

УДК 532.517

DOI: 10.22213/2410-9304-2026-1-78-88

Численное моделирование неоднородного течения Куэтта – Пуазейля с учетом трения Рэлея

К. В. Губарева, кандидат технических наук,

Самарский государственный технический университет, Самара, Россия

Е. Ю. Просвиряков, доктор физико-математических наук, доцент,

Уральский федеральный университет; заведующий сектором, главный научный сотрудник, Институт машиноведения Уральского отделения Российской академии наук, Екатеринбург, Россия

Представлены результаты численного моделирования стационарного течения вязкой несжимаемой жидкости в плоском канале с учетом линейного трения Рэлея. Исследование сосредоточено на обобщенной модели гибридного течения Куэтта – Пуазейля, в которой продольная скорость линейно зависит от поперечной координаты, а коэффициенты этого разложения изменяются по высоте канала. Математическая модель основана на модифицированных уравнениях Навье – Стокса с дополнительным диссипативным членом, пропорциональным скорости, что позволяет учитывать распределенные силы сопротивления, возникающие при течении через пористые среды или в присутствии дисперсных фаз. Для решения краевой задачи использован метод конечных разностей второго порядка точности, реализованный в среде MATLAB 2023b. Проведена верификация численного метода путем сравнения с аналитическими решениями для предельных случаев. Исследовано влияние коэффициента трения Рэлея на структуру течения для двух технических жидкостей с различными реологическими свойствами: полиальфаолефина PAO-40 и теплоносителя Tufosor LS при температуре 40 °С. Результаты демонстрируют, что увеличение коэффициента трения приводит к значительному снижению скорости течения и формированию сложных пространственных структур. Обнаружено возникновение областей противотечения (реверсивных течений) при определенных значениях параметров. Выявлена различная чувствительность жидкостей к изменению диссипативных характеристик: менее вязкая жидкость проявляет более сильную зависимость скорости от параметра трения. Показано, что качественные изменения структуры течения определяются видом дифференциального оператора системы.

Полученные результаты имеют практическое значение для проектирования систем теплообмена, микрожидкостных устройств и технологического оборудования, где необходимо учитывать дополнительные диссипативные механизмы. Предложенная методика расчета позволяет оптимизировать параметры таких систем с учетом объемных сил сопротивления.

Ключевые слова: трение Рэлея, численное моделирование, противотечения, метод конечных разностей, вязкая жидкость, плоский канал, течение Пуазейля – Куэтта.

Введение

В современных производственных системах точное управление процессами течения рабочих сред является критически важным для обеспечения эффективности теплообмена, дозирования, смазки и других технологических операций [1, 2].

Особую сложность представляют случаи, когда жидкость движется через пористые фильтрующие элементы, содержит дисперсные наполнители или взаимодействует с сеткой микроканалов. В таких условиях, помимо классического вязкостного трения,

возникают распределенные силы сопротивления, пропорциональные скорости течения [3].

Для адекватного описания этих эффектов в уравнения гидродинамики вводится дополнительный диссипативный член – линейное трение Рэлея, который позволяет моделировать объемное сопротивление [4]. Такой подход особенно востребован при разработке цифровых двойников технологического оборудования, где требуется высокая точность прогнозирования гидродинамических характеристик [5, 6].

Особый практический интерес для производственных приложений представляют гибридные течения, сочетающие характеристики течений Пуазейля и Куэтта [7, 8]. Подобные режимы типичны для зазоров в роторных машинах, системах с подвижными границами и микроканальных теплообменниках [9, 10]. Пространственная структура таких течений может существенно отличаться от классических профилей, что требует разработки специализированных математических моделей и методов их анализа.

Несмотря на значительное количество работ по классическим течениям [4, 7, 11], задача о неоднородном течении Пуазейля – Куэтта с учетом трения Рэлея изучена недостаточно полно. В частности, остаются малоисследованными вопросы возникновения противотечений и критических режимов течения при определенных сочетаниях параметров. Эти явления оказывают существенное влияние на эффективность теплообмена и могут приводить к качественному изменению структуры потока [12, 13].

Современные методы численного моделирования позволяют детально исследовать такие сложные течения и создавать интеллектуальные системы поддержки принятия решений при проектировании производственного оборудования [14–16].

Целью настоящей работы является разработка и применение численного метода исследования стационарного гибридного течения Куэтта – Пуазейля с учетом трения Рэлея для решения задач оптимизации параметров производственных систем. Задачи включают: верификацию численного метода, анализ влияния коэффициента трения на структуру течения, сравнительное изучение поведения технических жидкостей и выявление условий возникновения противотечений.

Постановка задачи

Рассматривается стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости в плоском канале высотой H . Течение описывается модифицированными уравнениями Навье – Стокса с линейным членом трения Рэлея [3, 16]:

$$V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \nabla^2 V_x - \lambda V_x, \quad (1)$$

$$V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \nabla^2 V_y - \lambda V_y, \quad (2)$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

где V_x и V_y – компоненты вектора скорости, P – давление, ρ – плотность жидкости, ν – кинематическая вязкость, $\lambda > 0$ – коэффициент трения Рэлея.

Для упрощения задачи используется анзац, обобщающий классическое течение Куэтта–Пуазейля [7, 9, 12, 16]:

$$V_x(x, y, z) = U(z) + a(z)y, \quad (4)$$

$$V_y(x, y, z) = V(z), V_z \equiv 0,$$

где $U(z)$ – осевая составляющая скорости, $a(z)$ – градиент скорости по координате y , $V(z)$ – поперечная скорость. Давление предполагается линейной функцией горизонтальных координат:

$$P(x, y) = P_0 + P_1x + P_2y, \quad (5)$$

с постоянными градиентами P_1 и P_2 .

