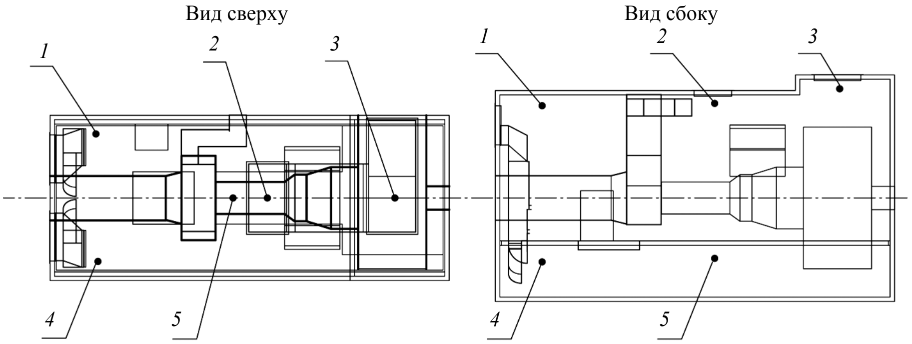

Рис. 2. Схема расстановки точек замера параметров воздуха

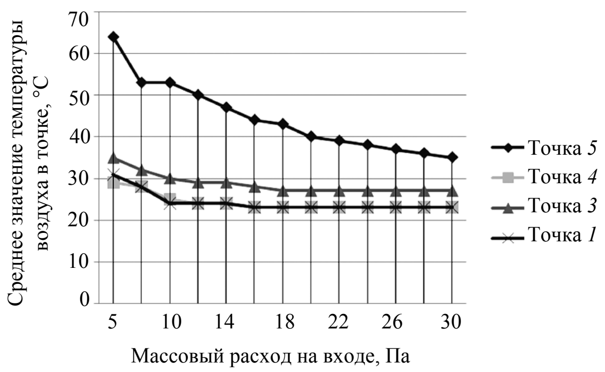

Рис. 3. Влияние массового расхода воздуха, прокачиваемого в объем КШТ, на температуру воздуха в выбранных сечениях *1–5*

Библиографические ссылки

1. *Трусов П. В.*, *Чарнцев Д. А.*, *Печенкина А. М.* Исследование теплового состояния шумотеплозащитного кожуха газотурбинной установки газоперекачивающего агрегата // Химическое и нефтегазовое машиностроение. – 2010. – № 8. – С. 8–10.

2. *Алиев А. В.*, *Мерзляков Е. В.* Моделирование газодинамических процессов в системах охлаждения газоперекачивающих агрегатов // Вестник ИжГТУ. – 2012. – № 2(54). – С. 169–171.

3. *Алиев А. В.*, *Блинов Д. С.* Решение газодинамических задач в областях сложной формы с использованием конечно-объемных алгоритмов метода крупных частиц // Вестник ИжГТУ. – 2009. – № 1(41). – С. 151–154.

4. *Алиев А. В.*, *Мищенкова О. В.* Математическое моделирование в технике. – Москва ; Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2012. – 476 с.

E. V. Merzlyakov, Post-graduate, Kalashnikov Izhevsk State Technical University

Analysis of Factors Influencing the Temperature Mode in Gas-Pumping Unit Casing

Method of temperature mode calculation inside the noise-heat-protective casing of a gas-pumping unit, based on the numerical modeling of gas-dynamic processes, is applied to analyze factors, influencing the temperature decrease in the internal volume of the gas-pumping unit casing. It is shown, that the increase in mass air flow pumped through the casing volume leads to the air temperature decrease down to certain limits only.

Key words: gas-pumping unit, modeling, cooling, temperature.

УДК 517.929.2

А. А. Айзикович, кандидат физико-математических наук, доцент, Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова
Д. С. Кочурова, аспирант, Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

НЕОСЦИЛЛЯЦИЯ ЛИНЕЙНОГО РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Доказаны признаки неосцилляции, (1,2)-неосцилляции и условие существования положительного решения линейного разностного уравнения третьего порядка.

Ключевые слова: разностное уравнение, неосцилляция, квазинуль, присоединенное уравнение.

