

УДК 531.383

DOI: 10.22213/2410-9304-2026-3-54-58

Зависимость предельных скоростных режимов работы твердотельного волнового гироскопа, не ухудшающих точность измерений, от параметров его резонатора

С. В. Клишин, кандидат физико-математических наук, доцент, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова, Ижевск, Россия

О. Я. Шамсиахметов, старший преподаватель, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова, Ижевск, Россия

В статье проведен анализ уравнения движения кольцевого резонатора волнового твердотельного гироскопа (ВТГ). Рассмотрены изгибные колебания, при которых кольцевой резонатор попеременно принимает форму то окружности, то эллипса. Для анализа взят эллипс, соответствующий амплитудным значениям радиальных перемещений частиц кольца. Уравнение эллипса записано в такой системе координат, в которой координатные оси проходят через пучности стоячей волны, возбужденной в кольцевом резонаторе. Переход в уравнении эллипса от прямоугольных координат к полярным координатам позволяет вычислить производные радиального перемещения частиц резонатора по углу.

При дифференцировании по времени считается, что радиальные перемещения частиц кольцевого резонатора происходят по закону косинуса, т. е. совершают гармонические колебания. В результате были вычислены производные по времени радиальных перемещений частиц резонатора и их производных по углу.

По выражениям для производных радиальных перемещений частиц кольцевого резонатора по углу, времени, смешанных производных по углу и времени были найдены оценки максимальных значений этих величин. Найденные оценки позволили оценить максимальные значения слагаемых, входящих в уравнение движения кольцевого резонатора ВТГ. Все оценки получены в виде выражений, содержащих амплитуду колебаний кольцевого резонатора в пучностях стоячей волны, круговую частоту колебаний и радиус кольцевого резонатора.

Из условия значительной малости слагаемых, содержащих квадрат угловой скорости и угловое ускорение, по сравнению с другими слагаемыми, входящими в уравнение движения кольцевого резонатора ВТГ, были получены условия для угловой скорости и углового ускорения. При выполнении полученных условий уравнение движения кольцевого резонатора, из которого исключены слагаемые, содержащие квадрат угловой скорости и угловое ускорение, может считаться адекватной моделью ВТГ. В противном случае необходимо использовать другую математическую модель.

Ключевые слова: волновой твердотельный гироскоп, резонатор, стоячая волна, угловая скорость, угловое ускорение.

Введение

Точность волнового твердотельного гироскопа (ВТГ) определяется структурой и свойствами материала, из которого изготовлен резонатор, равномерностью распределения плотности и точностью балансировки резонатора, механическими свойствами покрытия, дефектами систем возбуждения резонатора, погрешностями выставки электродов сема, нелинейностью колебаний и рядом других причин [1–4].

Для повышения точности ВТГ разработаны способы улучшения балансировки резонаторов, методы компенсации уходов, вызванных анизотропией упругих свойств монокристаллических резонаторов, расщеплением собственных частот, влиянием нелинейных свойств электростатических датчиков управления, и различные алгоритмические методы [5–10]. Повышению точности ВТГ способствует разработка новых моделей [11, 12].

Измерение угла θ поворота ВТГ в инерциальной системе отсчета базируется на математической модели резонатора, согласно которой угол θ прямо пропорционален углу φ поворота стоячей волны в системе отсчета, связанной с резонатором. Причем эти повороты противоположно направлены. Математическая модель представляет собой уравнения, выведенные методом сил или методом Лагранжа, из которых исключены слагаемые, содержащие квадрат угловой скорости Ω^2 и угловое ускорение $\dot{\Omega}$ [13, 14]. Другими словами, предполагается, что при проведении измерений ВТГ вращается достаточно медленно и почти равномерно. Это предположение может оказаться неверным для высокоскоростных интенсивно маневрирующих летающих объектов.