Подстановка выражений (4) и (5) в уравнения (1)–(3) приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\nu \frac{d^2 a}{dz^2} - \lambda a = 0, \quad (6)$$

$$\nu \frac{d^2 V}{dz^2} - \lambda V = \frac{P_2}{\rho}, \quad (7)$$

$$\nu \frac{d^2 U}{dz^2} - \lambda U = Va + \frac{P_1}{\rho}. \quad (8)$$

Граничные условия на стенках канала формулируются как:

$$U(0) = U_0, a(0) = a_0, V(0) = V_0, \quad (9)$$

$$U(H) = U_H, a(H) = a_H, V(H) = V_H. \quad (10)$$

Численный метод и реализация

Для решения краевой задачи (6)–(10) использован метод конечных разностей второго порядка точности [9, 14], который является стандартным инструментом в интеллектуальных системах моделирования производственных процессов. Область интегрирования $[0, H]$ дискретизируется равномерной сеткой с шагом $h = H / (N - 1)$, где N – количество узлов. Вторые производные аппроксимируются центральными разностями [15]:

$$f''(z_i) \approx \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{h^2}, \quad (11)$$

где $f_i = f(z_i)$, $z_i = i \cdot h$, $i = 0, 1, \dots, N-1$.

Система уравнений (6)–(8) допускает последовательное решение, не требующее итерационных процедур. На первом этапе решается уравнение (6) для функции $a(z)$, на втором – уравнение (7) для $V(z)$ и на заключительном этапе – уравнение (8) для $U(z)$, причем правая часть уравнения (8) становится полностью известной после вычисления $V(z)$ и $a(z)$.

Для $a(z)$ разностное уравнение имеет вид:

$$\frac{a_{i-1} - 2a_i + a_{i+1}}{h^2} = \frac{\lambda}{\nu} a_i, \quad (12)$$

$$a_{i-1} - \left(2 + \frac{\lambda h^2}{\nu}\right) a_i + a_{i+1} = 0. \quad (13)$$

Аналогичные уравнения записываются для $V(z)$ и $U(z)$. Полученные трехдиагональные системы решаются методом прогонки. Для обеспечения устойчивости при больших значениях λ используются разреженные матрицы. Все вычисления выполнены в среде MATLAB 2023b с применением встроенных функций для работы с разреженными матрицами, что обеспечивает высокую вычислительную эффективность, необходимую для интеграции метода в системы цифрового проектирования.

Верификация численного метода

Для проверки корректности реализации численного метода проведена серия тестов, соответствующих стандартным процедурам валидации моделей в производственных системах. В предельном случае при $\lambda = 0$ система уравнений (6)–(8) допускает аналитическое решение. Для уравнения (6) при нулевом коэффициенте трения решение представляет собой линейную функцию:

$$a(z) = a_0 + \frac{a_H - a_0}{H} z. \quad (14)$$

Сравнение численного решения с аналитическим при $N = 101$ показало максимальную относительную погрешность $2,3 \times 10^{-5}\%$. Для уравнения (7) при $P_2 = 0$ аналитическое решение также линейно:

$$V(z) = V_0 + \frac{V_H - V_0}{H} z. \quad (15)$$

Численное решение воспроизвело этот профиль с погрешностью $1,8 \times 10^{-5}\%$.

Для проверки сходимости метода проведены расчеты с различным числом узлов сетки: $N = 51, 101, 201, 401$. Анализ показал, что относительная погрешность решения уменьшается пропорционально h^2 , что соответствует второму порядку точности метода. При $N = 401$ максимальная погрешность не превышает $10^{-6}\%$ для всех исследуемых значений параметров, что подтверждает пригодность метода для точных инженерных расчетов.

Параметры исследования

Исследование проведено для двух технических жидкостей, широко используемых в производственных системах:

1. Полиальфаолефин РАО-40 – синтетическое масло, применяемое в высокотемпературных гидравлических системах. При температуре $40 \text{ }^\circ\text{C}$: $\rho = 830 \text{ кг/м}^3$, $\nu = 40 \times 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$.

2. Теплоноситель Tyfocor LS – промышленный теплоноситель на основе гликоля, используемый в системах отопления и охлаждения. При $40 \text{ }^\circ\text{C}$: $\rho = 1050 \text{ кг/м}^3$, $\nu = 18 \times 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$.

Геометрические и граничные параметры выбраны в соответствии с типичными производственными условиями: высота канала $H = 0,01 \text{ м}$, градиент давления $P_1 = -100 \text{ Па/м}$, $P_2 = 0 \text{ Па/м}$. Граничные условия: $U_0 = 0 \text{ м/с}$, $U_H = 0,05 \text{ м/с}$, $a_0 = 20 \text{ с}^{-1}$, $a_H = -20 \text{ с}^{-1}$, $V_0 = V_H = 0 \text{ м/с}$.

Коэффициент трения Рэлея варьировался в диапазоне от 0 до 200 с^{-1} . Число Рейнольдса, определяемое как $Re = \bar{U}H/\nu$ (где \bar{U} – средняя скорость), не превышало 40 для всех случаев, что соответствует ламинарному режиму, характерному для многих производственных применений.

Результаты и их обсуждение

На рис. 1 и 2 представлены профили скоростей $U(z)$, $a(z)$ и полной продольной скорости $V_x(y, z) = U(z) + a(z)y$ для двух исследуемых жидкостей при различных значениях коэффициента трения Рэлея.

