов [11], беспилотных летательных аппаратов [12, 13], мобильных роботов [14], морских судов [15] и т. д.

Для решения задачи классификации снарядов и восстановления траекторий их движения используются как методы машинного обучения (логистическая регрессия,  $k$ -ближайшего соседа, опорных векторов, деревья и леса решений) [16], так и практически все современные архитектуры нейронных сетей [17–21]:

- RNN (рекуррентные нейронные сети с механизмом внимания LSTM, GRU),
- CNN (сверточные нейронные сети),
- FNN (полносвязные нейронные сети),
- Transformer (трансформерные модели нейронных сетей),
- MDN (нейронные сети, основанная на смеси плотностей распределения)

и другие гибридные модели нейронных сетей, включающие перечисленные выше архитектуры.

Целью исследования является проведение математического моделирования движения снаряда в воздушном пространстве, исследование точности определения координат выстрела в зависимости от траекторных параметров и точности измерения координат снаряда.

В основе методики лежит математическая модель внешней баллистики неуправляемого

артиллерийского снаряда, которая представляет собой систему дифференциальных уравнений для координат центра масс снаряда, траекторных параметров (скорость, угол наклона траектории, угол пути, скорость вращения), с учетом распределения параметров атмосферы по высоте и баллистического ветра [22].

Задача решалась с помощью имитационного моделирования, при этом на расчетную траекторию снаряда накладывались ошибки измерения координат снаряда по нормальному закону распределения. В результате формируется множество точек на зафиксированном участке траектории снаряда.

При решении задачи восстановления траектории с помощью методов искусственного интеллекта база данных вычислительных экспериментов для обучения нейронной сети строилась на основе алгоритма решения прямой задачи внешней баллистики путем варьирования начальных условий выстрела и параметров атмосферы.

### Математическая модель внешней баллистики

В математической модели внешней баллистики приняты следующие допущения:

- рассматривается движение неуправляемого артиллерийского снаряда;
- снаряд идеально стабилизирован, т. е. направление оси снаряда совпадает с направлением вектора скорости центра масс;
- зависимость коэффициента лобового сопротивления снаряда задается с помощью законов сопротивления 1943 г. или 1958 г. и постоянного коэффициента формы снаряда;
- поверхность Земли считается плоскостью, суточное вращение Земли не учитывается;
- рельеф местности не учитывается;
- в качестве зависимостей температуры и давления воздуха от высоты берутся зависимости для нормальной артиллерийской атмосферы;
- рассматривается баллистический ветер, постоянный по всей высоте траектории.

Траектория движения снаряда строится в стартовой системе координат  $O_c x_c y_c z_c$  с началом координат в точке расположения орудия и ориентированной по направлению стрельбы. Параметры движения снаряда определяются в связанной со снарядом системе координат  $Oxyz$  с началом координат в центре масс снаряда и ориентированной по вектору скорости (рис. 1).

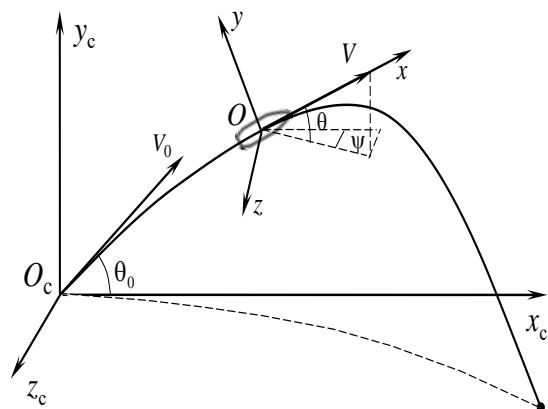


Рис. 1. Стартовая  $O_c x_c y_c z_c$  и связанная со снарядом  $Oxyz$  системы координат

Fig. 1. Starting  $O_c x_c y_c z_c$  and projectile-related  $Oxyz$  coordinate systems

Математическая модель внешней баллистики включает уравнения [23]:

- координат центра масс снаряда:

$$\begin{aligned} \frac{dx_c}{dt} &= V \cos \theta \cos \psi, \\ \frac{dy_c}{dt} &= V \sin \theta, \\ \frac{dz_c}{dt} &= -V \cos \theta \sin \psi; \end{aligned} \quad (1)$$

- скорости снаряда  $V$ :

$$\frac{dV}{dt} = -g \sin \theta - \frac{C_x q S_M}{m}; \quad (2)$$

- угла наклона траектории  $\theta$ :

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{g \cos \theta}{V} - \frac{C_y q S_M}{m V}; \quad (3)$$

- угла пути  $\psi$ :

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{f_z I_x \omega_x \dot{\theta}}{l m V \cos \theta} - \frac{C_z q S_M}{m V \cos \theta}; \quad (4)$$

- аксиальной угловой скорости снаряда  $\omega_x$ :

$$\frac{d\omega_x}{dt} = -\frac{m_x q S_M l}{I_x}. \quad (5)$$

Здесь  $g$  – ускорение силы тяжести;  $C_x, C_y, C_z$  – коэффициенты проекций силы аэродинамического сопротивления на оси связанной со снарядом системы координат  $Oxyz$ ;  $q$  – скорость напор воздуха;  $S_M = \frac{\pi d^2}{4}$  – площадь миделева сечения снаряда;  $d$  – калибр снаряда;  $m$  – масса снаряда;  $f_z$  – коэффициент деривации;  $I_x$  – аксиальный момент инерции снаряда;  $l$  – длина снаряда.

Коэффициенты проекций силы аэродинамического сопротивления в уравнениях (2)–(4) определяются по формулам

$$\begin{aligned} C_x &= C_x(M) + \Delta C_x^w, \\ C_y &= \Delta C_y^w, \quad C_z = \Delta C_z^w, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $C_x(M)$  – аппроксимация зависимости коэффициента лобового сопротивления снаряда от числа Maxa;  $\Delta C_x^w, \Delta C_y^w, \Delta C_z^w$  – отклонения коэффициентов составляющих аэродинамической силы, вызываемые ветром.

Зависимость коэффициента лобового сопротивления от числа Maxa

$$C_x(M) = i_x C_x^{\text{эт}}(M), \quad (7)$$

где  $i_x$  – коэффициент аэродинамической формы снаряда;  $C_x^{\text{эт}}(M)$  – эталонный коэффициент сопротивления, задается в соответствии с аппроксимацией закона сопротивления 1943 г. или закона сопротивления 1958 г.