Целью настоящей работы является поиск условий, при которых в уравнении движения кольцевого (цилиндрического) резонатора можно пренебречь слагаемыми, содер-

жащими квадрат угловой скорости Ω^2 и угловое ускорение $\dot{\Omega}$. Для достижения этой цели необходимо найти наибольшие значения слагаемых, входящих в уравнение, и провести сравнение этих значений.

Оценки слагаемых в уравнении движения кольцевого резонатора

Уравнения движения нерастяжимого кольца, вращающегося в своей плоскости, полученные методом Лагранжа [13, 14], имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{v} - 2\Omega\dot{w} + \dot{\Omega}(R_0 - w) - \Omega^2 v + \lambda' &= 0, \\ \ddot{w} + 2\Omega\dot{v} + \dot{\Omega}v + \Omega^2(R_0 - w) + \\ + \kappa^2(w^{IV} + 2w'' + w) + \lambda &= 0, \\ v' - w &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь w и v – радиальные и касательные перемещения частиц кольца соответственно; R_0 – радиус недеформированного кольца; Ω – угловая скорость вращения кольца, точка означает производную по времени t ; штрих – производную по углу φ , $\kappa^2 = EI/(\rho SR_0^4)$; E и ρ – модуль Юнга и плотность материала кольца соответственно; I и S – момент инерции и площадь поперечного сечения кольца соответственно.

Если продифференцировать второе уравнение системы (1) по углу φ и вычесть из него первое уравнение, то получится уравнение

$$\dot{w}' - \ddot{v} + 2\Omega(\dot{v}' + \dot{w}) + \dot{\Omega}(v' + w - R_0) + \Omega^2(v - w') + \kappa^2(w^V + 2w''' + w') = 0. \quad (2)$$

Дифференцирование уравнения (2) по углу φ приводит к уравнению

$$\ddot{w}'' - \ddot{v}' + 2\Omega(\ddot{v}'' + \ddot{w}') + \dot{\Omega}(v'' + w') + \Omega^2(v' - w'') + \kappa^2(w^V + 2w''' + w') = 0. \quad (3)$$

Третье уравнение системы (1) (уравнение связи) позволяет исключить из уравнения (3) переменную v :

$$\ddot{w}'' - \ddot{w} + 4\Omega\dot{w}' + 2\dot{\Omega}w' + \Omega^2(w - w'') + \kappa^2(w^{VI} + 2w^{IV} + w'') = 0. \quad (4)$$

Аналитическое решение уравнения (4) затруднительно, поэтому из него удаляют слагаемые, содержащие квадрат угловой скорости Ω^2 и угловое ускорение $\dot{\Omega}$, как малые величины [13, 14]. Необходимо выяснить, какими должны быть значения угловой скорости и углового ускорения в сравнении с величинами, зависящими от амплитуды колебаний в пучностях стоячей волны, радиуса кольцевого резонатора и частоты его колебаний, чтобы слагаемые, содержащие Ω^2 и $\dot{\Omega}$, были малы по сравнению с другими слагаемыми уравнения (4).

Наибольшее значение модуля радиального перемещения частиц кольца наблюдается в пучностях стоячей волны и составляет $|w|_{\max} = A$, где A – амплитуда колебаний, в ходе которых кольцо принимает форму то окружности, то эллипса (рис. 1). Уравнение эллипса, записанное для момента времени, когда радиальные перемещения достигли амплитудных значений, имеет вид

$$\frac{x^2}{(R_0 + A)^2} + \frac{y^2}{(R_0 - A)^2} = 1.$$

Из рис. 2 видно, что $x = R\cos\varphi$, $y = R\sin\varphi$, что позволяет записать уравнение эллипса в полярных координатах:

$$R^2 \left(\frac{\cos^2\varphi}{(R_0 + A)^2} + \frac{\sin^2\varphi}{(R_0 - A)^2} \right) = 1. \quad (5)$$