Анализ для полиальфаолефина РАО-40 показывает монотонное уменьшение осевой скорости с ростом параметра трения. При отсутствии объемного демпфирования ($\lambda = 0$) профиль $U(z)$ соответствует классическому гибриднему течению Пуазейля – Куэтта с параболической составляющей от градиента давления и линейной от движения границ. Введение даже небольшого трения $\lambda = 2 \text{ с}^{-1}$ приводит к заметному из-

менению формы профиля: максимум скорости смещается к центру канала, а значения у стенок уменьшаются.

При $\lambda = 20 \text{ с}^{-1}$ скорость в средней части канала составляет лишь $\sim 13\%$ от значения при нулевом трении ($0,0066/0,0498 \approx 0,13$). Это важно для проектирования систем, где необходимо контролировать скорость течения в различных зонах канала.

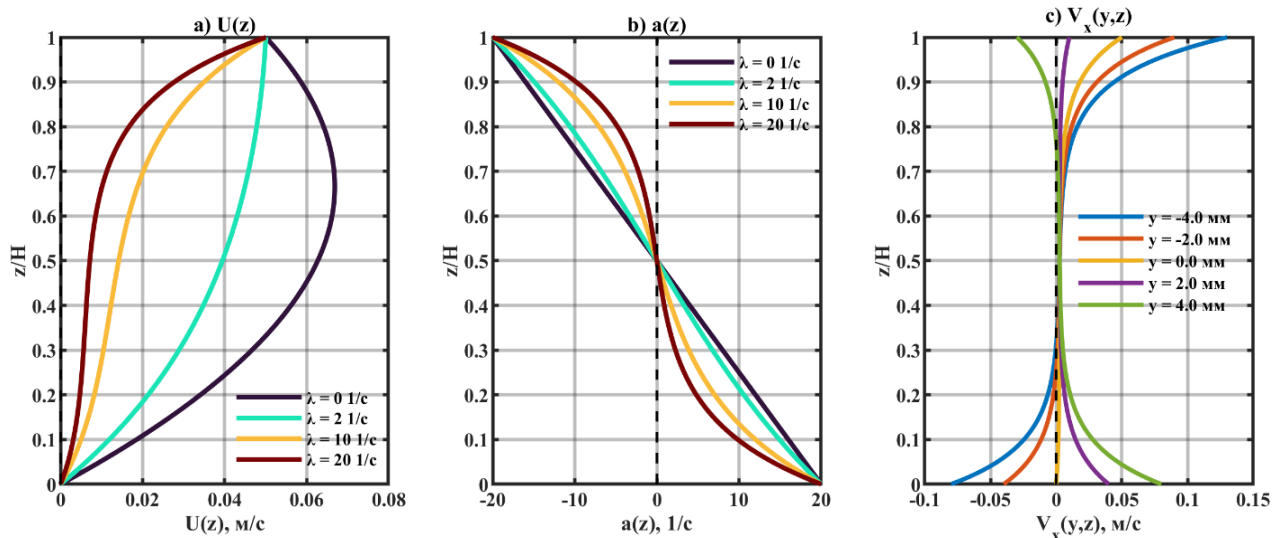


Рис. 1. Профили скоростей $U(z)$, $a(z)$ и $V_x(y, z)$ для полиальфаолефина РАО-40 при различных значениях коэффициента трения Рэлея λ .

Fig. 1. Velocity profiles $U(z)$, $a(z)$, and $V_x(y, z)$ for polyalphaolefin PAO-40 at different values of the Rayleigh friction coefficient λ

Профили градиента скорости $a(z)$ демонстрируют переход от линейной зависимости при $\lambda = 0$ к экспоненциальной при ненулевых значениях параметра трения [12, 13].

Этот переход связан с формированием пограничных слоёв вблизи стенок, где градиенты скорости становятся существенно выше, чем в центральной области. Толщина этих слоев определяется соотношением $\delta \sim \sqrt{\nu/\lambda}$, что подтверждается результатами расчетов и может быть использовано для оптимизации конструкции теплообменных аппаратов.

Полная продольная скорость V_x при фиксированном значении $\lambda = 20 \text{ с}^{-1}$ для различных поперечных координат y показывает возникновение областей с отрицательной

скоростью вблизи нижней стенки при $y < 0$. Эти области соответствуют противотечениям, направленным противоположно основному потоку. Механизм возникновения противотечений связан с линейной зависимостью $V_x = U(z) + a(z)y$.

При отрицательных значениях y и достаточно больших значениях $a(z)$ слагаемое $a(z)y$ становится отрицательным и может преобладать над положительным слагаемым $U(z)$, приводя к реверсированию потока. Ширина зоны противотечения увеличивается с ростом $|y|$, достигая максимального значения при $y = -4 \text{ мм}$.

Выявление таких зон критически важно для предотвращения снижения эффективности теплообмена в производственном оборудовании.