Начальные условия в момент вылета снаряда из ствола орудия  $t = t_0$ :

$$\begin{aligned} x_c(t_0) &= x_0, \quad y_c(t_0) = y_0, \quad z_c(t_0) = z_0, \\ V_k(t_0) &= V_0, \quad \theta(t_0) = \theta_0, \quad \psi(t_0) = 0, \quad \omega_x(t_0) = \omega_{x0}, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $x_0, y_0, z_0$  – координаты центра масс снаряда в момент вылета из ствола;  $V_0$  – начальная скорость снаряда;  $\theta_0$  – угол стрельбы, равен углу возвышения орудия;  $\omega_{x0}$  – начальное значение угловой скорости снаряда.

Значение  $\omega_{x0}$  для снаряда нарезных орудий определяется по формуле

$$\omega_{x0} = \frac{2\pi V_0}{\eta d},$$

где  $\eta$  – длина шага нарезов ствола, выраженная в калибрах.

Система дифференциальных уравнений (1)–(5) с начальными условиями (8) решается численно 4-этапным методом Рунге – Кутта.

#### Постановка обратной задачи

##### внешней баллистики

При решении обратной задачи определения координат выстрела по участку траектории наряду со стартовой системой координат будем рассматривать земную систему координат  $O_3x_3y_3z_3$  с началом координат  $O_3$  в точке расположения локатора; ось  $O_3x_3$  направлена горизонтально на север, ось  $O_3y_3$  направлена вертикально, ось  $O_3z_3$  перпендикулярна плоскости  $O_3x_3y_3$  и образует правую тройку векторов (рис. 2).

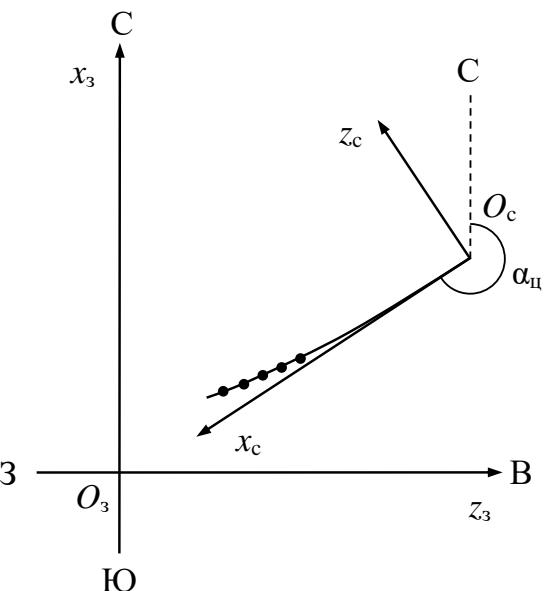


Рис. 2. Земная  $O_3x_3y_3z_3$  и стартовая  $O_cx_cy_cz_c$  системы координат

Fig. 2. Earth  $O_3x_3y_3z_3$  and starting  $O_cx_cy_cz_c$  coordinate systems

Траектория движения снаряда рассчитывается в стартовой системе координат  $O_cx_cy_cz_c$ . Координаты снаряда, зафиксированные локатором, а также координаты точки выстрела при решении обратной задачи определяются в земной системе координат  $O_3x_3y_3z_3$ . Переход от стартовой  $O_cx_cy_cz_c$  к земной  $O_3x_3y_3z_3$  системе координат осуществляется с помощью преобразования координат:

$$x_3 = x_0 + x_c \cos \alpha_{\text{uu}} - z_c \sin \alpha_{\text{uu}},$$

$$y_3 = y_0 + y_c,$$

$$z_3 = z_0 + x_c \sin \alpha_{\text{uu}} + z_c \cos \alpha_{\text{uu}},$$

где  $x_0, y_0, z_0$  – координаты точки расположения орудия в земной системе координат.

На зафиксированном участке траектории известны координаты снаряда, определяемые локатором в фиксированные моменты времени  $t_k^u$ :

$$t_k^u : \tilde{x}_{3k}^u, \tilde{y}_{3k}^u, \tilde{z}_{3k}^u, t_k^u = t_0^u + k\tau_u, k = \overline{0, n},$$

где  $\tau_u$  – интервал времени сканирования локатора;  $n$  – количество интервалов измерений.

#### Алгоритм решения обратной задачи с помощью численных методов

Алгоритм решения обратной задачи с помощью численных методов состоит из следующих этапов.

1. Предварительная оценка дирекционного угла цели и преобразование системы координат.

2. Построение аппроксимирующих полиномов данных измерений координат снаряда и определение траекторных параметров.

3. Расчет баллистического коэффициента и определение типа снаряда.

4. Обратный и прямой расчет траектории от начала зафиксированного участка траектории до точки выстрела с уточнением траекторных параметров и координат точки выстрела.

Значение дирекционного угла цели в диапазоне  $[0; 2\pi]$  определяется по формуле

$$\alpha_{\text{ц}} = \text{azimuth}(\Delta_x, \Delta_z) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + \arctg\left(\frac{\Delta_x}{\Delta_z}\right), & \Delta_z > 0, \\ \frac{3\pi}{2} - \arctg\left(\frac{\Delta_x}{\Delta_z}\right), & \Delta_z < 0, \\ 0, & \Delta_z = 0, \Delta_x > 0, \\ \pi, & \Delta_z = 0, \Delta_x < 0, \end{cases}$$

где  $\Delta_x, \Delta_z$  – разности между координатами первой и последней точки зафиксированного участка траектории,  $\Delta_x = x_{3n}^{\text{ц}} - x_{30}^{\text{ц}}$ ;  $\Delta_z = z_{3n}^{\text{ц}} - z_{30}^{\text{ц}}$ .

Данные измерений получены с некоторой погрешностью, зависящей от характеристик локатора. Для получения гладких кривых применяется процедура аппроксимации данных полиномом 4-й степени. Аппроксимационные зависимости для измеренных координат снаряда:

$$\begin{aligned} x_c^{\text{a}}(t) &= a_{x0} + a_{x1}t + a_{x2}t^2 + a_{x3}t^3 + a_{x4}t^4, \\ y_c^{\text{a}}(t) &= a_{y0} + a_{y1}t + a_{y2}t^2 + a_{y3}t^3 + a_{y4}t^4, \\ z_c^{\text{a}}(t) &= a_{z0} + a_{z1}t + a_{z2}t^2 + a_{z3}t^3 + a_{z4}t^4, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $a_{xi}, a_{yi}, a_{zi}, i = \overline{0, 4}$  – коэффициенты аппроксимации, определяемые с помощью метода наименьших квадратов (МНК).