Первой работой, посвященной проблеме распределения нулей решений линейного дифференциального уравнения третьего порядка, является работа Азбелева Н. В. и Цалюка З. Б. [1], ее продолжением стала работа Zettl A. [2]. Изучением распределения квазинулей решений для частного

Получено 29.01.13

вида линейного разностного уравнения занимались Henderson J., Peterson A. [3], распределением квазинулей и нулей – Krueger R. J. [4]. Данная работа основывается на результатах [2] и содержит обобщения некоторых теорем из [3] и [4].

В работе рассматривается разностное уравнение третьего порядка

$$L_3 y(t) \equiv y(t+3) + p_2(t) y(t+2) + \\ + p_1(t) y(t+1) + p_0(t) y(t) = 0, \\ t \in [0, N-3] \equiv \{0, 1, \ldots, N-3\}, \quad (1)$$

где $p_2(t), p_1(t), p_0(t)$ – действительные функции, определенные на множестве $[0, N-3]$ и удовлетворяющие необходимым условием неосцилляции: $p_2(t) < 0$, $p_1(t) > 0$, $p_0(t) < 0$ [5, 6]. Основными результатами работы являются признак (1,2)-неосцилляции на множестве $[0, N]$ и признак неосцилляции на множестве $[2, N]$ уравнения (1). Также установлены условия связи квазинулей исходного и присоединенного к нему уравнений и условие существования положительного решения уравнения (1).

Вспомогательные результаты

Первый результат устанавливает связь между функциями Коши исходного уравнения (1) и его присоединенного [7, 8]:

$$L_3^* z(t) \equiv p_0(t+3) z(t+3) + p_1(t+2) z(t+2) + \\ + p_2(t+1) z(t+1) + z(t) = 0, \quad t \in [0, N-6]. \quad (2)$$

ЛЕММА. Функция Коши $K(t,s)$ уравнения (1) и функция Коши $K^*(t,s)$ уравнения (2) связаны соотношением

$$K^*(s-1, t-2) = -p_0(t) K(t,s), \\ t \in [3, N-3], s \in [1, N-2]. \quad (3)$$

Доказательство. Запишем функцию Коши $K^*(s-1, t-2)$ через отношение детерминантов:

$$K^*(s-1, t-2) = \\ = \begin{vmatrix} z_1(t-2) & z_2(t-2) & z_3(t-2) \\ z_1(t-1) & z_2(t-1) & z_3(t-1) \\ z_1(s-1) & z_2(s-1) & z_3(s-1) \end{vmatrix} \Big/ D_z(t-2),$$

где $\{z_i\}_{i=1}^3$ – фундаментальная система решений уравнения (2); $D_z(t) = |z_i(t+j-1)|$, $i, j = 1, 2, 3,$ – определитель Казорати. Разложив определитель числителя по последней строке и разделив обе части равенства на $D_z(t-3)$, получим:

$$\frac{K^*(s-1, t-2)}{D_z(t-3)} = \frac{z_1(s-1) D_{z_1}(t-2)}{D_z(t-3) D_z(t-2)} - \\ - \frac{z_2(s-1) D_{z_2}(t-2)}{D_z(t-3) D_z(t-2)} + \frac{z_3(s-1) D_{z_3}(t-2)}{D_z(t-3) D_z(t-2)}, \quad (4)$$

где $D_{z_i}(t)$, $i = 1, 2, 3$ – минор определителя Казорати, образованный строками с номерами 1, 2 и не содержащий столбца с номером i.

Если $\{y_i\}_{i=1}^3$ – фундаментальная система решений уравнения (1), то [7, 8]

$$y_i(t) = (-1)^{3-i} D_{z_i}(t-2) \big/ D_z(t-3), t \in [3, N-2],$$

и равенство (4) может быть записано в виде

$$\frac{K^*(s-1, t-2)}{D_z(t-3)} = \\ = \frac{z_1(s-1) y_1(t) + z_2(s-1) y_2(t) + z_3(s-1) y_3(t)}{D_z(t-2)}. \quad (5)$$

Для функции Коши $K(t,s)$ выполним тот же порядок операций, кроме деления на определитель $D_y(s-1)$, и воспользуемся следующим утверждением [8]:

$$z_i(s-1) = (-1)^{3-i} D_{y_i}(s) \big/ D_y(s), s \in [1, N-2].$$

Тогда получим, что

$$K(t,s) = y_1(t) z_1(s-1) + y_2(t) z_2(s-1) + y_3(t) z_3(s-1).$$

Учитывая последнее, из (5) имеем:

$$\frac{K^*(s-1, t-2)}{D_z(t-3)} = \frac{K(t,s)}{D_z(t-2)}.$$

В силу соотношений [8] $D_z(t-3) = 1 \big/ D_y(t)$, $D_z(t-2) = 1 \big/ D_y(t+1)$ имеем:

$$\frac{D_z(t-3)}{D_z(t-2)} = \frac{D_y(t+1)}{D_y(t)} = -p_0(t),$$

отсюда следует (3).