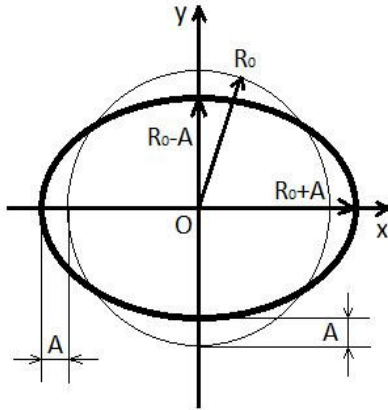


Рис. 1

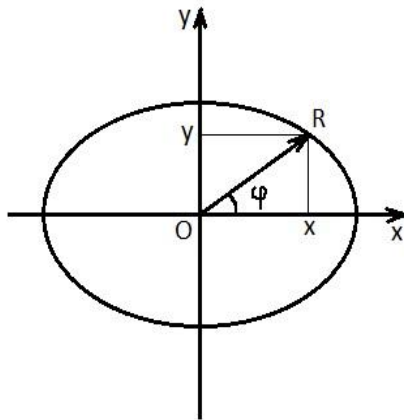


Рис. 2

Дифференцирование левой и правой частей уравнения (5) приводит к уравнению

$$2RR' + \left(\frac{\cos^2\varphi}{(R_0 + A)^2} + \frac{\sin^2\varphi}{(R_0 - A)^2} \right) + R^2 \left(\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{(R_0 - A)^2} - \frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{(R_0 + A)^2} \right) = 0. \quad (6)$$

Из уравнения (5) следует

$$\frac{\cos^2\varphi}{(R_0 + A)^2} + \frac{\sin^2\varphi}{(R_0 - A)^2} = \frac{1}{R^2}.$$

Поэтому уравнение (6) можно преобразовать к виду

$$\frac{2R'}{R} = R^2 \sin 2\varphi \left(\frac{1}{(R_0 + A)^2} - \frac{1}{(R_0 - A)^2} \right).$$

Из последнего уравнения путем преобразований можно получить

$$R' = -\frac{2R_0A}{(R_0^2 - A^2)^2} R^3 \sin 2\varphi.$$

Поскольку $R = R_0 + w$, то $R' = w'$.

Поэтому

$$w' = -\frac{2R_0A}{(R_0^2 - A^2)^2} R^3 \sin 2\varphi. \quad (7)$$

Из условия $|w| \leq A \ll R_0$ вытекают приближенные равенства

$$(R_0^2 - A^2)^2 \approx R_0^4, \quad R^3 = (R_0 + w)^3 \approx R_0^3, \quad w' \approx -2A \sin 2\varphi.$$

Когда угол φ принимает значения $\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4$, выполняется равенство $|\sin 2\varphi| = 1$. При этом

$$|w'|_{\max} = 2A. \quad (8)$$

Продифференцировав соотношение (7) по углу φ , получим

$$w'' = \frac{4R_0AR^3}{(R_0^2 - A^2)^2} \left(\frac{3R_0AR^2}{(R_0^2 - A^2)^2} \sin^2 2\varphi - \cos 2\varphi \right). \quad (9)$$

Условие $|w| \leq A \ll R_0$ приводит к приближенным равенствам

$$R = R_0 + w \approx R_0, \quad (R_0^2 - A^2)^2 \approx R_0^4, \quad w'' \approx -4A \cos 2\varphi.$$

Величина $|\cos 2\varphi|$ максимальна и равна единице при $\varphi = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$. Следовательно,

$$|w''|_{\max} = 4A. \quad (10)$$

Разность $w - w'' \approx w + 4A \cos 2\varphi$ при $\varphi = 0, \pi$ равна $w - w'' = A - 4A = -3A$, а при $\varphi = \pi/2, 3\pi/2$ равна $w - w'' = -A + 4A = 3A$. Поэтому максимальный модуль этой разности составляет

$$|w - w''|_{\max} = 3A. \quad (11)$$

Производная по времени $\dot{w}$ максимальна в пучностях и равна нулю в узлах стоячей волны. В пучностях колебания частиц резонатора происходят по закону $w = A \cos \omega_0 t$. Радиальные скорость и ускорение равны

$$\dot{w} = -A\omega_0 \sin \omega_0 t, \quad \ddot{w} = -A\omega_0^2 \cos \omega_0 t. \quad (12)$$