Основные траекторные параметры (скорость, угол наклона траектории и угол пути) определяются на основе аппроксимационных зависимостей (9) с помощью дифференцирования полиномов:

$$\begin{aligned} V &= \sqrt{(dx_c^{\text{a}})^2 + (dy_c^{\text{a}})^2 + (dz_c^{\text{a}})^2}, \\ \theta &= \arctg\left(\frac{dy_c^{\text{a}}}{dx_c^{\text{a}}}\right), \quad \psi = -\arctg\left(\frac{dz_c^{\text{a}}}{dx_c^{\text{a}}}\right). \end{aligned} \quad (10)$$

Для определения типа снаряда рассчитывается его баллистический коэффициент  $C = \frac{i_x d^2}{m} 10^3$  [24]. Из уравнения изменения скорости (4) с учетом соотношений (6), (7) получим:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= -g \sin \theta - \frac{C_x q S_M}{m} = \\ &= -g \sin \theta - \frac{(i_x C_x^{\text{ср}}(M) + \Delta C_x^w) q \pi d^2}{4m} = \\ &= -g \sin \theta - C \left( C_x^{\text{ср}}(M) + \frac{\Delta C_x^w}{i_x} \right) \frac{q \pi}{4 \cdot 10^3}. \end{aligned}$$

Полагая здесь  $i_x = 1$ , получим выражение для определения баллистического коэффициента

$$C = -\frac{4 \cdot 10^3}{(C_x^{\text{ср}}(M) + \Delta C_x^w) q \pi} \left( \frac{dV}{dt} + g \sin \theta \right). \quad (11)$$

Вследствие наличия ошибок измерений значение баллистического коэффициента, рассчитанное по формуле (11) на зафиксированном участке траектории, может изменяться, поэтому определяется среднее значение  $\bar{C}$ .

На основе полученного значения  $\bar{C}$  по базе данных снарядов определяется снаряд с наиболее близким значением баллистического коэффициента и его основные характеристики.

Расчет траектории от начала зафиксированного участка до точки выстрела производится путем численного интегрирования уравнений движения с отрицательным шагом по времени ( $-\tau$ ).

Для уточнения траекторных параметров и координат точки выстрела решается задача минимизации отклонений расчетной траектории от точек, зафиксированных локатором:

$$F(\mathbf{p}) \rightarrow \min, \quad \mathbf{p} = (x_0, z_0, \theta_0, \psi_0)^T, \quad (12)$$

где  $F = \sum_{k=0}^n \sqrt{(\tilde{x}_{3k}^{\text{ц}} - x_{3k})^2 + (\tilde{y}_{3k}^{\text{ц}} - y_{3k})^2 + (\tilde{z}_{3k}^{\text{ц}} - z_{3k})^2}$  – функция, определяющая среднее отклонение расчетных координат снаряда от координат, зафиксированных локатором.

Для решения задачи оптимизации (12) применялся гибридный генетический алгоритм [25].

#### Алгоритм решения обратной задачи с помощью нейронных сетей

Общий алгоритм решения обратной задачи с помощью нейронных сетей включает следующие этапы.

1. Предобработка исходных данных: преобразование исходных данных из сферической системы координат локатора в прямоугольную земную систему координат  $O_3x_3y_3z_3$ , связанную с локатором (см. рис. 2).

2. Оценка линии регрессии и дирекционного угла стрельбы с помощью МНК по зафиксированным точкам в проекции  $O_3x_3y_3$ . Построение первоначальной плоскости стрельбы по линии регрессии. Полагаем номер итерации  $k = 0$ , начальная оценка точки стрельбы  $O_c^0 = (x_c^0, y_c^0, z_c^0) = (x_1, 0, z_1)$  совпадает с проекцией первой зафиксированной точки на плоскость  $O_3x_3y_3$ . В дальнейшем будем считать, что точка стрельбы всегда располагается в горизонтальной плоскости  $O_3x_3y_3$ , то есть  $y_c^k \equiv 0$ .

3. Проецирование зафиксированной части траектории на плоскость стрельбы. Классификация типа снаряда с использованием нейронной сети глубокого обучения на основе нормированных данных зафиксированного участка траектории в первоначальной плоскости стрельбы. Увеличиваем номер итерации  $k = k + 1$ .

4. Восстановление траектории снаряда, тип которого определен на предыдущем шаге, с использованием соответствующей нейронной сети глубокого обучения.

5. Определение текущих координат точки стрельбы  $O_c^k = (x_c^k, 0, z_c^k)$  из решения оптимизационной задачи сопоставления восстановленной траектории с зафиксированными точками траектории.

6. Сравнение отклонения текущей точки стрельбы с предыдущей

$$\|O_c^k - O_c^{k-1}\| = \sqrt{(x_c^k - x_c^{k-1})^2 + (y_c^k - y_c^{k-1})^2 + (z_c^k - z_c^{k-1})^2}.$$

Если отклонение меньше заданного  $\varepsilon_0$ ,  $\|O_c^k - O_c^{k-1}\| < \varepsilon_0$ , то производится уточнение дирекционного угла, формирование новой плоскости стрельбы и переход на шаг 3, в противном случае процедуры расчетов завершается и выводится расчетная точка стрельбы.

В качестве исходных данных имеем координаты траектории снаряда в системе координат локатора:

$$\begin{pmatrix} t_1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ t_2 & x_2 & y_2 & z_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_n & x_n & y_n & z_n \end{pmatrix}, \quad (13)$$

где  $x_i, y_i, z_i, i = \overline{1, n}$  – зафиксированные координаты снаряда в системе координат локатора.

По МНК проводим интерполяцию исходных данных полиномом степени  $m$ . Степень  $m$  определяется по формуле  $m = [\log_2 n]$ , где  $[.]$  – оператор, означает выделение целой части,  $n \geq 1$ .

В результате имеем сглаженные данные:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} t_1 & \bar{x}_1 & \bar{y}_1 & \bar{z}_1 \\ t_2 & \bar{x}_2 & \bar{y}_2 & \bar{z}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_n & \bar{x}_n & \bar{y}_n & \bar{z}_n \end{pmatrix}, \quad (14)$$

где  $\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i, i = \overline{1, n}$  – сглаженные координаты снаряда в декартовой системе координат локатора.

Оценка дирекционного угла выполняется с помощью уравнения линейной регрессии:

$$z = a + b \cdot x,$$

где  $a, b$  – коэффициенты регрессии определяются МНК по точкам  $(x_i, z_i), i = \overline{1, n}$ . Определяем начальное значение дирекционного угла:

$$\alpha_{\text{up}} = 90 + \arctg(b). \quad (15)$$

В системе координат локатора проводим плоскость, перпендикулярную плоскости  $Oxz$ . Плоскость определяется дирекционным углом  $\alpha_{\text{up}}$  и проходит через точку  $P_0 = (x_0, 0, z_0)$ , координаты которого располагаются на кривой (14). В дальнейшем эта точка будет соответствовать первой точке сглаженной прямой  $P_0 = (\bar{x}_1, 0, \bar{z}_1)$ .