Определение 1. Пусть $y(t)$ – функция, определенная на множестве $[0, N]$. Условимся приписывать значению $y(0)$ знак $(-1)^{t+1} \operatorname{sign} y(t+1)$, если $y(0) = y(1) = \ldots = y(t) = 0$, $y(t+1) \neq 0$, $t \in [0, N-1]$, в остальных случаях значению $y(t) = 0$ будем приписывать знак, противоположный знаку $y(t-1)$. Точка t называется квазинулем функции $y(t)$ на множестве $[0, N]$, если $t < N$ и знаки $y(t)$, $y(t+1)$, определенные с учетом вышеуказанного правила, противоположны [5].

Определение 2. Функция $y(t)$, не равная тождественно нулю, имеет квазинуль порядка $p \ge 1$ в точке $t = 0$, если $y(i) = 0, 0 \le i \le p-1$, и $y(t)$ имеет квазинуль порядка $p \ge 1$ в точке $t, t \le N-p$, если $y(t) \ne 0$, $(-1)^p y(t) y(t+p) \ge 0$, где $y(t+i) = 0$, $1 \le i \le p-1$ [3].

Определение 3. Решение $y(t)$ имеет (p, q)-пару квазинулей, если в точке t_1 оно имеет квазинуль порядка *p*, а в точке $t_2 \ge t_1 + p$ квазинуль порядка *q*, который является первым квазинулем после точки $t_1 + p - 1$ [3].

Теорема 1. Пусть разностное уравнение (1) имеет нетривиальное решение $y(t)$ с (2,1)-парой квазинулей в точках t_1 и t_2, $t_1 \in [2, N-6]$, $t_2 \in [4, N-4]$, $t_2 \ge t_1 + 2$, и t_2 является первым квазинулем $y(t)$ после t_1. Тогда найдется нетривиальное решение уравнения (2) с (1,2)-парой квазинулей на множестве $t \in [t_1 - 2, t_2 - 1]$.

Доказательство. Пусть $y(t)$ – решение (1), удовлетворяющее условиям теоремы. Очевидно, что функции $\{K(t, s+i-1)\}_{i=0}^{2}$ составляют фундаментальную систему решений уравнения (1). Представим $y(t)$ через эту систему решений:

$$y(t) = c_0 K(t, t_1 - 1) + c_1 K(t, t_1) + c_2 K(t, t_1 + 1). \quad (6)$$

Так как $y(t)$ в точках t_1 и t_2 имеет (2,1)-пару квазинулей, то $y(t_1) y(t_1 + 2) \ge 0$, $y(t_1 + 1) = 0$, $y(t_2) y(t_2 + 1) \le 0$. Подставляя в эти неравенства представление $y(t)$ из (6) получим ограничения на $c_i, i = 0, 1, 2$:

$$y(t_1) = c_2 K(t_1, t_1 + 1) = -c_2 p_0 (t_1)^{-1}, \quad y(t_1 + 1) = c_0 = 0,$$
$$y(t_1 + 2) = c_0 K(t_1 + 2, t_1 - 1) + c_1 = c_1,$$
$$y(t_1) y(t_1 + 2) = -p_0 (t_1)^{-1} c_2 c_1 \ge 0, \quad c_1 c_2 \ge 0,$$

откуда $y(t) = c_1 K(t, t_1) + c_2 K(t, t_1 + 1)$, где c_1 и c_2 не равны нулю одновременно, и для определенности $c_1 \ge 0$, $c_2 > 0$. Если t_2 – первый квазинуль решения $y(t)$ после точки $t_1 + 1$, то $y(t_2) > 0, y(t_2 + 1) \le 0$, иначе функцию $y(t)$ умножим на –1. Представляя решение присоединенного уравнения в виде

$$z(t) = -p_0 (t_2 + 1)^{-1} \times$$
$$\times \left(c_0 K^*(t, t_2 - 1) + c_1 K^*(t+1, t_2 - 1) + c_2 K^*(t+2, t_2 - 1) \right),$$