Оценка сверху для модуля радиального ускорения составляет

$$|\ddot{w}|_{\max} = A\omega_0^2. \quad (13)$$

Из соотношения (7) получается

$$\dot{w}' = -\frac{6R_0A}{(R_0^2 - A^2)^2} R^2 \dot{R} \sin 2\varphi.$$

Поскольку $R = R_0 + w$, то $\dot{R} = \dot{w} = -A\omega_0 \sin \omega_0 t$.

Поэтому

$$\begin{aligned} \dot{w}' &= \frac{6R_0A^2R^2\omega_0}{(R_0^2 - A^2)^2} \sin \omega_0 t \sin 2\varphi, \\ \dot{w}' &\approx \frac{6R_0A^2R_0^2\omega_0}{R_0^4} \sin \omega_0 t \sin 2\varphi = \frac{6A^2\omega_0}{R_0} \sin \omega_0 t \sin 2\varphi, \\ |\dot{w}'|_{\max} &= \frac{6A^2\omega_0}{R_0}. \end{aligned} \quad (14)$$

Из соотношения (9) получается

$$w'' = \frac{60R_0^2A^2R^4\dot{R}}{(R_0^2 - A^2)^4} \sin^2 2\varphi - \frac{12R_0AR^2\dot{R}}{(R_0^2 - A^2)^2} \cos 2\varphi,$$

$$\ddot{w}'' = \frac{60R_0^2 A^2 (4R^3 \dot{R}^2 + R^4 \ddot{R})}{(R_0^2 - A^2)^4} \sin^2 2\varphi - \frac{12R_0 A (2R\dot{R}^2 + R^2 \ddot{R})}{(R_0^2 - A^2)^2} \cos 2\varphi.$$

Поскольку $R = R_0 + w$, то $\dot{R} = \dot{w}$, $\ddot{R} = \ddot{w}$,

$$\ddot{w}'' = \frac{60R_0^2 A^2 R^3 (4\dot{w}^2 + R\ddot{w})}{(R_0^2 - A^2)^4} \sin^2 2\varphi - \frac{12R_0 A R (2\dot{w}^2 + R\ddot{w})}{(R_0^2 - A^2)^2} \cos 2\varphi.$$

Из условия $|w| \leq A \ll R_0$ вытекают приближенные равенства

$$\begin{aligned} (R_0^2 - A^2)^n &\approx R_0^{2n}, \quad R^k = (R_0 + w)^k \approx R_0^k, \\ \ddot{w}'' &\approx \frac{12A}{R_0^2} \left[\frac{5A}{R_0} (4\dot{w}^2 + R_0 \ddot{w}) \sin^2 2\varphi - (2\dot{w}^2 + R_0 \ddot{w}) \cos 2\varphi \right] \approx \\ &\approx -\frac{12A}{R_0^2} (2\dot{w}^2 + R_0 \ddot{w}) \cos 2\varphi = \\ &= \frac{12A^2 \omega_0^2}{R_0} \left(\cos \omega_0 t - \frac{2A}{R_0} \sin^2 \omega_0 t \right) \cos 2\varphi \approx \\ &\approx \frac{12A^2 \omega_0^2}{R_0} \cos \omega_0 t \cos 2\varphi. \end{aligned}$$

Что, в свою очередь, приводит к оценке

$$|\ddot{w}''|_{\max} = \frac{12A^2 \omega_0^2}{R_0}. \quad (15)$$

Оценки (13) и (15) – это оценки первых двух слагаемых уравнения (4). При этом необходимо обратить внимание на условие

$$|\ddot{w}''|_{\max} = \frac{12A^2 \omega_0^2}{R_0} \ll A \omega_0^2 = |\ddot{w}|_{\max}.$$