Спроектируем точки (14) зафиксированной части сглаженной траектории на плоскость, перпендикулярную плоскости  $Oxz$ , проходящую через  $P_0$  с дирекционным углом  $\alpha_{\text{up}}$ :

$$\begin{pmatrix} t_1 & \bar{x}_{c1} & \bar{y}_{c1} \\ t_2 & \bar{x}_{c2} & \bar{y}_{c2} \\ \dots & \dots & \dots \\ t_n & \bar{x}_{cn} & \bar{y}_{cn} \end{pmatrix}, \quad (16)$$

где  $\bar{x}_{ci}, \bar{y}_{ci}, i = \overline{1, n}$  – проекция точек (14) на плоскость.

Добавим сведения о компонентах скорости ветра в стартовой системе координат  $w_{xi} = w_x(\bar{y}_{ci})$  и  $w_z = w_z(\bar{y}_{ci})$ ,  $i = \overline{1, n}$ , к координатам точек (16). В результате получаем массив:

$$\begin{pmatrix} t_1 & \bar{x}_{c1} & \bar{y}_{c1} & w_{x1} & w_{z1} \\ t_2 & \bar{x}_{c2} & \bar{y}_{c2} & w_{x2} & w_{z2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_n & \bar{x}_{cn} & \bar{y}_{cn} & w_{xn} & w_{zn} \end{pmatrix}. \quad (17)$$

С использованием нейронной сети глубокого обучения по данным (17) решается задача классификации типа снаряда. Выбранный тип снаряда используется в дальнейшем для восстановления траектории.

Рассмотрим задачу классификации типа снаряда по траекториям измерениям (участку траектории) с использованием сверточной нейронной сети глубокого обучения [26]. На вход нейронной сети подаются координаты снаряда и компоненты скорости ветра в стартовой системе координат (17).

На выходе необходимо определить номер типа снаряда  $y$ :

$$y \in \{1, 2, \dots, K\}, \quad (18)$$

где  $K$  – количество типов снарядов в базе данных.

Структура сверточной нейронной сети глубокого обучения для решения задачи классификации типа снаряда представлена в табл. 1.

**Таблица 1. Структура сверточной нейронной сети для задачи классификации типа снаряда**

**Table 1. Structure of a convolutional neural network for the problem of projectile type classification**

№ слоя	Тип слоя	Размер выходного слоя	Число оцениваемых параметров
0	Input	(n, 5)	0
1	Conv1D	(n, 128)	1280
2	Conv1D	(n, 64)	24640
3	Conv1D	(n, 32)	6176
4	Flatten	(n · 32)	0
5	Dense	(32)	10272
6	Dense	(K)	242

Из входного слоя Input данные передаются на скрытые сверточные слои типа Conv1D, которые предназначены для обработки сигналов в виде последовательного набора данных, зависящих от времени. Слой Flatten предназначен для представления двумерного тензора в одномерный и возможности в дальнейшем использовать полно связанные (Dense) нейронные слои.

Количество точек входного слоя задавалось равным  $n=10$ , что соответствует количеству зафиксированных точек, а выходного слоя –  $K=20$  в соответствии с количеством типов снарядов.

Процедура обучения осуществляется методом стохастического градиентного спуска Adam в пакете Tensor Flow [27]. Активационная функция на всех слоях, кроме последнего, ReLU. На последнем слое, на котором определяются вероятности принадлежности одному из классов, активационная функция Softmax. Номер класса определяется по максимальной вероятности на последнем слое.

Точность модели  $P$  определяется как отношение правильно классифицированных наблюдений  $N_{\Pi}$  к общему количеству наблюдений  $N_B$  в выборке:

$$P = \frac{N_{\Pi}}{N_B} \cdot 100\% .$$

Рассмотрим задачу восстановления полной баллистической траектории по зафиксированному участку траектории с использованием сверточной нейронной сети глубокого обучения.

На вход нейронной сети подаются координаты снаряда в стартовой системе координат в ви-

де (17). На выходе необходимо получить полную траекторию в стартовой системе координат:

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} t_1 & x_{c1} & y_{c1} & z_{c1} \\ t_2 & x_{c2} & y_{c2} & z_{c2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_N & x_{cN} & y_{cN} & z_{cN} \end{pmatrix}, \quad (19)$$

где  $t_i, x_{ci}, y_{ci}, z_{ci}, i=\overline{1, N}$  – время и координаты снаряда на восстановленной траектории.

Структура сверточной нейронной сети глубокого обучения для решения задачи восстановления траектории снаряда представлена в табл. 2.

**Таблица 2. Структура сверточной нейронной сети для восстановления траектории снаряда**

**Table 2. Structure of a convolutional neural network for projectile trajectory reconstruction**

№ слоя	Тип слоя	Размер выходного слоя	Число оцениваемых параметров
0	Input	(n, 5)	0
1	Conv1D	(n, 128)	1280
2	Conv1D	(n, 64)	24640
3	Conv1D	(n, 64)	12325
4	Conv1D	(n, N)	21230
5	Reshape	(N,n)	0
6	Conv1D	(N, 4)	124
7	Output	(N, 4)	0

Структура первых трех слоев нейронной сети для восстановления траектории (табл. 2) совпадает со структурой нейронной сети для классификации типа снаряда (см. табл. 1). На 5 слое производится преобразование размерности количества точек подаваемых на вход  $n=10$  в количество точек выходного слоя  $N=128$ . Последнее значение выбиралось в соответствии с максимальным количеством точек, необходимым для представления траектории всех исследуемых снарядов с шагом по времени  $\Delta t=1$  с.

Процедура обучения осуществляется методом стохастического градиентного спуска Adam в пакете TensorFlow. В качестве функции потерь используется средняя квадратическая ошибка (MSE). Активационная функция на всех слоях, кроме последнего, ReLU, на последнем слое – Linear (линейная).

## Формирование набора данных для обучения нейронных сетей глубокого обучения

Исходные данные для обучения нейронных сетей были получены в результате моделирования траекторий 20 типов снарядов с начальными углами стрельбы  $\theta_0 \in [0; \theta_{\max}]$ , где  $\theta_{\max}$  – максимально возможный угол стрельбы для данного типа снаряда; направление ветра  $\alpha_w \in [0; 360^\circ]$ ; скорость ветра  $w \in [0; 20]$  м/с. Всего было смоделировано 1250 траекторий, координаты снаряда фиксировались с интервалом 1с.