где c_i, $i = 1, 2, 3$ определены ранее, и используя свойства функции Коши $K^*(t, s)$ и соотношение (3), имеем:

$$z(t_1 - 2) = c_1 K(t_2 + 1, t_1) +$$
$$+ c_2 K(t_2 + 1, t_1 + 1) = y(t_2 + 1) \le 0,$$
$$z(t_2 - 3) = -p_0 (t_2 + 1)^{-1} c_1 K^*(t_2 - 2, t_2 - 1) = c_1,$$
$$z(t_2 - 2) = 0,$$
$$z(t_2 - 1) = -p_0 (t_2 + 1)^{-1} c_2.$$

Найдем знак произведения $z(t_2 - 3) z(t_2 - 1)$:

$$z(t_2 - 3) z(t_2 - 1) = -p_0 (t_2 + 1)^{-1} c_2 c_1 \ge 0.$$

Функция $z(t)$ имеет квазинуль второго порядка в точке $t_2 - 3$, если $c_1 \ne 0$, иначе точка $t_2 - 4$ является квазинулем второго порядка, так как $z(t_2 - 4) = -p_0 (t_2 + 1)^{-1} c_2 K^*(t_2 - 2, t_2 - 1) = c_2 > 0$, $z(t_2 - 3) = 0$ и $z(t_2 - 2) = 0$.

Если $z(t) > 0$ при $t \in [t_1 - 1, t_2 - 4]$, то решение $z(t)$ имеет (1,2)-пару квазинулей в точках $t_1^* = t_1 - 2$ и $t_2^* = t_2 - 3$ или $t_2^* = t_2 - 4$; иначе функция $z(t)$ имеет (1,2)-пару квазинулей в точках $t_1^* \in [t_1 - 2, t_2 - 5]$ и $t_2^* = t_2 - 3$ или $t_2^* = t_2 - 4$.

Аналогично доказательству теоремы 1 доказывается следующая теорема.

Теорема 2. Пусть разностное уравнение (1) имеет нетривиальное решение $y(t)$ с (1,2)-парой квазинулей в точках t_1 и t_2, $t_1 \in [5, N-3]$, $t_2 \in [6, N-2]$, $t_2 \ge t_1 + 1$, и t_2 является первым квазинулем $y(t)$ после t_1. Тогда найдется нетривиальное решение уравнения (2) с (2,1)-парой квазинулей на множестве $t \in [0, t_2 - 2]$.

Для третьего порядка теоремы 1 и 2 являются обобщением теоремы, представленной в работе [4], где рассматриваются (p, q)-пары квазинулей с *q* обычными нулями.

Признаки неосцилляции

Определение 4. Назовем уравнение (1) неосцилляционным, если на множестве $t \in [0, N]$ любое его нетривиальное решение имеет не более $n-1$-го квазинуля [5, 6].

Определение 5. Пусть $t \in [0, N]$ – некоторая фиксированная точка. Множество $[t, b]$, $b \le N$, в котором нет (p, q)-пары квазинулей решений уравнения (1), будем называть множеством $(p, q)_t$-неосцилляции. Максимальное при фиксированном *t* множество $(p, q)_t$-неосцилляции обозначим через $[t, a_{pq}(t)]$. Максимальное при фиксированном *t* множество неосцилляции обозначим через $[t, a(t)]$.

Теорема 3. Множество неосцилляции $\left[\tilde{t}, a(\tilde{t})\right]$ уравнения (1) является пересечением множеств $\left[\tilde{t}, a_{12}(\tilde{t})\right]$ и $\left[\tilde{t}, a_{21}(\tilde{t})\right]$.

Доказательство. Пусть $\rho(\tilde{t}) = \min\left(a_{12}(t), a_{21}(t)\right)$. Предположим, что $\rho(\tilde{t}) > a(\tilde{t})$, значит, множество $\left[\tilde{t}, \rho(\tilde{t})\right]$ осцилляционно, тогда существует ненулевое решение $u(t)$ такое, что $u(\tilde{t}) = 0$ и $u(t)$ имеет последовательные квазинули в точках $j, j+1, \quad j > \tilde{t}, \quad u(t)$ сохраняет знак при $t \in \left[\tilde{t}+1, j\right]$ [6]. Будем считать, что $u(t)$ положительна при $t \in \left[\tilde{t}+1, j\right]$. Точка $t = j$ не является квазинулем второго порядка функции $u(t)$, так как это противоречит условию (1,2)-неосцилляции множества, то есть $u(j+1) < 0, \quad u(j+2) \geq 0$.