Из указанного условия следует, что если какая-либо величина мала по сравнению с $|\ddot{w}''|_{\max}$, то она и подавно мала по сравнению с $|\ddot{w}|_{\max}$. Оценки (8), (11) и (14) позволяют оценить другие слагаемые, входящие в уравнение (4):

$$|4\Omega \dot{w}'|_{\max} = \frac{24\Omega A^2 \omega_0}{R_0}, \quad |2\dot{\Omega} w'|_{\max} = 4\dot{\Omega} A, \\ |\Omega^2 (w - w'')|_{\max} = 3\Omega^2 A.$$

Условия, при которых можно исключить из уравнения (4) слагаемое, содержащее угловое ускорение, имеют вид

$$4\dot{\Omega} A \ll \frac{12A^2 \omega_0^2}{R_0}, \quad 4\dot{\Omega} A \ll \frac{24\Omega A^2 \omega_0}{R_0},$$

или, более просто,

$$\dot{\Omega} \ll \frac{3A\omega_0^2}{R_0}, \quad \dot{\Omega} \ll \frac{6\Omega A\omega_0}{R_0}. \quad (16)$$

Угловая скорость вращения ТВГ Ω значительно меньше частоты колебаний резонатора ω_0 . Поэтому из выполнения второго условия (16) вытекает выполнение первого. Поскольку условия (16) означают различие величин на несколько порядков, то можно не указывать числовые множители. Таким образом, из уравнения (4) можно исключить слагаемое, содержащее угловое ускорение $\dot{\Omega}$, при выполнении условия

$$\dot{\Omega} \ll \frac{\Omega A \omega_0}{R_0}. \quad (17)$$

Условия, при которых можно исключить из уравнения (4) слагаемое, содержащее квадрат угловой скорости, имеют вид

$$3\Omega^2 A \ll \frac{12A^2 \omega_0^2}{R_0}, \quad 3\Omega^2 A \ll \frac{24\Omega A^2 \omega_0}{R_0},$$

или, в более простом виде

$$\Omega \ll 2\omega_0 \sqrt{\frac{A}{R_0}}, \quad \Omega \ll \frac{8A\omega_0}{R_0}. \quad (18)$$

Из выполнения второго условия (18) следует выполнение первого. Это объясняется тем, что

$$\frac{A}{R_0} \ll \sqrt{\frac{A}{R_0}}.$$

Таким образом, из уравнения (4) можно исключить слагаемое, содержащее квадрат угловой скорости Ω^2 , при выполнении условия

$$\Omega \ll \frac{A\omega_0}{R_0}. \quad (19)$$

Анализ результатов

При выполнении условий (17) и (19) в уравнении (4) можно пренебречь слагаемыми, содержащими угловое ускорение ТВГ и квадрат его угловой скорости, в результате чего это уравнение примет вид

$$\ddot{w}'' - \ddot{w} + 4\Omega \dot{w}' + \kappa^2 (w^{VI} + 2w^{IV} + w'') = 0. \quad (20)$$

Для резонаторов, изготовленных из кварцевого стекла, имеющих значения $A = 2$ мкм, $f = 5500$ Гц, $\omega_0 = 34558$ с⁻¹, $R_0 = 15$ мм, получается порядок величины $A\omega_0/R_0 \sim 10^0$ рад/с, т. е. составляет несколько радиан в секунду. Поэтому для выполнения условия (19) угловая скорость по порядку величины не должна превышать десятки доли радиан в секунду. В противном случае модель ТВГ в виде уравнения (20) будет не совсем адекватна.

Выполнение условия (17) еще более затруднительно. В короткий промежуток времени, когда ВТГ начинает вращение из состояния покоя, это условие не выполняется, поскольку угловая скорость близка к нулю, а угловое ускорение сравнительно велико. Ухудшение точности компенсируется тем, что угол поворота ВТГ в инерциальной системе отсчета также близок к нулю в указанный промежуток времени. Если $A\omega_0/R_0 \sim 10^0$ рад/с, $\Omega \sim 10^{-1}$ рад/с, то $\Omega A\omega_0/R_0 \sim 10^{-1}$ рад/с². Условие (17) означает, что угловое ускорение по порядку величины не должно превышать сотых долей радиан в секунду за секунду.

