

Д. М. Цимберов // Химическое и нефтегазовое машиностроение. – 2008. – № 6. – С. 15–16.

2. Белобородов С. М. Методические аспекты обеспечения виброустойчивости валопровода агрегата // Компрессорная техника и пневматика. – 2009. – № 7. – С. 13–15.

3. Белобородов С. М. Методология обеспечения динамической устойчивости валопроводов высокоскоростных газотурбинных агрегатов на основе адаптационной сборки роторов : дис. ... д-ра техн. наук. – Пермь : ПНИПУ, 2011. – 334 с.

4. Долгов В. А. Повышение производительности производственных участков в многономенклатурном производ-

стве путем адаптации технологических процессов к их текущему состоянию : дис. ... д-ра техн. наук. – М. : МГТУ «Станкин», 2012. – 380 с.

5. Шайхутдинов А. З. Повышение энергетических показателей проточных частей нагнетателей газоперекачивающих агрегатов, применяемых на предприятиях ОАО «Газпром» : дис. ... канд. техн. наук. – Казань, 2000. – 190 с.

6. ГОСТ 52527–2006. Надежность, готовность, эксплуатационная технологичность и безопасность. – М. : Изд-во стандартов, 2006. – 16 с.

7. Мильнер Б. З. Теория организации : учебник. – М. : Инфра-М, 2002. – 480 с.

Получено 25.02.2015

УДК 531.36, 629.7

А. В. Алексеев, кандидат технических наук, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С. П. Королёва (Национальный исследовательский университет)

ИССЛЕДОВАНИЕ ОРИЕНТАЦИОННОГО ДВИЖЕНИЯ ТРЕХРОТОРНОГО ГИРОСТАТА НА ОСНОВЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ*

Исследуется пространственное движение вокруг центра масс системы соосных тел, состоящей из несущего тела и трех динамически симметричных роторов, вращающихся относительно главных осей инерции системы. Соосные системы находят приложение в практических задачах механики космического полета, например, при исследовании движения космических аппаратов (КА) с двойным вращением, спутников гироскопов, а также КА, содержащих массивные вращающиеся элементы. Движение соосных тел исследовалось ранее рядом отечественных и зарубежных ученых: В. В. Белецким, Й. Виттенбургом [1], В. В. Крементуло, а также другими [2, 3, 4]. В указанных работах рассмотрены вопросы устойчивости, проведены качественные исследования движений, проанализировано влияние параметров. Однако недостаточно внимания уделено получению аналитических законов движения. Получить точные решения дифференциальных уравнений движения в общем случае не представляется возможным, а по численному решению трудно проводить анализ движения и определять влияние на него параметров системы. Поэтому данная работа посвящена приближенному аналитическому решению и получению зависимостей, позволяющих проводить глубокий качественный анализ движения систем соосных тел и осуществлять синтез параметров КА.

Кроме того, как показано в [5, 6, 7, 8, 9], многороторными системами можно моделировать движение систем твердых тел с полостями, заполненными вязкой жидкостью. На самом деле системы с жидкостями имеют бесконечное число степеней свободы и описываются уравнениями в частных производ-

ных, что создает дополнительные трудности при их исследовании. Если в задаче не требуется определять движение жидкости внутри полости, то ее влияние на твердое тело легче заменить вращающимися роторами. При этом число степеней свободы становится конечным, а математическая модель существенно упрощается. В этой связи результаты, полученные в данной работе, приобретают дополнительную ценность.

Математическая модель

Введем следующие системы координат (рис. 1): $OXYZ$ – кенигова система координат с началом в центре масс системы – точке O ; $Oxyz$ – система координат, жестко связанная с несущим телом (тело 4); $Ox_1y_1z_1$, $Ox_2y_2z_2$, $Ox_3y_3z_3$ – системы координат, жестко связанные с роторами (с телами 1, 2, 3 соответственно). Оси Ox_1 , Oy_2 , Oz_3 являются осями вращения соответствующих роторов и совпадают с осями системы координат, связанной со статором Ox , Oy , Oz . Положение тела 4 относительно системы $OXYZ$ характеризуется углами Эйлера. Положение роторов относительно статора описывается углами относительного закручивания α , β , γ тел 1, 2, 3.