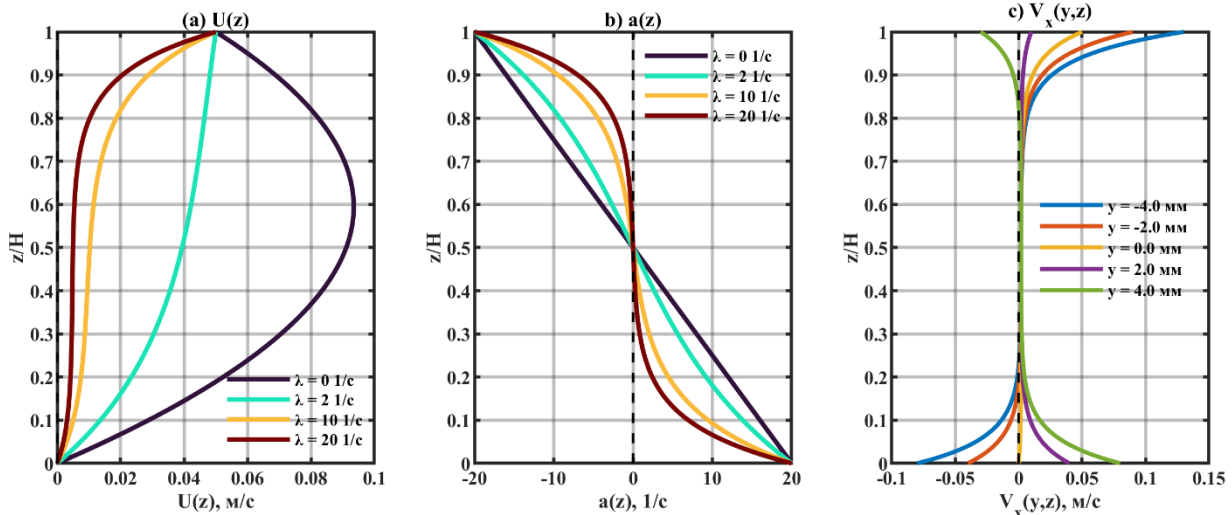


Рис. 2. Профили скоростей $U(z)$, $a(z)$ и $V_x(y, z)$ для теплоносителя Tyfocor LS при различных значениях коэффициента трения Рэлея λ

Fig. 2. Velocity profiles $U(z)$, $a(z)$, and $V_x(y, z)$ for coolant Tyfocor LS at different values of the Rayleigh friction coefficient λ

Для теплоносителя Tyfocor LS наблюдаются качественно аналогичные закономерности, но с количественными отличиями [5]. Из-за меньшей вязкости абсолютные значения скоростей выше, а влияние трения Рэлея проявляется более выражено. При $\lambda = 20 \text{ с}^{-1}$ скорость в центре канала для теплоносителя уменьшается до $\sim 7\%$ от значения при $\lambda = 0$ ($0,0049/0,0687 \approx 0,07$), тогда как для полиальфаолефина аналогичное снижение составляет $\sim 13\%$.

Это различие объясняется тем, что для менее вязкой жидкости относительный вклад объёмного трения в общее сопротивление движению становится более значимым.

Количественный анализ подтверждает различную чувствительность жидкостей: при $\lambda = 50 \text{ с}^{-1}$ средняя скорость теплоносителя Tyfocor LS падает до $\sim 3\%$ от исходного значения, в то время как для полиальфаолефина PAO-40 аналогичное снижение составляет $\sim 6\%$. Данный результат важен для выбора рабочей жидкости в конкретных производственных условиях.

На рис. 3 представлены карты распределения полной продольной скорости $V_x(y, z)$ в поперечном сечении канала для обеих

жидкостей при $\lambda = 20 \text{ с}^{-1}$. Для полиальфаолефина распределение демонстрирует симметрию относительно вертикальной оси. Область отрицательных скоростей занимает примерно 30% площади поперечного сечения и локализована в нижней части канала.

У теплоносителя Tyfocor LS структура течения имеет более сложный характер: площадь области противотечения увеличивается до 40%, а нулевая изолиния приобретает криволинейную форму.

Эти особенности связаны с меньшей вязкостью жидкости и могут приводить к образованию застойных зон в производственных аппаратах [14].

На рис. 4 показаны векторные поля скорости для обеих жидкостей при $\lambda = 20 \text{ с}^{-1}$. Для полиальфаолефина наблюдается четкое разделение течения на две зоны с различными направлениями.

Векторное поле теплоносителя демонстрирует более сложную структуру с вихреподобными образованиями, что свидетельствует о развитии вторичных течений. Такие структуры могут существенно влиять на процессы смешения и теплопереноса в технологическом оборудовании.

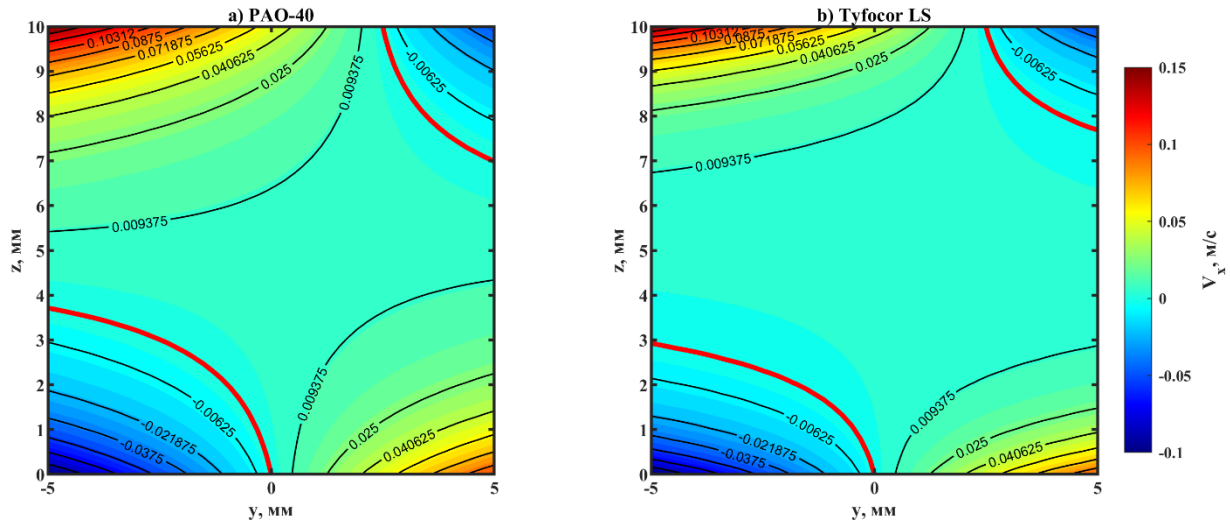


Рис. 3. Карты изолиний продольной скорости $V_x(y, z)$ в поперечном сечении канала при $\lambda = 20 \text{ c}^{-1}$: а) полиальфаолефин PAO-40; б) теплоноситель Tyfocor LS