Увеличение амплитуды и частоты колебаний резонатора и уменьшение его радиуса расширяет пределы скоростных режимов работы ВТГ. Однако такому изменению параметров резонатора могут препятствовать технологические ограничения. В этой ситуации повышение точности ВТГ может быть достигнуто с помощью метода статистического оценивания [15]. Для применения этого метода должны быть известны оператор, преобразующий угол поворота ВТГ в инерциальной системе отсчета $\theta(t)$ в угол поворота стоячей волны относительно резонатора $\phi(t)$, и корреляционный оператор шума. Если $\theta(t)$ является случайной функцией времени и известен ее ковариационный оператор, то точность статистического оценивания будет еще выше.

Библиографические ссылки

1. Лунин Б. С. Физико-химические основы разработки полусферических резонаторов волновых твердотельных гироскопов. М. : Изд-во МАИ, 2005. 224 с. ISBN 5-7035-1579-3.
2. Распопов В. Я., Лихошерст В. В. Волновые твердотельные гироскопы с металлическим резонатором // Гироскопия и навигация. 2023. № 31 (1). С. 26–44. EDN: BQEDWV.
3. Волновые твердотельные гироскопы: обзор публикаций / А. А. Маслов, Д. А. Маслов, И. Г. Ниналалов, И. В. Меркурьев // Гироскопия и навигация. 2023. № 31 (1). С. 3–25. EDN: BJLSLM.
4. Егоров С. В., Распопов В. Я. Проектирование резонатора волнового твердотельного гироскопа и верификация конечно-элементной модели // Известия ТулГУ. Технические науки. 2021. № 10. С. 227–235. DOI 10.24412/2071-6168-2021-10-227-235.

5. Малютин Д. М. Структурные решения, обеспечивающие увеличение динамической точности волнового твердотельного гироскопа // Приборы и методы измерений. 2021. Т. 12, № 2. С. 146–155. DOI 10.21122/2220-9506-2021-12-2-146-155.

6. Твердотельный волновой гироскоп с независимыми каналами измерения угла и угловой скорости / Р. В. Мельников, Г. А. Трутнев, А. В. Кривов, И. Р. Кадыров // Интеллектуальные системы в производстве. 2020. 18 (4). С. 21–29. DOI10.22213/2410-9304-2020-21-29.

7. Компенсация уходов волнового твердотельного гироскопа, вызванных анизотропией упругих свойств монокристаллического резонатора / А. А. Маслов, Д. А. Маслов, И. В. Меркурьев, В. В. Подалков // Гироскопия и навигация. 2020. Т. 28, № 2 (109). С. 25–36. DOI 10.17285/0869-7035.0031.

8. Маслов Д. А., Меркурьев И. В. Влияние нелинейных свойств электростатических датчиков управления на динамику цилиндрического резонатора волнового твердотельного гироскопа // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2021. № 6. С. 88–110. DOI 10.31857/S0572329921050068.

9. Басараб М. А., Лунин Б. С., Чуманкин Е. А. Балансировка металлических резонаторов волновых твердотельных гироскопов общего применения // Динамика сложных систем – XXI век. 2021. Т. 15, № 1. С. 58–68. DOI10.18127/j19997493-202101-01.

10. Шишаков К. В. Алгоритмическое повышение точности сигналов твердотельных волновых гироскопов // Интеллектуальные системы в производстве. 2022. Т. 20, № 4. С. 34–47. DOI10.22213/2410-9304-2022-4-34-47.

11. Журавлёв В. Ф. Пространственный осциллятор Ван-дер-Поля. Технические приложения // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2020. № 1. С. 158–164. DOI 10.31857/S0572329920010249.