### Результаты решения обратной задачи

Рассмотрим решение задачи классификации снарядов. Зависимость точности классификации типа снаряда  $P$  от среднеквадратической ошибки (СКО) измерения его координат  $\sigma$  представлена на рис. 3.

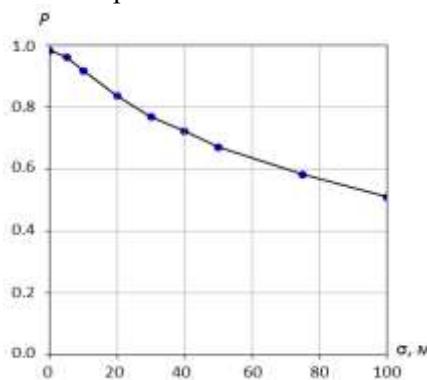


Рис. 3. Точность классификации снаряда в зависимости от СКО измерения координат  $\sigma$

*Fig. 3. Accuracy of projectile classification depending on the standard deviation of coordinate measurements  $\sigma$*

Результаты исследований показали, что при отсутствии ошибок измерений координат снаряда точность классификации типа снаряда составила 98 %. При увеличении среднеквадратической ошибки измерений до 100 м точность классификации снижается до ~50 %. Это связано также с близкими по своим значениям характеристиками некоторых типов снарядов, в частности значения баллистического коэффициента для снарядов одного калибра может отличаться менее чем на 1 %.

Результаты решения обратной задачи восстановления всей траектории по зафиксированному участку и определения координат точки выстрела представлены на рис. 4. В качестве исходных данных установим точку выстрела  $O_c = (25000, 0, 5000)$  и дирекционный угол  $\alpha_{\text{ц}} = 135^\circ$ .

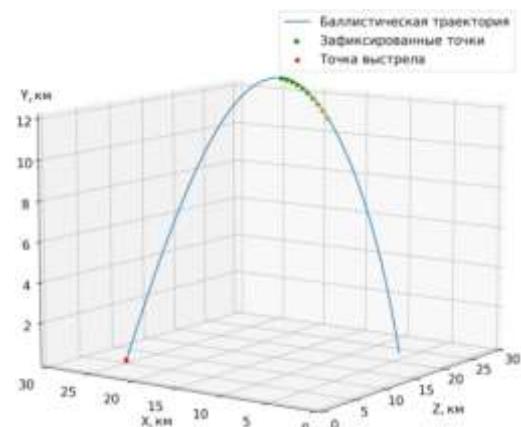


Рис. 4. Траектория снаряда  $Y$  и зафиксированный участок  $X$  в системе координат локатора

*Fig. 4. The trajectory of the projectile  $Y$  and the fixed section  $X$  in the locator coordinate system*

Результаты решения задачи определения точки выстрела, полученной при многократном решении задачи для случайного распределения ошибок измерений, приведены на рис. 5. Отметим, что все точки, представленные на рис. 5, приведены относительно реальной точки выстрела.



Рис. 5. Распределение точек выстрела при  $\sigma = 5$  м

*Fig. 5. Distribution of shooting points for  $\sigma = 5$  m*

Среднеквадратическое отклонение  $\delta$  восстановленных точек  $\mathbf{d}_i = (x_i, z_i)$  от реальной точки выстрела  $\mathbf{d}_0 = (x_0, z_0)$  рассчитывалось по формуле

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{N_B} \sum_{i=1}^{N_B} \|\mathbf{d}_i - \mathbf{d}_0\|^2},$$

где  $\|\mathbf{d}_i - \mathbf{d}_0\|$  – евклидово расстояние между точками, определяется по формуле  $\|\mathbf{d}_i - \mathbf{d}_0\| = \sqrt{(x_i - x_0)^2 + (z_i - z_0)^2}$ .

Отметим также, что для всех точек координата, соответствующая высоте, принималась равной  $y=0$ , а в представленном выше примере координаты точки выстрела были равны  $\mathbf{d}_0 = (25000, 500)$ .

Среднеквадратические отклонения  $\delta$  рассчитывались при фиксированных среднеквадратических ошибках измерения  $\sigma$ , то есть  $\delta = \delta(\sigma)$ . Результаты расчета зависимости среднеквадратического отклонения определения координат точки выстрела при решении обратной задачи от СКО измерения координат снаряда представлены на рис. 6.

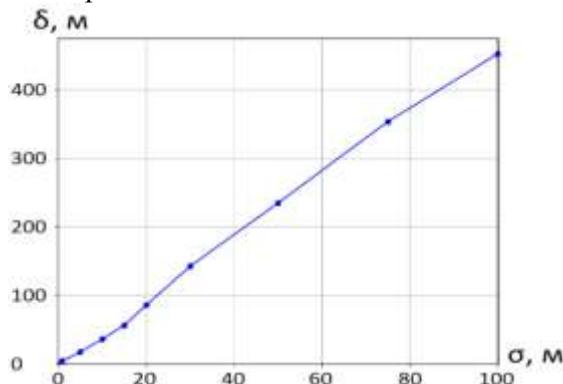


Рис. 6. Зависимость средней ошибки определения координат точки выстрела  $\delta$  от СКО измерения координат снаряда  $\sigma$

Fig. 6. Dependence of the average error in determining the coordinates of the shot point  $\delta$  on the standard deviation of the measurement of the projectile coordinates  $\sigma$

Результаты исследований показали, что среднеквадратическое отклонение координат точки выстрела  $\delta$  практически линейно возрастает с увеличением ошибки измерения координат снаряда  $\sigma$ , коэффициент отношения  $\chi = \frac{\delta}{\sigma} \approx 4.5$  (см. рис. 6).

### Заключение

В ходе проведенных исследований получены следующие результаты:

1. Представлена математическая модель прямой задачи внешней баллистики, которая лежит в основе алгоритма решения обратной задачи с помощью численных методов и используется при построении базы данных вычислительных экспериментов для обучения нейронных сетей.

2. Разработан алгоритм решения обратной задачи внешней баллистики на основе численных методов интегрирования дифференциальных уравнений движения снаряда, алгоритмов аппроксимации данных траекторных измерений и метода многомерной оптимизации.

3. Разработан алгоритм решения обратной задачи с применением методов искусственного интеллекта для обработки данных траекторных измерений. Для классификации типа снаряда и восстановления всей траектории построены сверточные нейронные сети глубокого обучения.

4. Разработанные математические модели и алгоритмы позволили на основе имитационного моделирования провести исследование зависимости погрешности определения координат точки выстрела от среднеквадратической ошибки измерения координат снаряда радиолокатором.