Fig. 3. Contour maps of the longitudinal velocity $V_x(y, z)$ in the channel cross-section at $\lambda = 20 \text{ s}^{-1}$: а) polyalphaolefin PAO-40; б) coolant Tyfocor LS

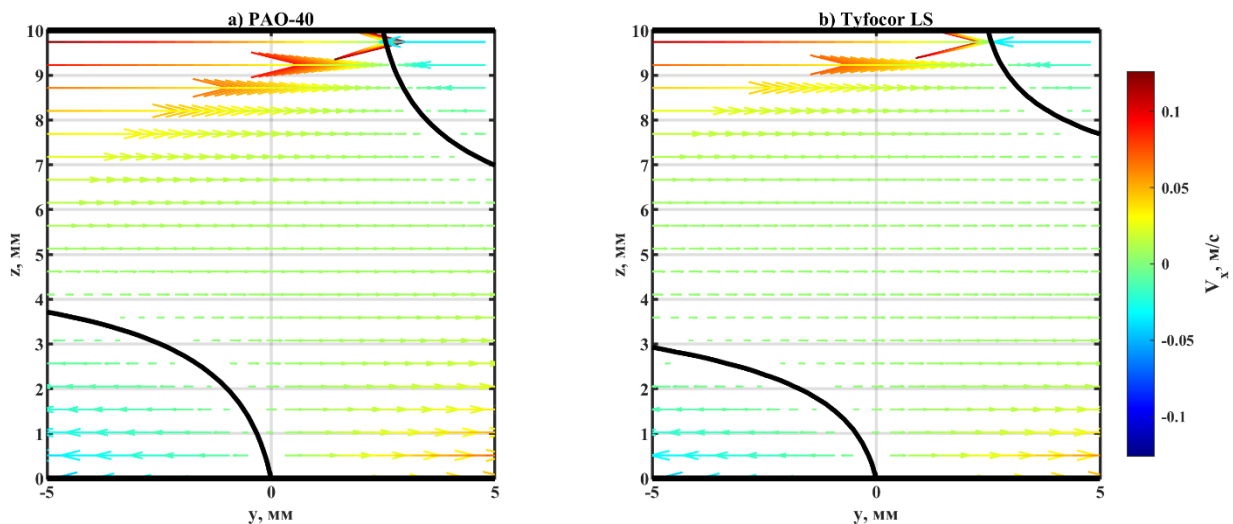


Рис. 4. Векторные поля скорости в поперечном сечении канала при $\lambda = 20 \text{ c}^{-1}$: а) полиальфаолефин PAO-40; б) теплоноситель Tyfocor LS

Fig. 4. Velocity vector fields in the channel cross-section at $\lambda = 20 \text{ s}^{-1}$: а) polyalphaolefin PAO-40; б) coolant Tyfocor LS

На рис. 5 и 6 представлены трехмерные распределения скорости для различных значений коэффициента трения Рэлея. Для полиальфаолефина с ростом λ поверхность скорости становится более плоской, теряя параболическую форму классического течения.

При $\lambda = 10 \text{ c}^{-1}$ формируется локальный максимум в правой верхней части канала, однако седловая точка не наблюдается – это

следствие выбранного анзаца и граничных условий. Трёхмерные распределения для теплоносителя имеют более сложный рельеф. При $\lambda = 10 \text{ c}^{-1}$ наблюдается более выраженная пространственная неоднородность распределения скорости по сравнению с полиальфаолефином. Визуализация таких распределений полезна для анализа пространственной структуры течений в сложных производственных системах.

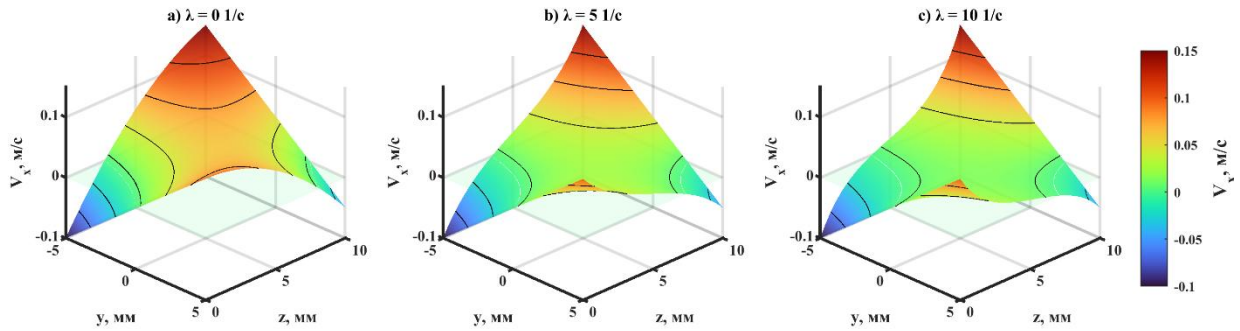


Рис. 5. Трехмерные распределения продольной скорости $V_x(y, z)$ для полиальфаолефина PAO-40: а) $\lambda = 0 \text{ c}^{-1}$; б) $\lambda = 5 \text{ c}^{-1}$; в) $\lambda = 10 \text{ c}^{-1}$