Уравнения движения свободной системы соосных тел можно получить на основе теоремы об изменении кинетического момента [10], а также с помощью уравнений Лагранжа второго рода, соответствующих углам относительного закручивания:

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C - B)qr + A_1\dot{\sigma}_1 + C_3q\sigma_3 - B_2r\sigma_2 = 0, \\ B\dot{q} + (A - C)pr + B_2\dot{\sigma}_2 + A_1r\sigma_1 - C_3p\sigma_3 = 0, \\ C\dot{r} + (B - A)pq + C_3\dot{\sigma}_3 + B_2p\sigma_2 - A_1q\sigma_1 = 0; \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} A_1 (\dot{p} + \dot{\sigma}_1) = M_\alpha, \\ B_2 (\dot{q} + \dot{\sigma}_2) = M_\beta, \\ C_3 (\dot{r} + \dot{\sigma}_3) = M_\gamma, \end{cases} \quad (2)$$

где p, q, r – проекции вектора угловой скорости несущего тела на оси связанной с ним системы координат; $A = \sum_{i=1}^4 A_i, B = \sum_{i=1}^4 B_i, C = \sum_{i=1}^4 C_i$ – суммарные моменты инерции; $A_i, B_i, C_i (i=1..4)$ – моменты инерции каждого из тел системы относительно подвижных систем координат; $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – относительные угловые скорости вращения роторов; $M_\alpha, M_\beta, M_\gamma$ – моменты внутреннего взаимодействия между соосными телами, обеспечивающие необходимый закон вращения роторов.

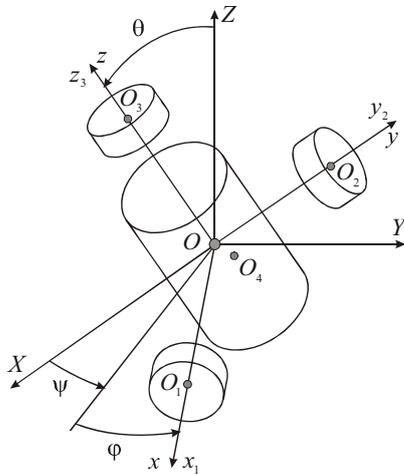


Рис. 1. Схема механической системы, используемые системы координат и углы ориентации

Система динамических уравнений (1) дополняется кинематическими уравнениями Эйлера [11] и выражениями для производных углов закручивания:

$$\dot{\alpha} = \sigma_1, \dot{\beta} = \sigma_2, \dot{\gamma} = \sigma_3. \quad (3)$$

Движение гиригата с медленными роторами

Пусть относительные угловые скорости вращения роторов являются постоянными и малыми по сравнению с угловой скоростью несущего тела, а система является динамически симметричной ($A = B$). Уравнения (1) приводятся к безразмерному виду:

$$\begin{cases} \bar{A}\dot{P} + (\bar{C} - \bar{A})QR = \varepsilon(\bar{B}_2R\Sigma_2 - \bar{C}_3Q\Sigma_3), \\ \bar{A}\dot{Q} + (\bar{A} - \bar{C})PR = \varepsilon(\bar{C}_3P\Sigma_3 - \bar{A}_1R\Sigma_1), \\ \bar{C}\dot{R} = \varepsilon(\bar{A}_1Q\Sigma_1 - \bar{B}_2P\Sigma_2), \end{cases} \quad (4)$$

где символ «точка» означает дифференцирование по безразмерному времени τ , которое определяется формулой $\tau = t\sqrt{p_0^2 + q_0^2 + r_0^2}$;

$\varepsilon = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2} / \sqrt{p_0^2 + q_0^2 + r_0^2}$ – малый параметр, характеризующий медленное вращение роторов относительно несущего тела;

$$\Sigma_k = \sigma_k / \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2} \quad (k=1,2,3);$$

$$P = p / \sqrt{p_0^2 + q_0^2 + r_0^2}; \quad Q = q / \sqrt{p_0^2 + q_0^2 + r_0^2};$$

$$R = r / \sqrt{p_0^2 + q_0^2 + r_0^2}.$$

С помощью замены переменных

$$P = x \cos y; \quad Q = x \sin y; \quad R = z$$

система (4) приводится к виду

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon \alpha z (\Gamma_2 \cos y - \Gamma_1 \sin y), \\ \dot{y} = \alpha z + \varepsilon \alpha \Gamma_3 - \varepsilon \alpha \frac{z}{x} (\Gamma_1 \cos y + \Gamma_2 \sin y), \\ \dot{z} = \varepsilon \gamma x (\Gamma_1 \sin y - \Gamma_2 \cos y), \end{cases} \quad (5)$$

где произведены следующие замены и переобозначения: $A^{-1} = \alpha, C^{-1} = \gamma, \bar{A}_1 \Sigma_1 = \Gamma_1, \bar{B}_2 \Sigma_2 = \Gamma_2, \bar{C}_3 \Sigma_3 = \Gamma_3, a = (C - A)A^{-1}$.