5. Как показал анализ литературы, для восстановления траектории снаряда во многих исследованиях используются рекуррентные нейронные сети – RNN. В этой связи, для улучшения точности определения точки выстрела планируются дальнейшие исследования по применению RNN с механизмами внимания LSTM и GRU совместно с математическими моделями, описывающими физическое движения снаряда в воздушном пространстве.

### Библиографические ссылки

1. Разработка подходов к решению обратной задачи внешней баллистики в различных условиях применения / С. А. Королев, А. М. Липанов, И. Г. Русяк, В. А. Тененев // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 57. С. 76–83. DOI 10.17223/19988621/57/6.

2. Королев С. А., Ренкез Г. В. Разработка алгоритма восстановления начальных условий стрельбы по участку траектории // II Липановские научные чтения : материалы Всероссийской школы-семинара молодых ученых и студентов. Ижевск, 2023. С. 61–70.

3. Бляхман А. Б., Матюгин С. Н., Прохоров А. Г. О возможности применения обзорной радиолокационной станции для решения задач определения точек прицеливания (падения) // Вестник концерна ВКО «Алмаз – Антей». 2016. № 2 (17). С. 13–19.

4. Локшин Б. Я., Самсонов В. А. Об аппроксимации траекторий полета баллистического объекта // Известия Российской академии ракетных и артиллерийских наук. 2023. № 3 (128). С. 38–43. DOI 10.53816/20753608\_2023\_3\_38.

5. Козлитин И. А. Восстановление входных параметров расчета внешней баллистики тела по результатам траекторных измерений // Математическое моделирование. 2017. Т. 29. № 9. С 121–134.

6. Леонович А. С., Ярмолик С. Н., Свиарский М. В. Способ решения задачи определения точек старта (падения) снарядов применительно к радиолокационной артиллерийской разведке с использованием оптимизационного метода // Информационные радиосистемы и радиотехнологии. Минск, Республика Беларусь, 2022. С. 150–154.

7. HouLh., LiuHj. AnEnd-to-EndLSTM-MDNNetworkforProjectileTrajectoryPrediction. In: Cui,

- Z., Pan, J., Zhang, S., Xiao, L., Yang, J. (eds) Intelligence Science and Big Data Engineering. Big Data and Machine Learning. IScIDE 2019. Lecture Notes in Computer Science. Vol 11936. 2019. Springer, Cham. DOI: 10.1007/978-3-030-36204-1\_9
8. Roux A., Weber J., Lauffenburger J.-Ph., Changey S. Projectile trajectory estimation: an LSTM approach. Conference on Artificial Intelligence for Defense, DGA Maîtrise de l'Information. 2022. Rennes, France. URL: <https://hal.science/hal-03881740v1>
9. Королев С. А., Нефедов Д. Г., Русак И. Г. Интеллектуальная система автономного наведения и корректировки стрельбы из артиллерийской установки // Интеллектуальные системы в производстве. 2024. Том. 22, № 3. С. 85–91. DOI: 10.22213/2410-9304-2024-3-85-91.
10. Wang H., Zhi W., Batista G., Chandra R. Pedestrian Trajectory Prediction Using Dynamics-based Deep Learning. IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), Yokohama, Japan, 2024. pp. 15068-15075. DOI: 10.1109/ICRA57147.2024.10609993.
11. Shi Z., Xu M., PanQ., Yan B., Zhang H. LSTM-based Flight Trajectory Prediction. International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN), Rio de Janeiro, Brazil, 2018. pp. 1-8, DOI: 10.1109/IJCNN.2018.8489734.
12. Huizing A., Heiligers M., Dekker B., de Wit J., Cifola L., Harmann R. Deep Learning for Classification of Mini-UAVs Using Micro-Doppler Spectrograms in Cognitive Radar. IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine. Vol. 34. No. 11. pp. 46-56. 2019. DOI: 10.1109/MAES.2019.2933972.
13. Swinney C. J., Woods J.C. Unmanned Aerial Vehicle Flight Mode Classification using Convolutional Neural Network and Transfer Learning. 2020 16th International Computer Engineering Conference (ICENCO), Cairo, Egypt, 2020. pp. 83-87. DOI: 10.1109/ICENCO49778.2020.9357368.
14. Звонарев И. С., Караваев Ю. Л. Нейросетевой алгоритм обучения мобильного робота в задаче следования за целью // Вестник ИжГТУ имени М. Т. Калашникова. 2024. Том. 27, № 2. С. 4–14. DOI: 10.22213/2413-1172-2024-2-4-14.
15. Capobianco S., Millefiori L.M., Forti N., Braca P., Willert P. Deep Learning Methods for Vessel Trajectory Prediction Based on Recurrent Neural Networks. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. Vol. 57. No. 6. pp. 4329-4346. 2021, DOI: 10.1109/TAES.2021.3096873
16. Kovtunov E.V., Gaiduchenko N.E., Vylegzhannina O.V., Pushkov A.A., Malashko Y.I. Ballistic projectile trajectories classification using machine learning // Всб.: Инженеринг телекоммуникации (En&T). Москва, 2023. С. 358-369.
17. Гайдученко Н.Е. Предсказание траекторий движения гиперзвуковых летательных аппаратов с помощью нейронных сетей // Вестник воздушно-космической обороны. 2021. № 4 (32). С. 108–116.
18. Gaiduchenko N. E., Gritsyk P. A. and Malashko Y. I. Multi-Step Ballistic Vehicle Trajectory Forecasting Using Deep Learning Models, 2020 International Conference Engineering and Telecommunication (En&T), Dolgoprudny, Russia, 2020. pp. 1-6. DOI: 10.1109/EnT50437.2020.9431287
19. Waingankar V.R., Vempati V.S., Santhosh, Malar kannan G. Target Classification Using CNN-LSTM Network with Reduced Sample Size in Surveillance Radar. In: Shetty, N.R., Patnaik, L.M., Prasad, N.H. (eds) Emerging Research in Computing, Information, Communication and Applications. Lecture Notes in Electrical Engineering. Vol. 928. 2023. Springer, Singapore. DOI: 10.1007/978-981-19-5482-5\_19.
20. Roux A., Changey S., Weber J., Lauffenburger J.-P. LSTM-based projectile trajectory estimation in a GNSS-denied environment. Sensors.2023.23(6):3025. DOI: 10.3390/s23063025.
21. Tan M., Yu G., Wang H. Research on 4D Trajectory Prediction Algorithm Based on Hybrid Neural Network Model. IEEE 6th International Conference on Automation, Electronics and Electrical Engineering (AU-TEE), Shenyang, China, 2023. pp. 112-119. DOI: 10.1109/AUTEEE60196.2023.10408207.
22. Дмитриевский А. А., Лысенко Л. Н. Внешняя баллистика. М. : Машиностроение, 2005. 608 с. ISBN 5-217-03252-9.
23. Численное моделирование артиллерийского выстрела с применением визуальных технологий для проектирования и отработки артиллерийских систем: монография / А. М. Липанов, И. Г. Русак, В. А. Тененев, В. Г. Суфиянов, С. А. Королев, М. Н. Белобородов. М. ; Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2023. 416 с. I SBN: 978-5-4344-0966-7.
24. Баллистика ствольных систем / Бурлов В. В. и др. РАРАН ; под ред. Л. Н. Лысенко и А. М. Липанова. М. : Машиностроение, 2006. 461 с. ISBN 5-217-03330-4.
25. Тененев В. А., Якимович Б. А. Генетические алгоритмы в моделировании систем. Ижевск : Изд-во ИжГТУ, 2010. 308 с. ISBN: 978-5-7526-0472-0.
26. Rashka S. Python Machine Learning: Machine Learning and Deep Learning with Python, Scikit-Learn, and TensorFlow 2. Packt Publishing, 2019. 770 p.
27. Zhuang J., Tang T., Ding Y., Tatikonda S., Dvornik N., Papademetris X., Duncan J. AdaBelief Optimizer: Adapting Stepsizes by the Belief in Observed Gradients. NeurIPS, 2020. DOI 10.48550/arXiv.2010.07468.