Составим решение уравнения (1)

$$y(t) = c_1 u(t) + K(t, \tilde{t}),$$

где $c_1 = -\dfrac{K(j+1, t)}{u(j+1)}$. Так как функция Коши $K(t, \tilde{t}) > 0$ при $t > \tilde{t}+1$, что следует из (2,1)-неосцилляционности множества $\left[\tilde{t}, \rho(\tilde{t})\right]$, то $c_1 > 0$, и значит,

$$y(\tilde{t}) = 0, \quad y(t) > 0, \quad t \in \left[\tilde{t}+1, j\right],$$

$$y(j+1) = 0, \quad y(j+2) > 0.$$

Таким образом, решение $y(t)$ имеет пару (1,2)-квазинулей в точках $\tilde{t}, j$, что противоречит (1,2)-неосцилляционности множества $\left[\tilde{t}, \rho(\tilde{t})\right]$, следовательно, $\rho(\tilde{t}) \leq a(\tilde{t})$.

Пусть $\rho(\tilde{t}) < a(\tilde{t})$, тогда на множестве $\left[\tilde{t}, a(\tilde{t})\right]$ существует решение, имеющее (1,2)- или (2,1)-пару квазинулей, что противоречит определению неосцилляции, значит, $\rho(\tilde{t}) = a(\tilde{t})$.

Теорема 3 является разностным аналогом соответствующего утверждения для дифференциального уравнения третьего порядка [1].

Теорема 4. Если справедливы неравенства

$$p_0(t) = -1, \quad p_2(t) \leq -3,$$
$$p_2(t) + p_1(t) \geq 0, \quad t \in [0, N-3],$$

то уравнение (1) (1,2)-неосцилляционно на множестве $[0, N]$.

Доказательство. Предположим, что $u(t)$ – решение уравнения (1), имеющее (1,2)-пару квазинулей в точках t_1 и t_2, и пусть для определенности $u(t_1) < 0$. Вектор $\mathrm{Y}(t) = \begin{pmatrix} y_0(t) & y_1(t) & y_2(t) \end{pmatrix}$ определим следующим образом:

$$y_0(t) = \Delta u(t)\Delta^2 v(t) - \Delta v(t)\Delta^2 u(t),$$
$$y_1(t) = u(t)\Delta^2 v(t) - v(t)\Delta^2 u(t),$$
$$y_2(t) = u(t)v(t+1) - u(t+1)v(t).$$

Можно показать, что существует такое решение $v(t)$ уравнения (1), что

$$\begin{cases} y_0(t_1) > 0, \\ y_1(t_1) \geq 0, \\ y_2(t_1) \geq 0. \end{cases}$$

Тогда

$$y_2(t_2)\, y_2(t_2+1) = -u(t_2)\, u(t_2+2)\, v^2(t_2+1) \leq 0. \quad (7)$$

Вектор $\mathrm{Y}(t)$ удовлетворяет равенству $\Delta\mathrm{Y}(t) = F(t)\mathrm{Y}(t)$, где

$$F = \begin{pmatrix} \tilde{p}_1(t) - \tilde{p}_2(t) & \tilde{p}_0(t) & \tilde{p}_0(t) \\ 1 - \tilde{p}_2(t) & -\tilde{p}_2(t) & -\tilde{p}_1(t) + \tilde{p}_0(t) \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{p}_0(t) = p_2(t) + p_1(t) + p_0(t) + 1,$$
$$\tilde{p}_1(t) = p_1(t) + 2p_2(t) + 3,$$
$$\tilde{p}_2(t) = 3 + p_2(t).$$

Условия теоремы означают, что $F(t) \geq 0$. Поскольку $Y(t_1) > 0$, то и $\mathrm{Y}(t) > 0$ при $t \geq t_1$, значит, $Y(t_2) > 0$, из чего следует, что $y_2(t_2)\, y_2(t_2+1) > 0$, что противоречит (7).

Полученный признак (1,2)-неосцилляции является разностным аналогом результата из [2] и в то же время является обобщением результата из [4] для $n = 3$.

Следствие 1. Если множество $[0, N]$ является множеством (1,2)-неосцилляции, то существует решение, положительное на этом множестве.