Fig. 5. Three-dimensional distributions of the longitudinal velocity $V_x(y, z)$ for polyalphaolefin PAO-40: а) $\lambda = 0 \text{ s}^{-1}$; б) $\lambda = 5 \text{ s}^{-1}$; в) $\lambda = 10 \text{ s}^{-1}$

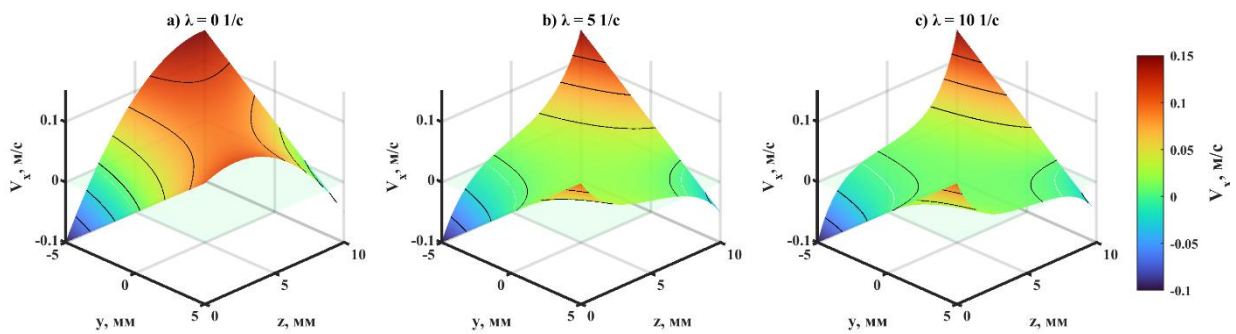


Рис. 6. Трехмерные распределения продольной скорости $V_x(y, z)$ для теплоносителя Tyfocor LS: а) $\lambda = 0 \text{ c}^{-1}$; б) $\lambda = 5 \text{ c}^{-1}$; в) $\lambda = 10 \text{ c}^{-1}$

Fig. 6. Three-dimensional distributions of the longitudinal velocity $V_x(y, z)$ for coolant Tyfocor LS: а) $\lambda = 0 \text{ s}^{-1}$; б) $\lambda = 5 \text{ s}^{-1}$; в) $\lambda = 10 \text{ s}^{-1}$

Проведенные численные расчеты позволили выявить ряд важных закономерностей, согласующихся с современными исследованиями [16]. Установлено, что увеличение коэффициента трения приводит к существенному снижению скорости во всем сечении канала. Эта зависимость носит нелинейный характер: при малых значениях параметра трения ($\lambda < 10 \text{ c}^{-1}$) скорость уменьшается медленно, тогда как при $\lambda > 50 \text{ c}^{-1}$ наблюдается резкое падение. Такое поведение объясняется конкуренцией между различными механизмами диссипации: при малых λ преобладает классическое ламинарное трение, описываемое вязкостными напряжениями, а при больших значениях доминирующим становится объемное трение Рэлея.

Формирование пограничных слоев у стенок канала является характерной особенностью течения при ненулевых значениях ко-

эффициента демпфирования. Толщина этих слоев уменьшается с ростом параметра трения и увеличением вязкости. Для полиальфаолефина при $\lambda = 20 \text{ c}^{-1}$ толщина пограничного слоя составляет примерно 1,5 мм, тогда как для теплоносителя при том же значении параметра – около 1,2 мм.

Менее вязкая жидкость (теплоноситель Tyfocor LS) проявляет большую чувствительность к изменению коэффициента трения Рэлея. Это выражается в более сильном снижении скорости при одинаковых значениях параметра демпфирования, расширении зон противотечения и развитии более сложных пространственных структур. Объясняется это тем, что для жидкости с меньшей вязкостью относительный вклад объемного трения в общее сопротивление движению становится более значимым.

Наблюдаемые качественные изменения структуры течения – формирование погра-

нических слоев, нелинейный характер зависимости скорости от параметра трения, возникновение противотечений – определяют математическими свойствами дифференциального оператора $v \frac{d^2}{dz^2} - \lambda$, входящего в

уравнения (6), (7). Собственные значения и собственные функции этого оператора задают характерные пространственные масштабы задачи, такие как толщина формирующихся пограничных слоев, что качественно согласуется с результатами численного моделирования.

Выводы

Разработан численный метод решения задачи о неоднородном течении Пуазейля – Куэтта с учетом линейного трения Рэлея в плоском канале. Метод основан на применении специального анзаца, сводящего уравнения Навье – Стокса к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, и их дискретизации методом конечных разностей второго порядка точности. Система уравнений решается последовательно без итерационных процедур, что обеспечивает высокую вычислительную эффективность. Реализация метода позволяет интегрировать его в системы цифрового проектирования производственного оборудования.

Проведена верификация численного метода путем сравнения с аналитическими решениями для предельных случаев и анализа сходимости при увеличении числа узлов сетки. Максимальная относительная погрешность решения не превышает $10^{-5}\%$ при использовании сетки с 401 узлом, что подтверждает корректность разработанного алгоритма и его пригодность для инженерных расчетов.

Исследовано влияние коэффициента трения Рэлея на структуру течения для двух технических жидкостей с различными реологическими свойствами. Установлено, что увеличение параметра демпфирования приводит к существенному снижению скорости, формированию пограничных слоев у стенок канала и возникновению областей противотечения. Механизм возникновения противотечений объяснен линейной зависимостью $V_x = U(z) + a(z)y$ при отрица-

тельных значениях y . Эти результаты важны для оптимизации режимов работы теплообменных аппаратов и систем транспортировки жидкостей.