## References

1. Korolev S.A., Lipanov A.M., Rusyak I.G., Tenenev V.A. [Development of the approaches for solving an inverse problem of external ballistics in various application conditions]. Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mehanika, 2019, no. 57, pp. 76-83 (in Russ.). DOI 10.17223/19988621/57/6.
2. Korolev S.A., Renkez G.V. [Development of an algorithm for restoring the initial conditions of firing along a section of the trajectory] Razrabotka algoritma vosstanovleniya nachal'nykh usloviy strel'by po uchastku trayektorii. II Lipanovskiye nauchnyye chteniya. Materialy Vserossiyskoy shkoly-seminara molodykh uchenykh i studentov. Izhevsk, 2023, pp. 61-70 (in Russ.).

3. Blyakhman A.B., Matyugin S.N., Prokhorov A.G. [On the possibility of employing radar station to solve problems of locating points of aim (points of impact)] O vozmozhnosti primeneniya obzornoj radiolokatsionnoy stantsii dlya resheniya zadach opredeleniya tochek pritselivaniya (padeniya). *Vestnik Kontserna VKO "Almaz – Antey"*, 2016, no. 2(17), pp. 13-19 (in Russ.).
4. Lokshin B.YA., Samsonov V.A. [On the approximation of the flight path of a ballistic object] Ob approksimatsii trayektorii poleta ballisticheskogo ob'yekta. *Izvestiya Rossiyskoy akademii raketnykh i artilleriiskikh nauk*, 2023, no. 3(128), pp. 38-43. (in Russ.) DOI 10.53816/20753608\_2023\_3\_38.
5. Kozlitin I.A. [The restoration of input parameters of an exterior ballistic solution by the results of body movement trajectory measurement] Vosstanovleniye vkhodnykh parametrov rascheta vnesheyny ballistiky tela po rezul'tatam trayektoriykh izmereniy. *Matematicheskoye modelirovaniye*. 2017. T. 29, no. 9, pp. 121–134 (in Russ.).
6. Leonovich A.C., Yarmolik S.N., Svinarskiy M.V. [Method for solving the problem of determining the launch (fall) points of shells in relation to radar artillery reconnaissance using an optimization method] Sposob resheniya zadachi opredeleniya tochek starta (padeniya) snaryadov primenitel'no k radiolokatsionnoy artilleriiskoy razvedke s ispol'zovaniyem optimizatsionnogo metoda. *Informatsionnyye radiosistemy i radiotekhnologii*. Minsk, Belarus, 2022, pp. 150-154 (in Russ.).
7. Hou Lh., Liu Hj. An End-to-End LSTM-MDN Network for Projectile Trajectory Prediction. In: Cui, Z., Pan, J., Zhang, S., Xiao, L., Yang, J. (eds) Intelligence Science and Big Data Engineering. Big Data and Machine Learning. IScIDE 2019. Lecture Notes in Computer Science, vol 11936. 2019, Springer, Cham. DOI: 10.1007/978-3-030-36204-1\_9
8. Roux A., Weber J., Lauffenburger J.-Ph., Changey S. Projectile trajectory estimation: an LSTM approach. Conference on Artificial Intelligence for Defense, DGA Maîtrise de l'Information, 2022, Rennes, France. URL: <https://hal.science/hal-03881740v1>
9. Korolev S. A., Nefedov D. G., Rusyak I. G. Intelligent system for artillery mount autonomous guidance and firing adjustment // *Intellektual'nyye sistemy v proizvodstve*, 2024, no. 22(3), pp. 85–91. DOI: 10.22213/2410-9304-2024-3-85-91.
10. Wang H., Zhi W., Batista G., Chandra R. Pedestrian Trajectory Prediction Using Dynamics-based Deep Learning, IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), Yokohama, Japan, 2024, pp. 15068-15075, DOI: 10.1109/ICRA57147.2024.10609993.
11. Shi Z., Xu M., PanQ., Yan B., Zhang H. LSTM-based Flight Trajectory Prediction, International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN), Rio de Janeiro, Brazil, 2018, pp. 1-8, DOI: 10.1109/IJCNN.2018.8489734.
12. Huizing A., Heiligers M., Dekker B., de Wit J., Cifola L., Harmann R. Deep Learning for Classification of Mini-UAVs Using Micro-Doppler Spectrograms in Cognitive Radar, IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine, vol. 34, no. 11, pp. 46-56, 1 Nov. 2019, DOI: 10.1109/MAES.2019.2933972.
13. Swinney C. J., Woods J.C. Unmanned Aerial Vehicle Flight Mode Classification using Convolutional Neural Network and Transfer Learning, 2020 16th International Computer Engineering Conference (ICENCO), Cairo, Egypt, 2020, pp. 83-87, DOI: 10.1109/ICENCO49778.2020.9357368.
14. Zvonarev I. S., Karavayev YU. L. Neural network algorithm for training a mobile robot in the task of following a target // *Vestnik IzhGTU imeni M.T. Kalashnikova*. 2024, no. 27(2), pp. 4–14. DOI: 10.22213/2413-1172-2024-2-4-14..
15. Capobianco S., Millefiori L.M., Forti N., Braca P., Willett P. Deep Learning Methods for Vessel Trajectory Prediction Based on Recurrent Neural Networks, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, vol. 57, no. 6, pp. 4329-4346, Dec. 2021, DOI: 10.1109/TAES.2021.3096873
16. Kovtunov E.V., Gaiduchenko N.E., Vylegzhannina O.V., Pushkov A.A., Malashko Y.I. Ballistic projectile trajectories classification using machine learning // International Conference Engineering and Telecommunication (En&T), Moscow, Russia, 2023, pp. 358-369.
17. Gayduchenko N.Ye. [Prediction of trajectories of hypersonic aircraft using neural networks] Predskazaniye trayektoriy dvizheniya giperzvukovykh letatel'nykh apparatov s pomoshch'yu nevronnykh setey // *Vestnik vozdushno-kosmicheskoy oborony*, 2021, no. 4 (32), pp. 108-116 (in Russ.).
18. Gaiduchenko N. E., Gritsyk P. A. and Malashko Y. I. Multi-Step Ballistic Vehicle Trajectory Forecasting Using Deep Learning Models// International Conference Engineering and Telecommunication (En&T), Dolgoprudny, Russia, 2020, pp. 1-6, DOI: 10.1109/EnT50437.2020.9431287
19. Waingankar V.R., Vempati V.S., Santhosh, Malar kannan G. Target Classification Using CNN-LSTM Network with Reduced Sample Size in Surveillance Radar. In: Shetty, N.R., Patnaik, L.M., Prasad, N.H. (eds) Emerging Research in Computing, Information, Communication and Applications. Lecture Notes in Electrical Engineering, vol. 928, 2023, Springer, Singapore, DOI: 10.1007/978-981-19-5482-5\_19.
20. Roux A., Changey S., Weber J., Lauffenburger J.-P. LSTM-based projectile trajectory estimation in a GNSS-denied environment, Sensors, 2023, 23(6):3025. DOI: 10.3390/s23063025.
21. Tan M., Yu G., Wang H. Research on 4D Trajectory Prediction Algorithm Based on Hybrid Neural Network Model, IEEE 6th International Conference on Automation, Electronics and Electrical Engineering (AU-TEEE), Shenyang, China, 2023, pp. 112-119, DOI: 10.1109/AU-TEEE60196.2023.10408207.
22. Dmitriyevskiy A.A., Lysenko L.N. *Vneshnyaya ballistika* [External ballistics]. Moscow: Mashinostroenie Publ., 2005. 608 p. (in Russ.).
23. Lipanov A.M., Rusyak I.G., Tenenev V.A., Sufiyanov V.G., Beloborodov M.N. *Chislennoe modelirovaniye artilleriiskogo vystrela s primeneniem vizual'nykh*