12. Журавлёв В. Ф. О формировании обратных связей в пространственном осцилляторе Ван-дер-Поля // Прикладная математика и механика. 2020. Т. 84, № 2. С. 151–157. DOI10.31857/S0032823520010105.

13. Лунин Б. С., Матвеев В. А., Басараб М. А. Волновой твердотельный гироскоп. Теория и технология. М. : Радиотехника, 2014. 176 с. ISBN 978-5-88070-381-4.

14. Журавлев В. Ф., Климов Д. М. Волновой твердотельный гироскоп. М. : Наука, 1985. 126 с.

15. Пытьев Ю. П. Методы математического моделирования измерительно-вычислительных систем. М. : Изд-во Московского университета, 2024. 431 с. ISBN 978-5-19-011967-1.

References

1. Lunin B. S. *Fiziko-khimicheskie osnovy razrabotki polosfericheskikh rezonatorov volnovykh tverdotel'nykh giroskopov* [Physical and chemical foundations of the development of hemispherical resonators for wave solid-state gyroscopes]. Moscow, MAI Publ., 2005, 224 p. (in Russ.). ISBN 5-7035-1579-3.

2. Raspopov V.Ya., Likhoshester V.V. [Wave Solid-State Gyroscopes with a Metal Resonator]. *Giroskopiya i Navigatsiya*, 2023, no. 31(1), pp. 26-44 (In Russ.). EDN: BQEDWV.

3. Maslov A.A., Maslov D.A., Ninalalov I.G., Merkur'yev I.V. [Hemispherical Resonator Gyros. An Overview of Publications]. *Giroskopiya i Navigatsiya*, 2023, no. 31 (1) pp. 3-25 (In Russ.). EDN: BJLSLM.

4. Egorov S.V., Raspopov V.Ya. [Design of a Wave Solid-State Gyroscope Resonator and Verification of a Finite-Element Model]. *Izvestiya TulGU. Technical Sciences*, 2021, no. 10, pp. 227-235 (in Russ.). DOI 10.24412/2071-6168-2021-10-227-235.

5. Malyutin D.M. [Structural Solutions that Increase the Dynamic Accuracy of a Wave Solid-State Gyroscope]. *Devices and Methods of Measurements*, 2021, vol. 12, no. 2, pp. 146-155 (In Russ.). DOI10.21122/2220-9506-2021-12-2-146-155.

6. Melnikov R.V., Trutnev G.A., Krivov A.V., Kadyrov I.R. [A Solid-state wave gyro with independent channels for measuring angle and angular velocity]. *Intellektualnye sistemy v proizvodstve*, 2020, vol. 18, no. 4, pp. 21–29. DOI10.22213/2410-9304-2020-21-29.

7. Maslov A.A., Maslov D.A., Merkur'yev I.V., Podalkov V.V. [Compensation for the departures of the wave solid-state gyroscope caused by anisotropy of the elastic properties of the monocrystalline resonator]. *Gyroskopy and navigation*, 2020, vol. 28, no. 2, pp. 25-36 (in Russ.). DOI10.17285/0869-7035.0031.

8. Maslov D.A., Merkur'yev I.V. [Influence nonlinear properties of electrostatic control sensors on the dynamics of a cylindrical resonator of a wave solid-state gyroscope]. *Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Solid state mechanics*, 2021, no. 6, pp. 88-110 (in Russ.). DOI 10.31857/S0572329921050068.

9. Basarab M.A., Lunin B.S., Chumankin E.A. [Balancing of metal resonators of wave solid-state gyroscopes of general application]. *Dynamics of complex systems - XXI century*, 2021, vol. 15, no. 1, pp. 58-68 (in Russ.). DOI10.18127/j19997493-202101-01.

10. Shishakov K.V. [Algorithmic improvement of signal accuracy of solid-state wave gyroscopes]. *Intellektual'nyesistemy v proizvodstve*, 2022, vol. 20, no. 4, pp. 34-47 (in Russ.). DOI 10.22213/2410-9304-2022-4-34-47.