Выявлены различия в поведении жидкостей с различной вязкостью. Менее вязкая жидкость проявляет большую чувствительность к изменению коэффициента трения: при одинаковых условиях в ней наблюдаются более низкие скорости, расширенные зоны противотечения и более сложная пространственная структура потока. Количественный анализ показал, что при $\lambda = 50 \text{ с}^{-1}$ средняя скорость теплоносителя Tyfocor LS падает до $\sim 7\%$ от исходного значения, в то время как для полиальфаолефина PAO-40 аналогичное снижение составляет $\sim 13\%$. Данные особенности необходимо учитывать при выборе рабочих сред для конкретных технологических процессов.

Установлена связь между видом дифференциального оператора системы и наблюдаемыми качественными особенностями течения (толщина пограничного слоя, нелинейность зависимостей), что дает основу для прогнозирования поведения потока при варьировании физических параметров.

Полученные результаты имеют практическое значение для проектирования систем теплообмена, микрожидкостных устройств и технологического оборудования, где необходимо учитывать дополнительные диссипативные механизмы. Предложенная модель и методика расчета могут быть использованы для оптимизации параметров таких систем с учетом объемных сил сопротивления, что способствует повышению эффективности производственных процессов.

Перспективными направлениями дальнейших исследований являются: изучение нестационарных режимов течения, учет нелинейных членов трения, анализ теплопереноса в условиях противотечений, а также экспериментальная верификация полученных численных результатов. Особый интерес представляет интеграция разработанной модели в системы искусственного интеллекта для автоматизированного проектирования и оптимизации производственного оборудования.

Библиографические ссылки

1. Галкин В. А., Смородинов А. Д., Моргунов Д. А. Решение уравнения Навье – Стокса для сталкивающихся потоков // Успехи кибернетики. 2023. Т. 4, № 2. С. 8–15. DOI: 10.51790/2712-9942-2023-4-2-01.

2. Ekman V.W. On the Influence of the Earth's Rotation on Ocean-Currents. *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik*, 1905, vol. 2, no. 11, pp. 1-53.

3. Губарева К. В., Просвиряков Е. Ю., Еремин А. В. Точное квадратичное полиномиальное решение для описания неоднородного течения Куэтта – Пуазейля в бесконечном горизонтальном слое с проницаемыми границами // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика. Механика. Физика. 2026. Т. 18, № 1. С. 47–62. DOI: 10.14529/mmph260106.

4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Физматлит, 2001. 731 с.

5. Burmasheva N., Prosviryakov E. Exact Solutions to the Oberbeck-Boussinesq Equations for Shear Flows of a Viscous Binary Fluid with Allowance Made for the Soret Effect. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series: Mathematics*, 2021, vol. 37, pp. 17-30. DOI 10.26516/1997-7670.2021.37.17.

6. Ferro C., Cafaro M., Maggiore P. Optimizing Solid Rocket Missile Trajectories: A Hybrid Approach Using an Evolutionary Algorithm and Machine Learning. *Aerospace*, 2024, vol. 11, p. 912. DOI 10.3390/aerospace11100912.

7. Аристов С. Н., Фрик П. Г. Крупномасштабная турбулентность в конвекции Рэлея – Бенара // Известия Академии наук СССР. Механика жидкости и газа. 1989. № 5. С. 43–48.

8. Бурмашева Н. В., Просвиряков Е. Ю. Крупномасштабная слоистая стационарная конвекция вязкой несжимаемой жидкости под действием касательных напряжений на верхней границе. Исследование полей температуры и давления // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2017. Т. 21, № 4. С. 736–751. DOI: 10.14498/vsgtu1568.

9. Полянин А. Д., Аристов С. Н. Системы уравнений гидродинамического типа: точные решения, преобразования, нелинейная устойчивость // Доклады Академии наук. 2009. Т. 428, № 2. С. 180–185.

10. Pedlosky J. *Geophysical Fluid Dynamics*. 2nd ed. New York, Springer, 1987, 710 p.

11. Полянин А. Д., Зайцев В. Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2002. 432 с.

12. Batchelor G.K. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge, Cambridge University Press, 2000, 615 p.

13. Boyd J.P. *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*. 2nd ed. New York, Dover Publications, 2001, 688 p.

14. Drazin P.G., Riley N. *The Navier–Stokes Equations: A Classification of Flows and Exact Solutions*. Cambridge, Cambridge University Press, 2006, 226 p.

15. Rayleigh L. On the Dynamics of Revolving Fluids. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, 1916, vol. 93, no. 648, pp. 148-154.

16. Burmasheva N., Ershkov S., Prosviryakov E., Leshchenko D. Exact Solutions of Navier–Stokes Equations for Quasi-Two-Dimensional Flows with Rayleigh Friction. *Fluids*, 2023, vol. 8, p. 123. DOI 10.3390/fluids8040123

Reference

1. Galkin V. A., Smorodinov A. D., Morgun D. A. [Solving the Navier–Stokes Equation for Colliding Flows]. *Uspekhi kibernetiki*. 2023, vol. 4, no. 2, pp. 8-15 (in Russ.). DOI 10.51790/2712-9942-2023-4-2-01

2. Ekman V.W. On the Influence of the Earth's Rotation on Ocean-Currents. *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik*, 1905, vol. 2, no. 11, pp. 1-53.