*tekhnologii dlya proektirovaniya i otrabotki artille-  
riiskikh system* [Numerical modeling of an artillery shot  
using visual technologies for the design and testing of  
artillery systems]. Moscow, Izhevsk, Institute of Computer Research, 2023, 416 p. (in Russ.).

24. Burlov V.V. et al. *Ballistika stvol'nyh system* [Ballistics of barrel systems]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 2006. 461 p. (in Russ.).

25. Tenenev V.A., Jakimovich B.A. *Geneticheskie algoritmy v modelirovaniy system* [Genetic algorithms in system modeling]. Izhevsk, ISTU publ., 2010. 308 p. (in Russ.).

\* \* \*

26. Rashka S. *Python Machine Learning: Machine Learning and Deep Learning with Python, Scikit-Learn, and TensorFlow 2*. Packt Publishing, 2019. 770 p.

27. Zhuang J., Tang T., Ding Y., Tatikonda S., Dvornek N., Papademetris X., Duncan J. AdaBelief Optimizer: Adapting Stepsizes by the Belief in Observed Gradients, NeurIPS, 2020. DOI 10.48550/arXiv.2010.07468.

## Solving the Inverse Problem of Determining the Firing Point Based on a Fixed Section of the Trajectory Using Deep Learning Neural Networks

I. G. Rusyak, RAMAS academician, DSc in Engineering, Professor, Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk, Russia

V. A. Tenenev, DSc in Physics and Mathematics, Professor, Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk, Russia

S. A. Korolev, DSc in Engineering, Associate Professor, Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk, Russia

V. G. Sufiyanov, DSc in Engineering, Associate Professor, Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk, Russia

The article presents mathematical models and numerical algorithms for solving direct and inverse problems of external ballistics in order to reconstruct the trajectory from a fixed section and determine the firing point. When solving inverse problems of external ballistics, two approaches are considered. The first approach is based on numerical methods for solving systems of differential equations of projectile motion and algorithms for solving inverse problems. The second approach is based on processing trajectory measurement data using deep learning neural networks. The algorithm for solving the inverse problem using numerical methods consists of several stages. Since the projectile coordinate measurement data are obtained with some error depending on the characteristics of the locator, a procedure for approximating the data with fourth-degree polynomials is used to obtain smooth curves. To determine the type of projectile, its ballistic coefficient is calculated. The projectile with the closest ballistic coefficient and its main characteristics are determined from the projectile database. The trajectory from the beginning of the fixed section to the firing point is calculated by numerically integrating the equations of motion with a negative time step. To clarify the trajectory parameters and coordinates of the firing point, the problem of minimizing the deviations of the calculated trajectory from the points recorded by the locator is solved. The general algorithm for solving the inverse problem using neural networks includes the following stages: preprocessing of the initial data; estimation of the directional firing angle; classification of the projectile type; reconstruction of the projectile trajectory; determination of the coordinates of the firing point from the solution of the optimization problem. To solve the problems of classifying the projectile type and reconstructing the trajectory, convolutional neural networks of deep learning were built. The data for training the neural networks were obtained as a result of modeling the trajectories of 20 types of projectiles with different initial firing angles, wind direction and speed. The results of a study of the dependence of the error in determining the coordinates of the firing point on the root-mean-square error of measuring the projectile coordinates by a radar are presented.

**Keywords:** external ballistics, direct and inverse problem, ballistic coefficient, deep learning neural network, projectile type classification, trajectory reconstruction.

Получено: 27.05.25

### Образец цитирования

Русяк И. Г., Тененев В. А., Королев С. А., Суфиянов В. Г. Решение обратной задачи определения точки выстрела по зафиксированному участку траектории с применением нейронных сетей глубокого обучения // Интеллектуальные системы в производстве. 2025. Т. 23, № 3. С. 105–116. DOI: 10.22213/2410-9304-2025-2-105–116.

### For Citation

Rusyak I. G., Tenenev V.A., Korolev S.A., Sufiyanov V.G. [Solving the inverse problem of determining the firing point based on a fixed section of the trajectory using deep learning neural networks]. *Intellektual'nye sistemy v proizvodstve*. 2025, vol. 23, no. 2, pp. 105–116. DOI: 10.22213/2410-9304-2025-2-105–116.