Чтобы отделить медленные движения от быстрых (x и z от y), вместо x, y, z введем новые переменные $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ при помощи формул:

$$\begin{cases} x = \bar{x} + \varepsilon u_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) + \varepsilon^2 u_2(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) + \dots \\ y = \bar{y} + \varepsilon v_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) + \varepsilon^2 v_2(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) + \dots \\ z = \bar{z} + \varepsilon w_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) + \varepsilon^2 w_2(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) + \dots \end{cases} \quad (6)$$

Функции u_i, v_i, w_i пока являются неизвестными и определяются в процессе решения задачи. Процедура решения систем вида (5) методом усреднения подробно описана в [12]. Для определения новых переменных получена система простых дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = 0, \\ \dot{\bar{y}} = a\bar{z} + \varepsilon \left[\alpha \Gamma_3 + \gamma \frac{\bar{x}}{\bar{z}} (\Gamma_1 \cos \bar{y}_0 + \Gamma_2 \sin \bar{y}_0) \right], \\ \dot{\bar{z}} = 0, \end{cases} \quad (7)$$

которая имеет следующее аналитическое решение:

$$\begin{cases} \bar{x} = \bar{x}_0, \\ \bar{y} = \bar{y}_0 + \left\{ a\bar{z}_0 + \varepsilon \left[\alpha \Gamma_3 + \gamma \frac{\bar{x}_0}{\bar{z}_0} (\Gamma_1 \cos \bar{y}_0 + \Gamma_2 \sin \bar{y}_0) \right] \right\} \tau, \\ \bar{z} = \bar{z}_0. \end{cases} \quad (8)$$

Подставляя в (6) найденные функции u_i, v_i и w_i , определим зависимости новых переменных от безразмерного времени:

$$\begin{cases} x(\tau) = \bar{x} + \varepsilon \frac{\alpha}{a} \times \\ \times [\Gamma_1(\cos \bar{y} - \cos \bar{y}_0) + \Gamma_2(\sin \bar{y} - \sin \bar{y}_0)], \\ y(\tau) = \bar{y} - \varepsilon \frac{1}{a\bar{z}} \left(\gamma \frac{\bar{x}}{\bar{z}} + \alpha \frac{\bar{z}}{\bar{x}} \right) \times \\ \times [\Gamma_1(\sin \bar{y} - \sin \bar{y}_0) - \Gamma_2(\cos \bar{y} - \cos \bar{y}_0)], \\ z(\tau) = \bar{z} + \varepsilon \frac{\gamma}{a} \frac{\bar{x}}{\bar{z}} \times \\ \times [\Gamma_1(\cos \bar{y}_0 - \cos \bar{y}) + \Gamma_2(\sin \bar{y}_0 - \sin \bar{y})], \end{cases} \quad (9)$$

где $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ определены в (8). Подставляя (9) в выражения для P, Q, R , получаем приближенное аналитическое решение для безразмерных проекций угловых скоростей, которое имеет следующий вид:

$$\begin{cases} P(\tau) = x(\tau) \cos(y(\tau)), \\ Q(\tau) = x(\tau) \sin(y(\tau)), \\ R(\tau) = z(\tau). \end{cases} \quad (10)$$

Ниже на рис. 2 и 3 приведены графики решения системы (4). Сплошными линиями показано приближенное аналитическое решение (10), пунктирными – решение, полученное численным интегрированием. На рис. 2 для $P(\tau)$ показано два решения, графики которых практически совпадают. Решение для $Q(\tau)$ имеет тот же характер, поэтому его график не представлен. По рис. 3 создается впечатление, что аналитическое решение $R(\tau)$ совпадает с численным хуже остальных, но такое отличие вызвано более крупным масштабом.