11. Zhuravlev V.F. [Spatial oscillator of Van der Pol. Technical appendices]. *Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Solid state mechanics*, 2020, no. 1, pp. 158-164 (in Russ.). DOI 10.31857/S0572329920010249.

12. Zhuravlev V.F. [On the formation of feedbacks in the spatial oscillator of Van der Pol]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2020, vol. 84, no. 2, pp. 151-157 (in Russ.). DOI 10.31857/S0032823520010105.

13. Lunin B.S., Matveev V.A., Basarab M.A. *Volnovoi tverdotel'nyi giroskop. Teoriya i tekhnologii* [Wave solid state gyroscope. Theory and technology]. Moscow, Radiotekhnika Publ., 2014, 176 p. (in Russ.). ISBN 978-5-88070-381-4.

14. Zhuravlev V.F., Klimov D.M. *Volnovoi tverdotel'nyi giroskop* [Wave solid state gyroscope]. Moscow, Nauka Publ., 1985, 126 p. (in Russ.).

15. Pyt'yev Yu.P. *Metody matematicheskogo omodelirovaniya izmeritelno-vychislitel'nykh sistem* [Methods of mathematical modeling of measurement and computing systems]. Moscow, Moscow University Publ., 2024, 431 p. (in Russ.). ISBN 978-5-19-011967-1.

Dependence of Ultimate Operating Speed of a Solid-state Wave Gyroscope that does not Degrade the Measurement Accuracy on the Parameters of Its Resonator

S. V. Klishin, PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk, Russia,

O. Ya. Shamsiakhmetov, Senior Lecturer, Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk, Russia.

The article analyzes the ring resonator motion equation of a wave solid-state gyroscope (WSG). Bending oscillations making the ring resonator alternately take the shape of a circle or an ellipse are considered. The analysis uses an ellipse corresponding to the amplitude values of the ring particle radial movements. The ellipse equation is written in a coordinate system where the coordinate axes pass through the nodes of a standing wave excited in a ring resonator. The transition into the ellipse equation from rectangular coordinates to polar ones allows calculation the radial displacement derivatives of the resonator particles with respect to the angle.

When differentiating according to time, it is assumed that the radial movements of the ring resonator particles follow a cosine law, i.e., oscillate harmonically. As a result, the time derivatives of the resonator particle radial displacements and their angle derivatives were calculated.

The maximum values of the radial displacements of the ring resonator particles with respect to angle, time, and mixed derivatives with respect to angle and time were found using expressions for their derivatives. The values obtained allowed evaluation the maximum values of the terms included in the WSG ring resonator motion equation. All values are obtained in the form of expressions containing the amplitude of ring resonator oscillations in the standing wave nodes, the circular oscillation frequency, and the ring resonator radius.

Due to significant smallness of the terms containing the square of the angular velocity and the angular acceleration, compared to other terms in the motion equation of the WSG ring resonator, the conditions for the angular velocity and the angular acceleration were obtained. If the obtained conditions are met the ring resonator motion equation, with excluded terms containing the squared angular velocity and the angular acceleration, can be considered as an adequate model of the WSG. Otherwise, another mathematical model should be applied.

Keywords: wave solid-state gyroscope, resonator, standing wave, angular velocity, angular acceleration.

Получено: 23.04.26

Образец цитирования

Клишин С. В., Шамсиахметов О. Я. Зависимость предельных скоростных режимов работы твердотельного волнового гироскопа, не ухудшающих точность измерений, от параметров его резонатора // Интеллектуальные системы в производстве. 2026. Т. 24, № 3. С. 54–58. DOI: 10.22213/2410-9304-3026-2-54-58.

For Citation

Klishin S.V., Shamsiakhmetov O.Ya. [Dependence of the limiting speed regimes of a solid-state wave gyroscope that do not degrade measurement accuracy on the parameters of its resonator]. *Intellektualnye sistemy v proizvodstve*. 2026. Vol. 24, no. 3. Pp. 54-58 (in Russ.). DOI: 10.22213/2410-9304-3026-2-54-58.