3. Gubareva K. V., Prosviryakov E. Yu., Eremin A. V. [Exact Quadratic Polynomial Solution for the Description of Inhomogeneous Couette–Poiseuille Flow in an Infinite Horizontal Layer with Permeable Boundaries]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika. Mekhanika. Fizika*. 2026, vol. 18, no. 1, pp. 47-62 (in Russ.). DOI 10.14529/mmph260106

4. Landau L.D., Lifshitz E.M. *Gidrodinamika [Fluid Dynamics]*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2001, 731 p. (in Russ.).

5. Burmasheva N., Prosviryakov E. Exact Solutions to the Oberbeck-Boussinesq Equations for Shear Flows of a Viscous Binary Fluid with Allowance Made for the Soret Effect. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series: Mathematics*, 2021, vol. 37, pp. 17-30. DOI 10.26516/1997-7670.2021.37.17.

6. Ferro C., Cafaro M., Maggiore P. Optimizing Solid Rocket Missile Trajectories: A Hybrid Approach Using an Evolutionary Algorithm and Machine Learning. *Aerospace*, 2024, vol. 11, p. 912. DOI 10.3390/aerospace11100912.

7. Aristov S.N., Frik P.G. [Large-Scale Turbulence in Rayleigh–Bénard Convection]. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Mekhanika zhidkosti i gaza*, 1989, no. 5, pp. 43-48. (in Russ.).

8. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. [Large-Scale Layered Stationary Convection of a Viscous Incompressible Fluid under the Action of Shear Stresses on the Upper Boundary. Investigation of Temperature and Pressure Fields]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki*, 2017, vol. 21, no. 4, pp. 736-751 (in Russ.). DOI 10.14498/vsgtu1568
9. Polyanin A.D., Aristov S.N. [Systems of Hydrodynamic Type Equations: Exact Solutions, Transformations, Nonlinear Stability]. *Doklady Akademii nauk*, 2009, vol. 428, no. 2, pp. 180-185. (in Russ.).
10. Pedlosky J. *Geophysical Fluid Dynamics*. 2nd ed. New York, Springer, 1987, 710 p.
11. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. *Spravochnik po nelineinym uravneniyam matematicheskoi fiziki* [Handbook of Nonlinear Mathematical Physics Equations]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2002, 432 p. (in Russ.).
12. Batchelor G.K. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge, Cambridge University Press, 2000, 615 p.
13. Boyd J.P. *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*. 2nd ed. New York, Dover Publications, 2001, 688 p.
14. Drazin P.G., Riley N. *The Navier–Stokes Equations: A Classification of Flows and Exact Solutions*. Cambridge, Cambridge University Press, 2006, 226 p.
15. Rayleigh L. On the Dynamics of Revolving Fluids. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, 1916, vol. 93, no. 648, pp. 148-154.
16. Burmasheva N., Ershkov S., Prosviryakov E., Leshchenko D. Exact Solutions of Navier–Stokes Equations for Quasi-Two-Dimensional Flows with Rayleigh Friction. *Fluids*, 2023, vol. 8, p. 123. DOI 10.3390/fluids8040123.

* * *

Numerical Simulation of Inhomogeneous Couette–Poiseuille Flow with Rayleigh Friction

K. V. Gubareva, Candidate of Engineering Sciences, Associate Professor, Samara State Technical University, Samara, Russia

E. Yu. Prosviryakov, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor, Professor, Ural Federal University; Head of Sector, Chief Researcher, Institute of Engineering Science UB RAS, Ekaterinburg, Russia

The results of numerical modeling of steady viscous incompressible fluid flow in a flat channel, taking into account linear Rayleigh friction, are presented. The study focuses on a generalized model of hybrid Couette–Poiseuille flow, in which the longitudinal velocity linearly depends on the transverse coordinate, while the coefficients of this expansion vary along the channel height. The mathematical model is based on modified Navier–Stokes equations with an additional dissipative term proportional to velocity, which allows accounting for distributed drag forces arising during flow through porous media or in the presence of dispersed phases.

A second-order finite difference method implemented in the MATLAB 2023b environment was used to solve the boundary value problem. Verification of the numerical method was carried out by comparing the results with analytical solutions for limiting cases. The influence of the Rayleigh friction coefficient on the flow structure was investigated for two technical fluids with different rheological properties: polyalphaolefin PAO-40 and Tyfocor LS heat transfer fluid at 40°C.

The results demonstrate that an increase in the friction coefficient leads to a significant reduction in flow velocity and the formation of complex spatial structures. The emergence of reverse flow zones (counterflows) at certain parameter values was discovered. Different sensitivities of the fluids to changes in dissipative characteristics were revealed: the less viscous fluid exhibits a stronger dependence of velocity on the friction parameter. It is shown that qualitative changes in the flow structure are determined by the type of differential operator of the system.

The obtained results have practical significance for the design of heat exchange systems, microfluidic devices, and technological equipment where additional dissipative mechanisms must be taken into account. The proposed calculation methodology allows optimizing the parameters of such systems considering volumetric drag forces.

Keywords: Rayleigh friction, numerical modeling, reverse flows, finite difference method, viscous fluid, plane channel, Couette–Poiseuille flow.

Получено: 09.02.26

Образец цитирования

Губарева К. В., Просвиряков Е. Ю. Численное моделирование неоднородного течения Куэтта – Пуазейля с учетом трения Рэлея // Интеллектуальные системы в производстве. 2026. Т. 24, № 1. С. 78–88. DOI: 10.22213/2410-9304-2026-1-78-88.

For Citation

Sannikov P.A., Lekomtsev P.V. [Interpretable machine learning-based diagnosis of mechanical faults in induction motors using current features]. *Intellektual'nye sistemy v proizvodstve*. 2026, vol. 24, no. 1, pp. 78-88 (in Russ.). DOI: 10.22213/2410-9304-2026-1-78-88.