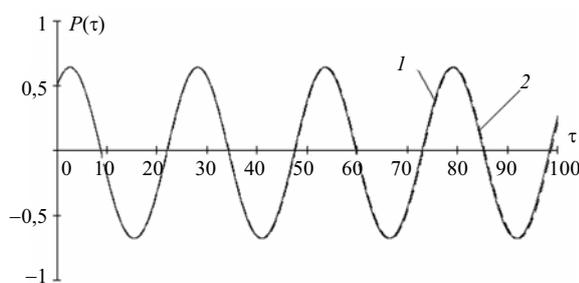


Рис. 2. Зависимость безразмерной угловой скорости P от безразмерного времени: 1 – аналитическая зависимость; 2 – численное интегрирование

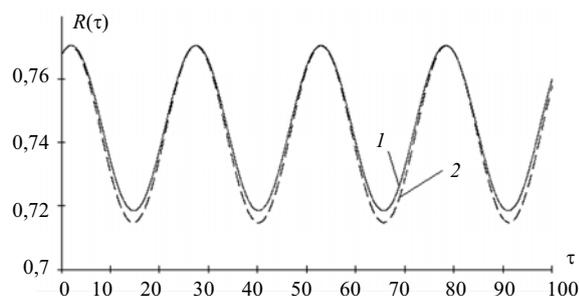


Рис. 3. Зависимость безразмерной угловой скорости R от безразмерного времени: 1 – аналитическая зависимость; 2 – численное интегрирование

Исследование движения гиростата методом Ван-дер-Поля

Как показано выше, процесс получения решения системы динамических уравнений методом усреднения весьма трудоемкий, а громоздкое решение, полученное в итоге, неудобно для дальнейшего использования и качественного анализа динамики системы. Если в поставленной задаче не требуется высокой точности решения, можно использовать более простой метод Ван-дер-Поля [13].

Первое и третье уравнение системы (5) показывают, что переменные x и z меняются медленно, так как их производные имеют порядок малой величины ε . Следовательно, за одно колебание (за время, в течение которого фаза y изменится на величину, равную 2π) амплитуда и характер колебаний изменятся мало. Заменяем периодические множители при ε в системе (5) их средними значениями за период, то есть перейдем к рассмотрению системы вида

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\varepsilon}{A} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} z (B_2 \Sigma_2 \cos y - A_1 \Sigma_1 \sin y) dy, \\ \dot{y} = az + \frac{\varepsilon}{A} C_3 \Sigma_3 - \\ - \frac{\varepsilon}{A} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{z}{x} (A_1 \Sigma_1 \cos y + B_2 \Sigma_2 \sin y) dy, \\ \dot{z} = \frac{\varepsilon}{C} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x (A_1 \Sigma_1 \sin y - B_2 \Sigma_2 \cos y) dy. \end{cases} \quad (11)$$

Можно показать, что все определенные интегралы в последней системе имеют нулевое значение на периоде колебаний. Тогда систему укороченных уравнений или уравнений Ван-дер-Поля можно записать в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = 0, \quad \dot{z} = 0, \\ \dot{y} = az + \frac{\varepsilon}{A} C_3 \Sigma_3. \end{cases} \quad (12)$$

Система (12) в силу постоянных коэффициентов имеет следующее аналитическое решение:

$$\begin{cases} x = x_0, \quad z = z_0, \\ y = \left(az_0 + \frac{\varepsilon}{A} C_3 \Sigma_3 \right) \tau + y_0, \end{cases} \quad (13)$$

где постоянные величины x_0, y_0, z_0 определяются начальными условиями:

$$x_0 = \sqrt{P_0^2 + Q_0^2}, \quad y_0 = \arctan Q_0/P_0, \quad z_0 = R_0.$$

Подставив (13) в (10), получим приближенное аналитическое решение для компонент угловой скорости несущего тела системы:

$$\begin{cases} P(\tau) = x_0 \cos \left(\left[az_0 + \frac{\varepsilon}{A} C_3 \Sigma_3 \right] \tau + y_0 \right), \\ Q(\tau) = x_0 \sin \left(\left[az_0 + \frac{\varepsilon}{A} C_3 \Sigma_3 \right] \tau + y_0 \right), \\ R(\tau) = z_0. \end{cases} \quad (14)$$

На рис. 4 и 5 представлены графики зависимостей компонент угловой скорости несущего тела от безразмерного времени, полученные численно и аналитически методом Ван-дер-Поля. По графикам видно меньшее соответствие решений друг другу по сравнению с методом усреднения. Это объясняется большей точностью метода усреднения, так как в нем неявно учитываются слагаемые с большим порядком малости. Однако общий характер движения можно понять и из более простого метода: несмотря на расхождение по фазе, амплитуды изменения величин практически совпадают. Кроме того, решение (14) более простое по своей структуре, что позволяет использовать его при исследовании динамики движения гиростата и в задаче синтеза параметров КА.