Доказательство. Так как множество $[0, N]$ является множеством (1,2)-неосцилляции, то функция Коши $K(t, s)$ положительна при $t < s$. Тогда можно построить положительное решение $u(t)$:

$$u(t) = K(t, N-2) + c_1 K(t, N-4),$$

где c_1 такое, что $K(N, N-2) + c_1 K(N, N-4) > 0$, $c_1 > 0$.

Сформулируем предыдущую теорему для присоединенного уравнения (2).

Теорема 5. Если справедливы неравенства

$$p_0\left(t+3\right)=-1,\ \ p_1\left(t+2\right)\geq 3,$$
$$p_2\left(t+1\right)+p_1\left(t+2\right)\leq 0,\ \ t\in\left[0,\,N-6\right],$$

то уравнение (2) (1,2)-неосцилляционно на множестве $t\in\left[0,\,N-3\right]$.

Теорема 6. Если справедливы неравенства

$$\begin{gathered}p_0\left(t\right)=-1,\ \ p_2\left(t\right)\leq -3,\\ p_1\left(t\right)+p_2\left(t\right)\geq 0,\ \ t\in\left[0,\,N-3\right],\end{gathered}\tag{8}$$

$$p_1\left(t+2\right)\geq 3,\ \ p_2\left(t+1\right)+p_1\left(t+2\right)\leq 0,\ \ t\in\left[0,\,N-6\right],\tag{9}$$

то уравнение (1) неосцилляционно на множестве $t\in\left[2,\,N-4\right]$.

Доказательство. Условия (8) означают, что по теореме 4 уравнение (1) (1,2)-неосцилляционно на множестве $\left[0,\,N\right]$, а из условий (8), (9) следует, что по теореме 5 уравнение (2) (1,2)-неосцилляционно на $\left[0,\,N-3\right]$. Если уравнение (1) имеет нетривиальное решение $y\left(t\right)$ на $\left[2,\,N-4\right]$ с (2,1)-парой квазинулей, то по теореме 1 найдется нетривиальное решение уравнения (2) с (1,2)-парой квазинулей на $\left[0,\,N-5\right]$, что противоречит его (1,2)-неосцилляции. Значит, уравнение (1) неосцилляционно на множестве $\left[2,N-4\right]$ по теореме 3.

Полученный признак неосцилляции является разностным аналогом результата [2].

Библиографические ссылки

1. *Азбелев Н. В.*, *Цалюк З. Б.* К вопросу о распределении нулей решений линейного дифференциального уравнения третьего порядка // Матем. сб. – 1960.– Т. 51(93). – № 4.– С. 475–486.
2. *Zettl A.* Factorization and disconjugacy of third order differential equations // Proc. Amer. Math. Soc. – 1972. – Vol. 31. – No. 1. – P. 203–208.
3. *Henderson J.*, *Peterson A.* Disconjugacy for a third order linear difference equation // Computers Math. Applic. – 1994. – Vol. 28. – No. 1–3. – P. 131–139.
4. *Krueger R. J.* Disconjugacy of nth order difference equations : diss. … Ph.D. – University of Nebraska. Nebraska, 1998. – 95 p.
5. *Тептин А. Л.* Теоремы о разностных неравенствах для *n*-точечных разностных краевых задач // Матем. сб. – 1963. – Т. 62. – № 3. – С. 345–370.
6. *Hartman P.* Difference equations: Disconjugacy, principal solutions, Green`s functions, complete monotonicity // Trans. Amer. Math. Soc. – 1978. – Vol. 246.– P. 1–30.
7. *Nörlund N. E.* Vorlesungen über Differenzenrechnung. – N.Y. : Chelsea Publ. Co., 1954. – 551 p.
8. *Айзикович А. А.* Неосцилляция и факторизация присоединенного разностного оператора // Проблемы соврем. теории период. движ. – Вып. 6. – Ижевск : ИМИ, 1982– С. 43–52.

A. A. Aizikovich, PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Kalashnikov Izhevsk State Technical University
D. S. Kochurova, Post-graduate, Kalashnikov Izhevsk State Technical University

Disconjugacy of the Third Order Linear Difference Equation

The paper presents proofs of disconjugacy features, (1,2)-disconjugacy and the condition of the positive decision existence for the third order linear difference equation.

Key words: difference equation, disconjugacy, quasyzero, adjoint equation.