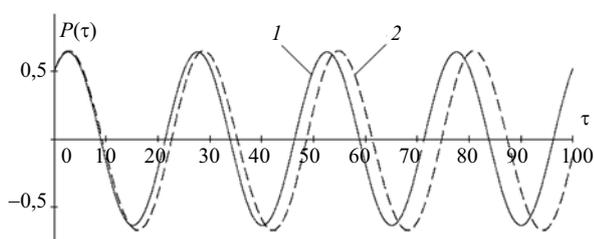


Рис. 4. Зависимость безразмерной угловой скорости P от безразмерного времени: 1 – аналитическая зависимость, 2 – численное интегрирование

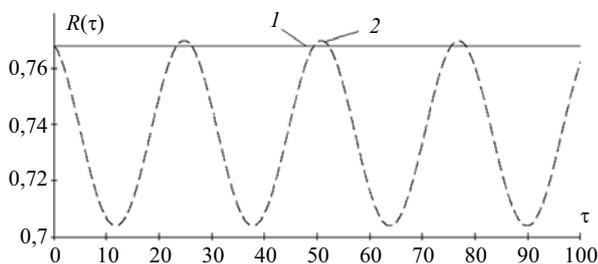


Рис. 5. Зависимость безразмерной угловой скорости R от безразмерного времени: 1 – аналитическая зависимость, 2 – численное интегрирование

Таким образом, получены приближенные аналитические зависимости для компонент угловой скорости несущего тела трехроторного гиростата двумя методами. Одно из решений можно использовать при

Получено 06.04.2015

необходимости высокой точности, а другое – при быстром качественном анализе движения. По полученным выражениям можно определять устойчивость разных режимов движения, влияние различных параметров системы, осуществлять их синтез, а также решать задачу Дарбу, которая заключается в определении угловых координат [14]. Причем решение задачи Дарбу удобнее проводить по более простым зависимостям угловых скоростей (14). Полученные результаты могут быть использованы для исследования движения спутников-гиростатов и КА с двойным вращением на пассивных участках их орбитального движения.

Библиографические ссылки

1. Виттенбург Й. Динамика систем твердых тел. – М. : Мир, 1977. – 296 с.
2. Асланов В. С., Дорошин А. В. Стабилизация спускаемого аппарата частичной закруткой при осуществлении неуправляемого спуска в атмосфере // Космические исследования. – 2002. – Т. 40. – № 2. – С. 193–200.
3. Асланов В. С., Дорошин А. В. О двух случаях движения неуравновешенных гиростатов // Известия АН. Механика твердого тела. – 2006. – № 4.
4. Нейштадт А. И., Пивоваров М. Л. Переход через сепаратрису в динамике спутника с двойным вращением // Прикладная математика и механика. – 2000. – Т. 64. – Вып. 5. – С. 741–746.
5. Черноушко Ф. Л. Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. – М. : ВЦ АН СССР, 1968.
6. Моисеев Н. Н., Румянцев В. В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. – М. : Наука, 1965. – 440 с.
7. Алексеев А. В., Дорошин А. В. Приведение спутника-гиростата с полостью с жидкостью к системам твердых тел с вязким трением // Полет. – 2007. – № 9. – С. 26–33.
8. Алексеев А. В. Движение спутника-гиростата, содержащего полость с жидкостью большой вязкости // Изв. Самарского науч. центра Рос. акад. наук. – 2007. – Т. 9. – № 3. – С. 671–676.
9. Алексеев А. В., Красников В. С. Угловое движение разгонного блока с жидким топливом // Вестник ИжГТУ. – 2011. – № 4. – С. 42–45.
10. Виттенбург Й. Указ. соч.
11. Там же.
12. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики. – М. : Наука, 1969. – 380 с.
13. Там же.
14. Алексеев А. В. Указ. соч.